

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA
LA SAPIENZA

FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

TESI DI LAUREA IN FISICA
A.A. 2000/2001

**Gruppo di rinormalizzazione per un sistema
di fermioni interagenti in due dimensioni**

RELATORE:

PROF. *Giovanni Gallavotti*

LAUREANDO:

Alessandro Giuliani

TESINE

Il “gioco della minoranza”: un modello di mercato finanziario

RELATORE: PROF. ENZO MARINARI

Il progetto ATLAS ad LHC

RELATORE: PROF. ALEANDRO NISATI

*A Corinna
per tutto il suo amore
(e tutta la sua pazienza)*

Indice dei contenuti

1. Introduzione.	9
1.1 Il problema fisico.	9
1.2 Presentazione del lavoro.	11
2. Il modello. Tecniche e problemi.	15
2.1 Presentazione del modello.	15
2.2 La teoria libera.	16
2.3 La teoria perturbativa.	20
3. Impostazione funzionale.	26
3.1 Integrazione funzionale Grassmaniana e aspettative troncate.	26
3.2 Funzioni di Schwinger e potenziale efficace.	30
4. Decomposizione in multiscale ed espansione in alberi.	33
4.1 Decomposizione in multiscale e quasi-particelle.	33
4.2 Sviluppo in alberi non rinormalizzato.	37
4.3 Calcolo del valore di un albero.	41
4.4 Grafici di Feynman e ammassi.	45
4.5 Espansione in determinanti. Confronto con l' espansione in grafici di Feynman.	47
5. Stime perturbative per la funzione beta.	49
5.1 Stime perturbative per l' espansione non rinormalizzata.	49
5.2 L' operazione di localizzazione e l' espansione rinormalizzata. Stime perturbative per il funzionale beta nel caso $\alpha = 1$	56
5.3 Stime perturbative per il funzionale beta nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$	67
6. Stime non perturbative per la funzione beta.	72
6.1 Stime non perturbative per l' espansione non rinormalizzata.	72
6.2 Stime non perturbative per la funzione beta.	81
6.3 Flusso di ν_h	90
7. La funzione di Schwinger a due punti. Commenti e risultati.	95
7.1 La funzione di Schwinger a due punti.	95
7.2 Commenti finali.	100
Appendice A1: Verifica della (3.34)	104
Appendice A2: Dimostrazione del Lemma 4.1	106
Appendice A3: Conteggio degli alberi e dei grafici di Feynman	109
A3.1 Alberi.	109
A3.2 Grafici di Feynman.	112
Appendice A4: Aspettazioni troncate	113
A4.1 Sviluppo in grafici di Feynman delle aspettative troncate.	113
A4.2 Sviluppo in determinanti delle aspettative troncate.	116
Appendice A5: Stime sui determinanti e sulle aspettative troncate	125
A5.1 Stime sulle aspettative troncate.	125
A5.2 Disuguaglianza di Gram-Hadamard.	128
Appendice A6: Alcuni risultati tecnici	132
Appendice A7: Dimostrazione del Teorema 6.1	136

A7.1 Dimostrazione del Teorema 6.1.	136
A7.2 Dimostrazione del Lemma A7.1.	143
Ringraziamenti	146
Bibliografia	147

sec.1

1. Introduzione.

p.1.1

1.1. Il problema fisico.

E' noto che nella fisica dello stato solido il modello ad elettroni liberi (gas di Fermi) ha permesso di spiegare moltissimi fenomeni che, prima dell' avvento della meccanica quantistica, erano incomprensibili. In particolare e' stato possibile spiegare l' andamento a basse temperature del calore specifico elettronico (lineare con la temperatura) e della suscettivita' magnetica elettronica (indipendente dalla temperatura); studiando poi un sistema di elettroni non interagenti tra loro ma interagenti con un potenziale periodico esterno si e' riusciti a spiegare la struttura a bande delle relazioni di dispersione energia-impulso degli elettroni in un reticolo cristallino, e si e' cosi' riusciti a comprendere cosa rende un materiale un conduttore o un isolante.

