

Primo scritto (15 aprile 2019)
Corso di **Matematica I** per Geologia

1. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^2}.$$

2. Si determini il massimo della funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$$

e si identifichi il punto in cui viene assunto.

3. Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x + 1)^2}.$$

In particolare: (1) se ne determini il dominio e se ne studi il segno; (2) se ne determini il comportamento ai bordi del dominio e si identifichino eventuali asintoti orizzontali o verticali; (3) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente e si identifichino eventuali massimi o minimi relativi; (4) si discuta dove la funzione è convessa o concava e si identifichino eventuali punti di flesso. Infine, se ne disegni il grafico.

4. Si calcoli l'integrale definito

$$\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx.$$

5. Dati i due vettori nello spazio $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

1. si calcoli il prodotto scalare tra di essi;
2. si calcoli l'angolo φ tra essi compreso;
3. si calcoli la proiezione di \vec{u} sulla direzione determinata da \vec{v} ;
4. si calcoli l'area del parallelogramma da essi individuato;
5. si determini un vettore ortogonale sia a \vec{u} che a \vec{v} ;
6. si discuta se \vec{u} , \vec{v} e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono o no linearmente indipendenti.

6. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcoli la matrice inversa A^{-1} e si verifichi esplicitamente che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbf{1}$.
2. Si determinino gli autovalori e gli autovettori di A ; quanti autovettori linearmente indipendenti esistono?
3. Si scelga un autovettore \vec{v} di A e si determini un vettore \vec{u} tale che $A\vec{u} = \vec{v}$.
4. Con riferimento al punto precedente, si calcoli $A(2\vec{u} + 3\vec{v})$.