Un breve compendio sui limiti (7 novembre 2018)
Corso di Matematica I per Geologia

Forme indeterminate. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, si dice che il limite del rapporto $f(x)/g(x)$ è una forma indeterminata del tipo $0/0$: questo vuol dire che il valore del limite del rapporto dipende dalla velocità con cui f e g tendono a zero, e va determinato caso per caso. Analogamente, se f e g tendono a $\pm\infty$, il limite del rapporto è una forma indeterminata del tipo ∞/∞. [Un discorso analogo vale per il caso in cui $x \to x_0$ è rimpiazzato da $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$; le ovvie modifiche da apportare alla discussione in questi altri due casi sono lasciate al lettore.]

A priori ci sono altre esempi di forme indeterminate, del tipo $0 \cdot \infty$, 1^∞ e ∞^0, ma queste si possono tutte ricondurre alle forme indeterminate di tipo $0/0$. Vediamo perchè.

Consideriamo il caso in cui $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$; in tal caso, il limite del prodotto $f(x) \cdot g(x)$ è una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$. Questo si può riportare alla forma $0/0$, riscrivendo:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Si noti che, dato che $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, si ha $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$: quindi $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ è una forma indeterminata del tipo $0/0$.

Consideriamo poi il caso in cui $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$; in tal caso, il limite della funzione composta $f(x)^{g(x)}$ è una forma indeterminata del tipo 1^∞. Questa si può riportare alla forma $0/0$, riscrivendo:

$$f(x)^{g(x)} = e^{(\ln f(x))\cdot g(x)} = e^{\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}}.$$

Si noti che, dato che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, si ha $\lim_{x\to x_0} \ln f(x) = 0$ e $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$: quindi l'espressione a esponente $\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$ è una forma indeterminata del tipo $0/0$.

Consideriamo infine il caso in cui $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$; in tal caso, il limite della funzione composta $f(x)^{g(x)}$ è una forma indeterminata del tipo ∞^0. Questa si può riportare alla forma $0/0$, riscrivendo:

$$f(x)^{g(x)} = e^{(\ln f(x))\cdot g(x)} = e^{\frac{g(x)}{1/\ln f(x)}}.$$

Si noti che, dato che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, si ha $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{\ln f(x)} = 0$: quindi l'espressione a esponente $\frac{g(x)}{1/\ln f(x)}$ è una forma indeterminata del tipo $0/0$.

Gerarchia di infiniti e di infinitesimi. Per risolvere forme indeterminate di tipo ∞/∞ è cruciale conoscere la velocità relativa con cui le diverse funzioni elementari divergono. Consideriamo le funzioni elementari esponenziale, potenza e potenza di logaritmo: a^x, x^β e $(\log_a x)^b$, dove $a > 1$ e $\beta, b > 0$. Tutte queste funzioni divergono per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} x^\beta = \lim_{x\to+\infty} (\log_a x)^b = +\infty.$$

Tuttavia la velocità con cui divergono è differente: qualunque siano i valori di a, β e b, l'esponenziale a^x diverge molto più velocemente della potenza x^β, che a sua volta diverge molto più velocemente della potenza del logaritmo $(\log_a x)^b$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{(\log_a x)^b} = +\infty.$$

Talvolta per indicare tale gerarchia tra infiniti si scrive, più sinteticamente:

$$a^x \gg x^\beta \gg (\log_a x)^b, \qquad \text{per} \quad x \to +\infty.$$

Un discorso analogo vale per i reciproci di tali funzioni: se $a > 1$ e $\beta, b > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} a^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^{-\beta} = \lim_{x\to+\infty} (\log_a x)^{-b} = 0,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{-x}}{x^{-\beta}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-\beta}}{(\log_a x)^{-b}} = 0.$$

Talvolta per indicare tale gerarchia tra infinitesimi si scrive, più sinteticamente:

$$a^{-x} \ll x^{-\beta} \ll (\log_a x)^{-b}, \qquad \text{per} \quad x \to +\infty.$$

Limiti notevoli. Per risolvere forme indeterminate di tipo $0/0$ è utile conoscere come risolvere alcune forme indeterminate 'speciali', note come 'limiti notevoli'. A lezione abbiamo discusso i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

(si noti che i rapporti $\frac{\sin x}{x}$ e $\frac{1-\cos x}{x^2}$, per $x \to 0$, sono forme indeterminate del tipo $0/0$) nonchè

$$\lim_{x\to+\infty} \big(1+\frac{1}{x}\big)^x = e.$$

[Si noti che $\big(1+\frac{1}{x}\big)^x$ per $x \to +\infty$ è una forma indeterminata del tipo 1^∞, che può essere ricondotta a una forma indeterminata del tipo $0/0$ come spiegato a p.1 di queste note.]