E' naturale l' interesse a studiare sistemi di elettroni interagenti, prima di tutto per capire come mai e' sensato approssimare gli elettroni in un metallo con elettroni non interagenti tra loro; e poi per cercare di spiegare fenomeni (quali la superconduttivita') altrimenti inspiegabili. Purtroppo inserendo nel modello di partenza un potenziale di interazione tra gli elettroni il problema si complica terribilmente; in particolare il modello non e' piu' esattamente risolubile, ovvero non si riescono ad ottenere espressioni esplicite per i livelli energetici del sistema e per le funzioni di correlazione.

Un modo di affrontare il problema e' quello fenomenologico, come l' approccio di Landau nello studio dei cosiddetti "liquidi di Fermi", vedi [L9]. L' analisi di Landau si basa su ipotesi (in particolare quella dell' accensione adiabatica dell' interazione e della corrispondenza uno a uno tra livelli del sistema libero e di quello interagente) ragionevoli ma poco controllabili da un punto di vista fondamentale. Il risultato della sua analisi comunque e' quello aspettato: qualitativamente il gas e il liquido di Fermi si comportano allo stesso modo; in particolare le leggi che descrivono l' andamento a basse temperature del calore specifico e della suscettivita' magnetica sono le stesse, a patto di sostituire alcuni parametri della teoria originale con dei parametri rinormalizzati (ad esempio la massa dell' elettrone con una nuova "massa efficace").

La teoria di Landau sembra descrivere universalmente il comportamento dei sistemi di elettroni interagenti. In realta' si trova che la teoria di Landau e' valida solo per interazione repulsiva tra elettroni. Se l' interazione efficace tra gli elettroni e' attrattiva e' stato mostrato (*teoria BCS* della superconduttivita') che lo stato fondamentale descritto dalla teoria di Landau e' instabile, indipendentemente dall' intensita' dell' interazione, vedi [L9]. In questo caso gli elettroni tendono ad accoppiarsi in stato di singoletto di spin $S = 0$. Ognuna di queste coppie (*coppie di Cooper*) ha il ruolo di nuova particella elementare del sistema. Il sistema diventa allora quello di un sistema di bosoni interagenti e lo stato fondamentale e' uno stato *superfluido*. Un materiale per cui l' interazione efficace tra elettroni sia attrattiva e il cui stato fondamentale abbia le proprieta' appena descritte si chiama *superconduttore*. In esso la corrente puo' scorrere senza dissipazione per effetto Joule.

La teoria BCS pero' descrive bene solo i superconduttori standard, non riesce invece a spiegare il comportamento dei superconduttori *ad alta temperatura critica*. In effetti a tutt' oggi non esiste una teoria soddisfacente di questi materiali. Ci sono evidenze sperimentali pero' che i superconduttori ad alta T_c abbiano dei comportamenti qualitativamente simili a quelli di un liquido di Luttinger [A], ossia di un sistema di fermioni il cui stato fondamentale ammette una superficie di Fermi anomala (la funzione di distribuzione degli impulsi $n(\mathbf{k})$ non e' discontinua a $\mathbf{k} = \mathbf{p}_F$ ma ha tangente verticale) e la cui funzione di correlazione a due punti ha un decadimento anomalo quando il suo argomento (la distanza spaziale) tende ad infinito. Il motivo per cui alcuni sistemi di fermioni interagenti con superficie di Fermi anomala si chiamano "liquidi di Luttinger", e' che esiste un modello unidimensionale di fermioni interagenti (introdotto da Luttinger, appunto) esattamente risolubile [Lu][LM], che presenta una superficie di Fermi anomala ed esponenti anomali nelle funzioni di correlazione. Anderson [A] ha congetturato che i sistemi di fermioni bidimensionali, sotto

opportune (ma controverse) ipotesi sul meccanismo con cui si costruisce lo stato fondamentale, siano “vicini” ad un liquido di Luttinger. Il motivo per cui si prendono in considerazione i sistemi bidimensionali e’ che sperimentalmente si ha evidenza del fatto che la supercorrente nei superconduttori ad alta T_c scorra essenzialmente su dei piani di ossidi di rame.

