

Esercizi - nona settimana (2-6 dicembre 2019)

Corso di Matematica I per Geologia

Breve compendio sulle derivate.

Equazione della retta tangente. Sia $f(x)$ una funzione che nel punto x_0 ha derivata $f'(x_0)$. L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ è:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

[NOTA: in questa equazione x va pensata come variabile mentre x_0 è un valore prefissato.]

Derivazione della somma, del prodotto e del rapporto di due funzioni. Valgono le seguenti regole per il calcolo della derivata di una somma, di un prodotto o di un rapporto (le discuteremo a lezione la prossima settimana; per il momento potete usarle 'ciecamente'):

$$\begin{aligned}(f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x), & (f(x) - g(x))' &= f'(x) - g'(x), & (c \cdot f(x))' &= c \cdot f'(x), \\ (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), & \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.\end{aligned}$$

Ad es., $(x^2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$ o $\left(\frac{2^x}{\sin x}\right)' = \frac{2^x \ln 2}{\sin x} - \frac{2^x \cos x}{\sin^2 x}$.

Derivazione di una funzione composta. Sia $f \circ g(x) = f(g(x))$ la composizione delle funzioni f e g (' f dopo g ').

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ad es., $\left((\sin x)^3\right)' = 3 \sin^2 x \cos x$ o $(\sin(x^3))' = \cos(x^3) \cdot 3x^2$.

Esercizi proposti.

1. Si consideri la funzione $f(x) = 2^{-x}$. Se ne disegni il grafico qualitativo, insieme a quello della retta tangente nel punto di ascissa $x = 1$. Si calcoli l'equazione di tale retta tangente.
2. Come l'esercizio precedente, per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ (tangente da disegnare e calcolare nel punto di ascissa $x = 1$).
3. Come gli esercizi precedenti, per la funzione $f(x) = x^3 - x$ (tangente da disegnare e calcolare nei punti di ascissa $x = 0$ e $x = 1$).
4. Usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, si mostri che:

$$(\cos x)' = -\sin x$$

e che

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

5. Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni, usando le regole di derivazione per la somma, il prodotto, il rapporto di funzioni e per la composizione di funzioni:

$$f(x) = \tan x,$$

$$f(x) = \sin(2x),$$

$$f(x) = x \ln x,$$

$$f(x) = \frac{1}{6 + x - x^2},$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}},$$

$$f(x) = \cos(1/x),$$

$$f(x) = 2^{\sin x},$$

$$f(x) = x^x,$$

$$f(x) = (x + \sqrt{x})^{1/3},$$