Dal limite notevole $\lim_{x\to+\infty} \big(1+\frac{1}{x}\big)^x = e$ ne seguono in modo elementare alcuni altri, che vale la pena risolvere una volta per tutte. Innanzitutto,

$$\lim_{x\to-\infty} \big(1+\frac{1}{x}\big)^x = e.$$

Dimostrazione. Per calcolare il limite $\lim_{x\to-\infty} \big(1+\frac{1}{x}\big)^x$ riconduciamoci a un caso noto: a tal scopo, notiamo che, nel limite in cui x tende a $-\infty$ (x molto grande in valore assoluto e di segno negativo), possiamo scrivere $x = -|x|$, e ovviamente $|x|$ tende a $+\infty$. Quindi

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = \lim_{|x|\to+\infty} \Big(1-\frac{1}{|x|}\Big)^{-|x|}.$$

Ora facciamo denominatore comune dentro parentesi tonda: $\big(1-\frac{1}{|x|}\big) = \big(\frac{|x|-1}{|x|}\big)$. Inoltre ricordiamo che elevare un numero alla potenza $-|x|$ è la stessa cosa di elevare il reciproco del numero alla potenza $|x|$; quindi,

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = \lim_{|x|\to+\infty} \Big(\frac{|x|-1}{|x|}\Big)^{-|x|} = \lim_{|x|\to+\infty} \Big(\frac{|x|}{|x|-1}\Big)^{|x|}.$$

Infine, notiamo che $\frac{|x|}{|x|-1} = 1 + \frac{1}{|x|-1}$, cosicchè, chiamando $t = |x|-1$, possiamo riscrivere:

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = \lim_{|x|\to+\infty} \Big(\frac{|x|}{|x|-1}\Big)^{|x|} = \lim_{|x|\to+\infty} \Big(1+\frac{1}{|x|-1}\Big)^{|x|} \cdot = \lim_{t\to+\infty} \Big(1+\frac{1}{t}\Big)^t \cdot \Big(1+\frac{1}{t}\Big).$$

A questo punto, usando il fatto che il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti, nonchè il limite notevole $\lim_{t\to+\infty} \big(1+\frac{1}{t}\big)^t = e$, troviamo

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = \lim_{t\to+\infty} \Big(1+\frac{1}{t}\Big)^t \cdot \Big(1+\frac{1}{t}\Big) = e,$$

come volevasi dimostrare. $\square$

In conclusione $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Questo implica immediatamente che

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Infatti, per $x \to 0^+$, basta definire $t = 1/x$ (che tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$) e notare che $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$. Analogamente, per $x \to 0^-$, si definisce $t = 1/x$ (che tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$) e notare che $\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x} = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$. Quindi $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^-}(1+x)^{1/x} = e$.

Dai limiti notevoli precedenti ne seguono alcuni altri importanti. Innanzitutto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

[Si noti che il rapporto $\frac{\ln(1+x)}{x}$ per $x \to 0$ è una forma indeterminata del tipo $0/0$.] *Dimostrazione.* Per calcolare il limite di $\frac{\ln(1+x)}{x}$ per $x \to 0$ si riscriva:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\cdot\ln(1+x) = \ln[(1+x)^{1/x}],$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la proprietà dei logaritmi $a \cdot \ln b = \ln b^a$. Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln\left[(1+x)^{1/x}\right] = \ln e = 1,$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato che il limite del logaritmo è uguale al logaritmo del limite, e che $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$. Si noti che, allo stesso modo, possiamo anche calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$, per un logaritmo in base qualsiasi a. Infatti, procedendo nello stesso modo, otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a\left[(1+x)^{1/x}\right] = \log_a e.$$

È evidente che la scelta $a = e$ è quella per cui si ottiene il risultato più semplice: questo è il motivo fondamentale per cui è spesso conveniente usare come base dei logaritmi il numero di Nepero e, invece che un'altra base.

Altro limite notevole che coinvolge una forma indeterminata del tipo $0/0$ è

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Dimostrazione. Questo limite si risolve per sostituzione: si definisca $t = e^x - 1$ e si noti che

$$t = e^x - 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^x = t + 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \ln(1+t).$$

In particolare, quando $x \to 0$, anche $t \to 0$. Quindi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = 1,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il limite notevole, già discusso sopra, $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$. Anche in questo caso, allo stesso modo, possiamo calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, per un esponenziale in base qualsiasi a. Infatti, procedendo nello stesso modo, otteniamo

$$t = a^x - 1 \quad\Leftrightarrow\quad a^x = t + 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = \log_a(1+t),$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la proprietà dei logaritmi $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ che, nel caso speciale in cui $b=c=e$ implica $\log_a e=\frac{\ln e}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}$. È evidente che la scelta $a=e$ è quella per cui si ottiene il risultato più semplice: questo è il motivo fondamentale per cui è spesso conveniente usare come base degli esponenziali il numero di Nepero e, invece che un'altra base.

Tabella riassuntiva dei limiti notevoli. Riassumiamo qui i limiti notevoli discussi nella sezione precedente:

$$\begin{array}{ll}
1. & \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\\
2. & \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\\
3.a & \displaystyle\lim_{x\to +\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x=e,\\
3.b & \displaystyle\lim_{x\to -\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x=e,\\
3.c & \displaystyle\lim_{x\to 0}\big(1+x\big)^{1/x}=e,\\
4.a & \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\\
4.b & \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\\
5.a & \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\\
5.b & \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.
\end{array}$$