Esercizi - terza settimana (14-18 ottobre 2019)
Corso di Matematica I per Geologia

1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Si calcolino le matrici A^2, B^2, AB e BA. Inoltre, se

$$C = \begin{pmatrix} 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

si verifichi che $BC = CB = 0$.

2. Dato un vettore $\vec{v}$ del piano, associato al punto di coordinate cartesiane (x, y), lo si identifichi con la matrice colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. L'azione di una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ su $\vec{v}$ è definita attraverso il prodotto righe per colonne come segue:

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

1. Si scelga A come nell'esercizio 1, e si calcolino le coordinate di $\vec{u} = A\vec{v}$, per $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; ripetere il calcolo per $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per ognuno di questi casi, si rappresentino graficamente sul piano cartesiano i vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$. Infine, si dia un'interpretazione geometrica dell'azione di A.
2. Come il punto precedente, con A rimpiazzata da A^2.
3. Come il punto 1, con A rimpiazzata dalla matrice B dell'esercizio 1. Si dia un'interpretazione geometrica al fatto che $B^2 = B$.
4. Come il punto 1, con A rimpiazzata dalla matrice C dell'esercizio 1.
5. Come il punto 1, con A rimpiazzata dalla matrice AB dell'esercizio 1.
6. Come il punto 1, con A rimpiazzata dalla matrice BA dell'esercizio 1.
7. Si dia un'interpretazione geometrica al fatto che $AB \neq BA$.
8. Si dia un'interpretazione geometrica al fatto che $BC = CB = 0$.

3. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

1. Lo si risolva per sostituzione. Ovvero: si ricavi x in funzione di y dalla prima equazione; si sostituisca il risultato nella seconda, e si ricavi y; si calcoli poi il corrispondente valore di x).
2. Si risolva il sistema con il metodo matriciale. Ovvero: si riscriva il sistema in forma matriciale $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ per un'opportuna matrice A e un opportuno vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ (quali sono le espressioni esplicite di A e di $\vec{v}$?); si verifichi che la matrice A è invertibile e se ne calcoli l'inversa; infine si ricavino x e y dalla formula $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{v}$. Si verifichi che la soluzione così trovata è la stessa di quella trovata al punto precedente.

4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcoli il determinante di A. La matrice A è invertibile?
2. Se A è invertibile, si calcoli la matrice inversa A^{-1} e si verifichi che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Si calcoli il determinante di A. La matrice A è invertibile?
2. Si calcoli la matrice inversa A^{-1}. Si verifichi che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.
3. Si calcoli il determinante di A^4.