

Esercizi - undicesima settimana (17-21 dicembre 2018)

Corso di Matematica I per Geologia

1. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

1. Lo si risolva per sostituzione. Ovvero: si ricavi x in funzione di y dalla prima equazione; si sostituisca il risultato nella seconda, e si ricavi y ; si calcoli poi il corrispondente valore di x .
2. Si risolva il sistema con il metodo matriciale. Ovvero: si riscriva il sistema in forma matriciale $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ per un'opportuna matrice A e un opportuno vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ (quali sono le espressioni esplicite di A e di \vec{v} ?); si verifichi che la matrice A è invertibile e se ne calcoli l'inversa; infine si ricavino x e y dalla formula $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{v}$. Si verifichi che la soluzione così trovata è la stessa di quella trovata al punto precedente.

2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Si calcoli il determinante di A . La matrice A è invertibile?
2. Si calcoli la matrice inversa A^{-1} . Si verifichi che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.
3. Si calcoli il determinante di A^4 .

3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcoli il determinante di A . La matrice A è invertibile?
2. Se A è invertibile, si calcoli la matrice inversa A^{-1} e si verifichi che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.
3. Si determinino autovalori e autovettori di A . Si verifichi che A ammette due autovettori ortogonali (come previsto sulla base dell'osservazione 7 del breve compendio su autovalori e autovettori disponibile sul sito del corso).

4. Come l'esercizio precedente, per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcolino i determinanti A e B . Le matrici A e B sono invertibili? Se sì, ricavarne l'inversa e verificare che il prodotto della matrice originale per l'inversa è uguale alla matrice identità.

2. Per quali valori di x si ha che $\det(A - xB) = 0$?
3. Si ricavino autovalori e autovettori di A .
4. Si ricavino autovalori e autovettori di A^{-1} e di A^5 .