Sarebbe necessario, in tutti i casi descritti sopra, disporre di una teoria rigorosa che permetta di prevedere, dato un modello di interazione microscopica tra gli elettroni, quali comportamenti macroscopici manifesta il sistema. L’idea per affrontare questo difficile problema e’ quella (molto naturale) di usare la teoria perturbativa. Dato un particolare modello di interazione si congettura (facendo riferimento all’analisi fenomenologica di Landau, alla teoria BCS di campo medio e alla congettura di Anderson) quale debba essere lo stato fondamentale del sistema interagente (rispettivamente, negli esempi fatti sopra, un liquido normale di Fermi, un superfluido o un liquido di Luttinger). Si usa poi la teoria perturbativa attorno allo stato fondamentale congegnato (o ad una sua approssimazione quando, come nel caso del superfluido, non si conosce lo stato fondamentale esatto) e si cerca di mostrare che i comportamenti asintotici delle funzioni di correlazione sono gli stessi nel caso interagente e nel caso congegnato.

Una delle tecniche con cui si puo’ affrontare il problema e’ quella del *gruppo di rinormalizzazione*. Si procede nel seguente modo:

si da’ una formulazione funzionale alla teoria di campo che, in seconda quantizzazione, descrive il sistema dei fermioni interagenti;

si aggiunge all’interazione che si vuole studiare un certo numero di termini dipendenti da parametri liberi, che vanno scelti in modo tale che alcune grandezze della teoria finale abbiano valori prefissati (uguali a quelli osservati);

si identifica un potenziale efficace della teoria, che racchiude le informazioni fisicamente interessanti del sistema macroscopico (che permetta cioe’ di calcolare i valori medi di grandezze macroscopicamente osservabili, e non contenga informazioni sui dettagli microscopici del sistema);

si identifica un modo ricorsivo di calcolare il potenziale efficace, che corrisponde a calcolare ricorsivamente i contributi provenienti da scale di lunghezza sempre piu’ grandi (o sempre piu’ piccole, a seconda del problema che si sta studiando);

si esprime il potenziale efficace su una data scala in funzione di costanti di accoppiamento efficaci su scale comprese tra quella in questione e quella iniziale;

si scrivono le equazioni che permettono di calcolare, date le costanti di accoppiamento da scala 0 a scala h , la costante di accoppiamento sulla scala successiva;

si studia come un sistema dinamico il flusso delle costanti di accoppiamento e si cercano di fissare le costanti “nude” (quelle sulla scala originale del problema) in modo tale che il potenziale efficace sia effettivamente quello congegnato all’inizio.

Il programma delineato sopra si riesce raramente a portare fino in fondo. Una notevolissima eccezione e’ fornita dallo studio dei sistemi di fermioni interagenti in una dimensione. Infatti se l’interazione tra elettroni e’ piccola e a corta portata, in quel caso si riesce a dimostrare rigorosamente [BGPS] che il sistema tende al “punto fisso di Luttinger”, ossia il sistema tende ad avere caratteristiche macroscopiche proprie di un liquido di Luttinger. Purtroppo l’analisi del caso unidimensionale non si riesce a estendere alle dimensioni maggiori di uno. Una difficolta’ tecnica che si incontra in dimensioni maggiori di uno e’ dovuta al fatto che la singolarita’ contenuta nella trasformata di Fourier della funzione di correlazione a due punti libera, non e’ piu’ localizzata in due punti ($\mathbf{k} = \pm \mathbf{p}_F$), ma su una intera superficie. Questo impedisce di usare le tecniche usate in dimensione 1 per dimostrare la convergenza della serie perturbativa che definisce la funzione beta (ossia la funzione che descrive il flusso delle costanti di accoppiamento “correnti”). Non solo, in dimensioni maggiori di 1 si incontra una ancora piu’ grave difficolta’ concettuale: anche il troncamento di ordine due della funzione beta (che per quanto detto sopra non si sa se ha senso o no, visto che non si sa se

