

Primo esonero (20 gennaio 2020)
Corso di Matematica I per Geologia

1. Dati i due vettori nello spazio $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$,

1. si calcoli il prodotto scalare tra di essi;
2. si calcoli il coseno dell'angolo tra essi compreso;
3. si calcoli l'area del parallelogramma da essi individuato;
4. si determini un vettore ortogonale ad entrambi;

5. si discuta se \vec{u} , \vec{v} e $\vec{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcoli il determinante di A . Si riconosca che la matrice A è invertibile (perchè?) e se ne calcoli l'inversa. Si verifichi esplicitamente che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Si discuta se il sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ammette soluzione unica e, in caso, la si determini.
3. Si determinino gli autovalori e gli autovettori di A e si verifichi che gli autovettori indipendenti sono tra loro ortogonali (perchè?).
4. [**Facoltativo.** Si determinino gli autovalori e autovettori di A^2 .]

3. Si consideri la funzione $f(x) = x - \sqrt{x}$. Se ne determini il dominio D e si identifichi un intervallo I contenuto in D (eventualmente infinito) su cui f è crescente. Su tale intervallo, si disegni qualitativamente il grafico di f , quello della sua inversa e si calcoli analiticamente l'inversa f^{-1} .

4. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x}{x^2 + 1} \right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - \sqrt{1-x}}{x^2 + 2x}.$$

5. Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 2x + 1}.$$

In particolare: (1) se ne determini il dominio; (2) se ne studi il segno; (3) se ne determini il comportamento ai bordi del dominio, e si identifichino eventuali asintoti orizzontali o verticali; (4) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, e si identifichino eventuali massimi e minimi locali. [(5) **Facoltativo.** se ne studi il segno della derivata seconda, e si identifichino le regioni in cui è concava o convessa e gli eventuali punti di flesso.] Infine, se ne disegni il grafico.