

**Primo scritto (15 aprile 2019)**  
Corso di **Matematica I** per Geologia

1. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^2}.$$

2. Si determini il massimo della funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$$

e si identifichi il punto in cui viene assunto.

3. Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x + 1)^2}.$$

In particolare: (1) se ne determini il dominio e se ne studi il segno; (2) se ne determini il comportamento ai bordi del dominio e si identifichino eventuali asintoti orizzontali o verticali; (3) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente e si identifichino eventuali massimi o minimi relativi; (4) si discuta dove la funzione è convessa o concava e si identifichino eventuali punti di flesso. Infine, se ne disegni il grafico.

4. Si calcoli l'integrale definito

$$\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx.$$

5. Dati i due vettori nello spazio  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

1. si calcoli il prodotto scalare tra di essi;
2. si calcoli l'angolo  $\varphi$  tra essi compreso;
3. si calcoli la proiezione di  $\vec{u}$  sulla direzione determinata da  $\vec{v}$ ;
4. si calcoli l'area del parallelogramma da essi individuato;
5. si determini un vettore ortogonale sia a  $\vec{u}$  che a  $\vec{v}$ ;
6. si discuta se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  sono o no linearmente indipendenti.

6. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcoli la matrice inversa  $A^{-1}$  e si verifichi esplicitamente che  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbf{1}$ .
2. Si determinino gli autovalori e gli autovettori di  $A$ ; quanti autovettori linearmente indipendenti esistono?
3. Si scelga un autovettore  $\vec{v}$  di  $A$  e si determini un vettore  $\vec{u}$  tale che  $A\vec{u} = \vec{v}$ .
4. Con riferimento al punto precedente, si calcoli  $A(2\vec{u} + 3\vec{v})$ .