

**Prova pre-esonero (8 gennaio 2020)**  
Corso di Matematica I per Geologia

1. Dati i due vettori nel piano  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  e  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,

1. li si disegni sul piano cartesiano;
2. si calcoli il prodotto scalare tra di essi;
3. si calcoli il coseno dell'angolo tra essi compreso;
4. si calcoli la proiezione di  $\vec{u}$  sulla direzione determinata da  $\vec{v}$ ;
5. si calcoli l'area del parallelogramma da essi individuato;
6. si calcoli la distanza di  $P = (1, -2)$  (l'estremo libero di  $\vec{u}$ ) dalla retta passante per l'origine e parallela a  $\vec{v}$ .

2. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcolino  $A \cdot B$  e  $B \cdot A$  e si verifichi che  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .
2. Si calcoli la matrice  $M = A \cdot B - B \cdot A$ , si verifichi che è invertibile e se ne calcoli l'inversa.
3. Si determinino autovalori e autovettori di  $M$ .
4. Si ricavino autovalori e autovettori di  $M^{-1}$  e di  $M^2$ .

3. Si identifichi un intervallo (eventualmente infinito) su cui la funzione  $e^{2x} - 2e^x$  è invertibile, e se ne calcoli la corrispondente funzione inversa, specificandone il dominio e il codominio.

4. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - e^x}{\sqrt{4+x} - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^5 - e^x}{\sqrt{4+x} - 2}.$$

5. Si determinino il minimo e il massimo della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^4 - x^2 + 2}$$

e si identifichino i punti in cui vengono assunti.

6. Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3 + 2x^2}.$$

In particolare: (1) se ne determini il dominio; (2) se ne studi il segno; (3) se ne determini il comportamento ai bordi del dominio, e si identifichino eventuali asintoti orizzontali o verticali; (4) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente; (5) si identifichino eventuali minimi e massimi locali. Infine, se ne disegni il grafico.