la funzione beta e' ben definita) da' luogo ad un flusso che non si riesce a controllare; per essere piu' precisi, escludendo il caso del potenziale attrattivo, in cui ci si aspetta in ogni caso una instabilita' di tipo BCS che cambia completamente l' approccio da dare al problema (il problema diventa bosonico), non si riesce a stabilire se il flusso delle costanti tenda, per temperatura nulla, al punto fisso di Luttinger, a quello normale di Fermi o a qualche altro punto fisso non banale. Kohn e Luttinger [KL] hanno proposto un meccanismo che spiegherebbe come, genericamente, anche un sistema di elettroni interagenti con un potenziale a due corpi repulsivo possa diventare instabile, condensare e dar luogo a fenomeni di superconduzione. In questo caso ci si aspetta allora che, genericamente, sia impossibile fissare i parametri liberi della teoria in modo tale che il flusso delle costanti correnti rimanga limitato: comunque si fissino i "dati iniziali", il flusso porta le costanti correnti fuori dal regime in cui sono controllate dalla funzione beta costruita con le tecniche perturbative usate in questo lavoro. Tecnicamente, la difficolta' che si incontra a trattare il flusso delle costanti correnti nasce dal fatto che una di esse, λ_h (vedi Capitolo 5 del presente lavoro), nel caso di dimensioni maggiori di uno, e' una funzione degli angoli tra quattro versori, invece che essere una costante scalare. Se sviluppiamo λ_h in armoniche sferiche, l' equazione per il suo flusso puo' essere espresso nella forma di una gerarchia di equazioni per i coefficienti delle armoniche sferiche. Purtroppo le equazioni che descrivono il flusso di questi coefficienti sono accoppiate in modo non banale, e lo studio del flusso di λ_h diventa lo studio di un sistema dinamico a infinite componenti accoppiate.

In questa prospettiva l' analisi fenomenologica di Landau e' genericamente falsa, e probabilmente e' sensata per temperature positive, anche se piccole (ad esempio per temperature superiori alla temperatura critica BCS).

La congettura di Anderson non e' supportata dalla conoscenza di modelli per cui il flusso delle costanti correnti, anche studiato euristicamente, tenda al punto fisso di Luttinger fino a temperature interessanti per lo studio dei superconduttori ad alta T_c .

Il caso bidimensionale, quindi, e' sostanzialmente un problema aperto, nel quale gli unici risultati rigorosi disponibili [DR1][DR2] sono difficili da ottenere e al momento principalmente di interesse matematico.

p.6.2

1.2.Presentazione del lavoro. In questa tesi vogliamo affrontare lo studio della funzione beta nel caso bidimensionale, usando il formalismo introdotto in [BG]. Il lavoro e' organizzato in 7 Capitoli e 7 Appendici.

Nei Capitoli 2-3 vengono introdotte le tecniche necessarie a trattare il problema. In questi Capitoli la trattazione non e' originale e si seguono essenzialmente i lavori [Bo][BG][GM].

Nel Capitolo 4 si introduce la decomposizione in multiscale e in quasi-particelle per la parte infrarossa del propagatore. Si usa una decomposizione in quasi-particelle diversa da quella usata in [BG], con funzioni a supporto compatto, invece che analitiche. In piu' si prevede una dipendenza dell' ampiezza dei settori angolari da un parametro α , che sara' scelto in modo conveniente nel corso del lavoro. Il parametro α e' definito in modo che, se $\alpha = \bar{\alpha}$, il propagatore della teoria libera, calcolato in spazio k , viene spezzato in una somma di propagatori (propagatori di quasi-particella), ognuno dei quali e' diverso da zero in una regione dalle dimensioni $\sim \gamma^h$ (in direzione radiale, attorno alla superficie di Fermi) per $\gamma^{\bar{\alpha}h}$ (in direzione tangenziale). Per il "principio di indeterminazione" un propagatore che, in spazio k , e' definito in una regione di dimensioni $\sim \gamma^h$, in spazio x "vive" su una regione di dimensioni γ^{-h} (quindi decade all' infinito su una scala γ^{-h}). Con la decomposizione da noi scelta, per ogni propagatore di quasi-particella vengono identificate in spazio x due direzioni privilegiate, lungo una delle quali il propagatore decade su scala γ^{-h} , mentre lungo l' altra decade su scala $\gamma^{-\alpha h}$. La scelta piu' naturale (o piu' ingenua) e' quella di porre $\alpha = 1$, in modo tale che il propagatore in spazio x decada allo stesso modo in tutte le direzioni (decomposizione in settori "isotropi").

