

Esame scritto (24 giugno 2020)
Corso di Matematica I per Geologia

1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Si calcoli il determinante di A . Si riconosca che la matrice A è invertibile (perchè?) e se ne calcoli l'inversa. Si verifichi esplicitamente che $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Si determinino gli autovalori e gli autovettori di A . Quanti autovettori linearmente indipendenti ammette la matrice A ?
3. Sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e si determinino le componenti del vettore $\vec{u} = A\vec{v}$. Si calcoli l'area del parallelogramma da loro individuato.

2. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{e^{x^2} - \sin x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \cos x}{e^{x^2} - \sin x - 1}.$$

3. Si studi il grafico della funzione

$$f(x) = \left(\frac{4}{x} - 3\right)e^{-x}.$$

In particolare: (1) se ne determini il dominio; (2) se ne studi il segno; (3) se ne determini il comportamento ai bordi del dominio, e si identifichino eventuali asintoti orizzontali o verticali; (4) si discuta dove la funzione è crescente o decrescente, e si identifichino eventuali massimi e minimi locali. Infine, **se ne disegni il grafico**.