Esercizi - undicesima settimana (16-20 dicembre 2019)
Corso di Matematica I per Geologia

1. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{\sin x},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2},$$
$$\lim_{x\to -\infty} \left[x + \sqrt{x^2+10x}\right],$$
$$\lim_{x\to 3^+} \left[\frac{5}{x^2-9} - \frac{x}{x-3}\right],$$
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+7}{x+3}\right)^x,$$
$$\lim_{x\to +\infty} \left(e^{x^2} - xe^{x^2-x}\right),$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^3-x^2+2} - x^2}{x\ln(3+10^x) - \sqrt{x^3+x}}.$$

2. Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 6 attorno al punto $x_0 = 0$ per le seguenti funzioni:

$$f(x) = \ln(1+x),$$
$$f(x) = \cos x,$$
$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$
$$f(x) = \tan x,$$
$$f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}.$$

3. Calcolare esplicitamente i valori di $f(x) = \ln(1+x)$ per i seguenti valori di x: $0.5, 0.1, 0.01, 0.001$; confrontarli con i valori numerici delle approssimazioni di Taylor del primo e second'ordine per gli stessi valori di x; calcolare i corrispondenti resti di Taylor di ordine uno e due.

4. Come l'esercizio precedente, per $f(x) = \cos x$.

5. Si usi lo sviluppo di Taylor per il calcolo dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1-\cos x},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x+x^2} - e^{x-x^2}}{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x^2)} - \sqrt{1+2\sin^2 x} - \frac{x^4}{3}}{x^2 \sin^2 x},$$
$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right).$$

6. Si disegni il grafico delle seguenti funzioni (studiandone: dominio di definizione, comportamento ai bordi del dominio, segno della funzione e della sua derivata, eventuali massimi o minimi relativi):

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1+3x^2-x}{x+2},\\
f(x) &= \sqrt{x^3-4x},\\
f(x) &= (x-2)^{2/3}+(x-4)^{2/3},\\
f(x) &= \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}},\\
f(x) &= \ln\frac{4x}{x^2+1}.
\end{aligned}
$$