

Primo esonero (9 gennaio 2018)
Corso di Matematica I per Geologia

1. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(\cos x)}{x - \sin x}.$$

2. Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = x \ln |x|.$$

In particolare: (1) se ne determini il dominio; (2) se ne studi il segno; (3) se ne determini il comportamento ai bordi del dominio; (4) si discuta se la funzione è continua in $x = 0$ (se no, che tipo di discontinuità ha in quel punto?); (5) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente; (6) si discuta dove la funzione è concava o convessa; (7) si identifichino eventuali massimi e minimi relativi. Infine, se ne disegni il grafico.

3. Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 (\cos x)^3 dx.$$

4. Dati i due vettori nello spazio $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

1. si calcoli il prodotto scalare tra di essi;
2. si calcoli il coseno dell'angolo tra essi compreso;
3. si calcoli la proiezione di $\vec{u}$ sulla direzione determinata da $\vec{v}$;
4. si calcoli l'area del parallelogramma da essi individuato;
5. si calcoli $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ e si discuta se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono o no linearmente indipendenti;
6. si esibisca un vettore $\vec{a}$ ortogonale sia a $\vec{u}$ che a $\vec{v}$ e si discuta se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}$ sono o no linearmente indipendenti.

5. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. se ne calcoli il determinante;
2. si calcoli A^2 e se ne calcoli il determinante;
3. si determinino gli autovalori, calcolando le radici del polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$;
4. si riconosca che $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di A : qual è l'autovalore corrispondente?
5. si esibisca un autovettore di A^3 e si determini il corrispondente autovalore.