Esercizi - decima settimana (9-13 dicembre 2019)
Corso di Matematica I per Geologia

1. Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni:

$$\cos(\ln x), \quad \frac{1}{2+3e^{-2x}}, \quad \log_{10}(1+\sqrt{1+e^x}), \quad \ln(\cos x), \quad e^{e^x}, \quad (\sin x)^{\tan x}, \quad \frac{1}{\sqrt{x \sin x}}.$$

2. Si disegni il grafico della funzione $|\sin x|$. Si stabilisca quali sono i punti in cui tale funzione è differenziabile e quelli in cui non lo è. Nei punti di differenziabilità, se ne calcoli la derivata.

3. Si consideri la funzione $\cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

1. Se ne studi qualitativamente il grafico, identificandone il dominio di definizione D, il segno, il comportamento ai bordi di D e le proprietà di monotonia (studiandone il segno della derivata).
2. Si verifichi che $\cosh x$ è strettamente monotona crescente (e quindi invertibile) su $[0, +\infty)$, e sia $\operatorname{arccosh} x$ l'inversa associata alla restrizione di $\cosh x$ a tale intervallo. Si calcoli analiticamente la formula di tale inversa.
3. Si calcoli la derivata di $\operatorname{arccosh} x$, usando due metodi diversi: (1) la formula per la derivata dell'inversa e (2) la formula di derivazione delle funzioni composte (usando l'espressione esplicita di $\operatorname{arccosh} x$ ricavata al punto precedente). Si verifichi che i due metodi producono lo stesso risultato.

4. Come l'esercizio precedente, per la funzione $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$:

1. Si studi qualitativamente il grafico di $\tanh x$, identificandone il dominio di definizione D, il segno, il comportamento ai bordi di D e le proprietà di monotonia (studiandone il segno della derivata).
2. Si verifichi che $\tanh x$ è strettamente monotona crescente (e quindi invertibile) su tutto $\mathbb{R}$. Sia $\operatorname{arctanh} x$ l'inversa corrispondente. Si calcoli analiticamente la formula di tale inversa.
3. Si calcoli la derivata di $\operatorname{arctanh} x$, usando due metodi diversi: (1) la formula per la derivata dell'inversa e (2) la formula di derivazione delle funzioni composte (usando l'espressione esplicita di $\operatorname{arctanh} x$ ricavata al punto precedente). Si verifichi che i due metodi producono lo stesso risultato.

5. Si disegni il grafico delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2x}{x^2-4}, \\
f(x) &= x^2 e^{-x^2}, \\
f(x) &= \frac{x^2+2-x}{x^2+1-x}, \\
f(x) &= \ln(3+x^2) - \ln(x^2), \\
f(x) &= \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x} - \ln x.
\end{aligned}$$

Per disegnare il grafico di ognuna delle funzioni assegnate, si identifichi il dominio di definizione, si faccia uno studio del segno della funzione, si determini il comportamento ai bordi del dominio, si studino le proprietà di monotonia in termini del segno della derivata, e si identifichino eventuali minimi e massimi locali.

6. Si considerino le seguenti funzioni:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(1+x)}{x}, \\
f(x) &= \frac{1}{x} + x, \\
f(x) &= (x^2-1)^2, \\
f(x) &= x^3 - 3x^2 - x + 3.
\end{aligned}
$$

Per ognuna di esse, sul loro dominio di definizione, si determinino eventuali punti di massimo e di minimo e, in caso esistano, si discuta se sono massimi/minimi locali o globali.