La componente ultravioletta del propagatore viene posta indenticamente uguale a zero. Il motivo e'

che in questo lavoro vogliamo studiare solo il problema infrarosso (decadimento all' infinito spaziale delle funzioni di correlazione) e decidiamo allora di introdurre un regolarizzatore ultravioletto (UV). In effetti bisognerebbe verificare che, mandando all' infinito il taglio UV sul propagatore, i risultati fisici non cambino. La verifica di quest' affermazione e' non banale, e va oltre gli scopi di questa tesi. Ancora piu' importante sarebbe verificare che i risultati fisici non dipendano dalla scelta del taglio UV. Nonostante ci si aspetti che il problema infrarosso non possa dipendere dalla scelta del regolarizzatore UV, i risultati di questa tesi si basano in modo cruciale sul fatto che la teoria regolarizzata sia, come la teoria di partenza, invariante per rotazioni. E' un problema aperto stabilire se, con un diverso regolarizzatore (ad esempio mettendo i fermioni su reticolo), si possano ritrovare gli stessi risultati di questo lavoro.

Nel Capitolo 5 si trattano in dettaglio le stime perturbative per la funzione beta. In particolare mostriamo che, scegliendo $\alpha = 1$ per la decomposizione in quasi-particelle, si riottengono facilmente gli stessi risultati del lavoro [BG] (in quel lavoro si trattava solamente il caso di dimensione dispari, a causa della difficolta' di scrivere un' espressione analitica per i propagatori su scala \hbar nel caso di dimensione pari). Scegliendo invece $\alpha = \frac{1}{2}$, che e' un caso interessante per l' analisi non perturbativa della funzione beta ([DR1][DR2] e Capitoli 6-7 del presente lavoro), mostriamo l' esistenza di alcune difficolta' che sembrano impedire una definizione "sensata" delle operazioni di rinormalizzazione per le funzioni a quattro punti (per "sensata" intendiamo una definizione che permetta di costruire, almeno perturbativamente, la funzione beta, almeno nell' ipotesi che il flusso da essa generato rimanga limitato). Si e' allora costretti a studiare il sistema con una temperatura diversa da zero. A temperatura non nulla il propagatore libero della teoria decade all' infinito esponenzialmente, con una massa proporzionale alla temperatura stessa. E' allora naturale che, fissando una temperatura sufficientemente alta, la teoria perturbativa converga. Il problema interessante diventa allora quello di ottimizzare la stima sulla temperatura critica al di sopra della quale il sistema e' stabile. Nel Capitolo 5 troviamo una temperatura critica esponenzialmente piccola nel potenziale microscopico $\lambda(x)$. Al di sopra della temperatura critica la funzione beta per la costante corrente ν_h e' ben definita ordine per ordine, nell' ipotesi che il flusso da essa generato rimanga limitato. Purtroppo il fatto di non riuscire a rinormalizzare le funzioni a quattro punti fornisce una stima sulla temperatura critica che, pur avendo il giusto andamento in λ , e' quantitativamente lontana da quella che ci si aspetta fisicamente (*i. e.* la stima che troviamo sulla temperatura critica e' molto diversa dalla temperatura critica fisica, T_{BCS} , al di sopra della quale vale la teoria di Landau dei liquidi di Fermi).

Nel Capitolo 6 si trattano le stime non perturbative per la funzione beta, con le tecniche introdotte da Lesniewski [L]. In particolare si mostra la necessita' di scegliere una decomposizione in scale che inizialmente sembrava innaturale ($\alpha = \frac{1}{2}$). Si dimostra l' analiticita' della funzione beta e si controlla che il flusso di ν_h da essa generato rimanga limitato. In questo Capitolo si ritrovano i risultati principali di [DR1][DR2] con alcune fondamentali semplificazioni che si basano su una proprieta' di invarianza per rotazioni dei nuclei integrali dei potenziali efficaci (vedi Teorema 5.1). In particolare evitiamo di introdurre alcuni accorgimenti tecnici (raffinamento dei settori e parziale espansione dei determinanti, vedi [DR2]) che rendono inutilmente pesante la lettura di quel lavoro. Il risultato principale del Capitolo 6 e' riassunto nel seguente Teorema.

