

Esercizi - settima settimana (19-22 novembre 2018)
Corso di Matematica I per Geologia

1. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right), \\ & \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\tan x}, \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x^2} - xe^{x^2-x}), \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - x^2 + 2} - x^2}{x \ln(3 + 10^x) - \sqrt{x^3 + x}}. \end{aligned}$$

2. Si disegni il grafico delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x}{x^2 - 4}, \\ f(x) &= x^2 e^{-x^2}, \\ f(x) &= \frac{x^2 + 2 - x}{x^2 + 1 - x}, \\ f(x) &= \ln(3 + x^2) - \ln(x^2), \\ f(x) &= \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x} - \ln x. \end{aligned}$$

Per disegnare il grafico di ognuna delle funzioni assegnate, si identifichi il dominio di definizione, si faccia uno studio del segno della funzione, si determini il comportamento ai bordi del dominio, si studino le proprietà di monotonia in termini del segno della derivata, e si identifichino eventuali minimi e massimi locali.

3. Si considerino le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(1+x)}{x}, \\ f(x) &= \frac{1}{x} + x, \\ f(x) &= (x^2 - 1)^2, \\ f(x) &= x^3 - 3x^2 - x + 3. \end{aligned}$$

Per ognuna di esse, sul loro dominio di definizione, si determinino eventuali punti di massimo e di minimo e, in caso esistano, si discuta se sono massimi/minimi locali o globali.

4. Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 6 attorno al punto $x_0 = 0$ per le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x), \\ f(x) &= \cos x, \\ f(x) &= \frac{1}{1-x}, \\ f(x) &= \tan x. \end{aligned}$$

5. Calcolare esplicitamente i valori di $f(x) = \ln(1+x)$ per i seguenti valori di x : 0.5, 0.1, 0.01, 0.001; confrontarli con i valori numerici delle approssimazioni di Taylor del primo e second'ordine per gli stessi valori di x ; calcolare i corrispondenti resti di Taylor di ordine uno e due.

6. Come l'esercizio precedente, per $f(x) = \cos x$.

7. Si usi lo sviluppo di Taylor per il calcolo dei seguenti limiti:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2 \sin^2 x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x^2)} - \sqrt{1 + 2 \sin^2 x} - \frac{x^4}{3}}{x^2 \sin^2 x}. \end{aligned}$$