

**Secondo esonero (19 febbraio 2020)**  
Corso di Matematica I per Geologia

1. Dati i due vettori nello spazio  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,

1. si calcoli il prodotto scalare tra di essi;
2. si calcoli il coseno dell'angolo tra essi compreso;
3. si calcoli l'area del parallelogramma da essi individuato;
4. si determini un vettore ortogonale ad entrambi;

5. si discuta se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  sono linearmente indipendenti.

2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcoli il determinante di  $A$ . Si riconosca che la matrice  $A$  è invertibile (perchè?) e se ne calcoli l'inversa. Si verifichi esplicitamente che  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
2. Si discuta se il sistema  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ammette soluzione unica e, in caso, la si determini.
3. Si determinino gli autovalori e gli autovettori di  $A$ . Quanti autovettori indipendenti ammette il sistema?
4. [Facoltativo. Si esibisca un autovettore di  $A^{10}$  e se ne calcoli il corrispondente autovalore.]

3. Si consideri la funzione  $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ . Se ne determini il dominio  $D$  e si identifichi un intervallo  $I$  contenuto in  $D$  (eventualmente infinito) su cui  $f$  è crescente. Su tale intervallo, si disegni qualitativamente il grafico di  $f$ , quello della sua inversa e si calcoli analiticamente l'inversa  $f^{-1}$ .

4. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x)^2 - \sin(x^2)}{x^3 + x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + x)^2 - \sin(x^2)}{x^3 + x^4}.$$

5. Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}.$$

In particolare: (1) se ne determini il dominio; (2) se ne studi il segno; (3) se ne determini il comportamento ai bordi del dominio, e si identifichino eventuali asintoti orizzontali o verticali; (4) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, e si identifichino eventuali massimi e minimi locali. Infine, **se ne disegni il grafico**.