

Scritto di Matematica I (24 giugno 2019)
Corso di Matematica I per Geologia

1. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{(\cos x)^2 + 1}.$$

2. Si determini il minimo della funzione

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln(x^2 - 1)$$

e si identifichino i punti in cui viene assunto.

3. Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

In particolare: (1) se ne determini il dominio e se ne studi il segno; (2) se ne determini il comportamento ai bordi del dominio e si identifichino eventuali asintoti orizzontali o verticali; (3) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente e si identifichino eventuali massimi o minimi relativi; (4) si discuta dove la funzione è convessa o concava e si identifichino eventuali punti di flesso. Infine, **se ne disegni il grafico.**

4. Si calcoli l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \, dx.$$

5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcoli il prodotto scalare tra $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e il vettore \vec{v} definito come $\vec{v} = A\vec{u}$.
2. Si calcoli il coseno dell'angolo φ compreso tra \vec{u} e \vec{v} .
3. Si discuta se esiste l'inversa A^{-1} . Se sì, la si calcoli e si verifichi esplicitamente che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbf{1}$.
4. Si determinino gli autovalori e gli autovettori di A . Quanti autovettori linearmente indipendenti esistono?
5. Si esibisca un autovettore di A^{-2} (ovvero, del quadrato dell'inversa: $A^{-2} = (A^{-1})^2$) e se ne calcoli il corrispondente autovalore.