TEOREMA *Consideriamo il sistema descritto dall' hamiltoniana*

$$1.1 \quad H = (1 + \alpha_0)(T - \mu N) + \nu_0 N + V \equiv (1 + \alpha_0)H_0 + \nu_0 N + V \quad (1.1)$$

dove gli operatori T , N e V sono definiti in (2.3) (la costante di Planck \hbar e' stata scelta uguale ad 1) ed α_0 e ν_0 sono due parametri liberi della teoria. Sia $\beta = \frac{1}{k_B T}$, dove k_B e' la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta del sistema. Sia ν_h la costante corrente che controlla la posizione della superficie di Fermi al variare della scala di lunghezza $(p_F \gamma^h)^{-1}$, dove p_F e' l' impulso di Fermi ($p_F = \sqrt{2m\mu}$). La funzione beta, quale funzione che descrive il flusso di ν_h , e' una funzione analitica delle costanti iniziali α_0 ,

λ_0 e delle stesse ν_j su scale piu' corte ($h+1 \leq j \leq 0$), sotto la condizione:

$$1.2 \quad \sup_{h+1 \leq j \leq 0} \max\{|\nu_j|, |\alpha_0|, |\lambda_0|\} \leq \varepsilon \quad (1.2)$$

per ε abbastanza piccola. In particolare, sotto queste ipotesi, esiste una costante C tale che la somma dei moduli di tutti i coefficienti di ordine n dello sviluppo di Taylor della funzione beta rispetto a ν_j $h+1 \leq j \leq 0$, α_0 e λ_0 e' maggiorata da

$$1.2a \quad C^n \varepsilon^n (\log \beta)^{n-1} \quad (1.3)$$

Il teorema enunciato sopra e' equivalente al Teorema 6.3 dimostrato nel Capitolo 6 (abbiamo preferito riportare qui una versione del teorema leggibile senza bisogno di conoscere il formalismo usato nel resto del lavoro).

Nel Capitolo 7 estendiamo l' analisi del Capitolo 6 allo studio della funzione di correlazione a due punti. Si ottiene il risultato aspettato. Piu' esattamente si trova una stima della temperatura critica, con la giusta dipendenza da λ , al di sopra della quale la funzione di correlazione a due punti esiste, e' analitica, e decade all' infinito piu' veloce di ogni potenza, su scala $\beta = \frac{1}{k_B T}$ (k_B e' la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta del sistema). Il risultato principale del Capitolo 7 e' riassunto nel Teorema 7.1, il cui enunciato riportiamo qui sotto.

TEOREMA 7.1 *Consideriamo il sistema descritto dall' hamiltoniana*

$$1.4 \quad H = (1 + \alpha_0)(T - \mu N) + \nu_0 N + V \equiv (1 + \alpha_0)H_0 + \nu_0 N + V \quad (1.4)$$

dove gli operatori T , N e V sono definiti in (2.3) (dove la costante di Planck \hbar e' stata scelta uguale ad 1), α_0 e ν_0 sono due parametri liberi della teoria, e il potenziale chimico μ e' fissato a qualche valore > 0 .

Supponiamo che l' intensita' del potenziale a due corpi λ_0 contenuta nell' operatore V soddisfi alla proprieta'

$$1.5 \quad |\lambda_0| \leq \varepsilon \quad (1.5)$$

per qualche costante ε . Siano: $v_0 \equiv \frac{p_F}{m}$ la velocita' alla superficie di Fermi; p_0^{-1} la portata del potenziale λ_0 (vedi §2.1); $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$, dove k_B e' la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta del sistema; T l' operatore di ordinamento temporale fermionico (vedi definizione nelle righe seguenti la (2.8)); $S(x-y)$ la funzione di Schwinger interagente

$$1.6 \quad S(x-y) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\text{Tre}^{-\beta H} \mathbf{T}\{\psi_x^- \psi_y^+\}}{\text{Tre}^{-\beta H}}; \quad (1.6)$$

$S_0(x-y)$ la funzione di Schwinger libera

$$1.7 \quad S_0(x-y) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\text{Tre}^{-\beta H_0} \mathbf{T}\{\psi_x^- \psi_y^+\}}{\text{Tre}^{-\beta H_0}}. \quad (1.7)$$

Allora esistono una costante C e delle scelte di α_0, ν_0 tali che $\max\{|\alpha_0|, |\nu_0|\} \leq \varepsilon$, per cui, se la temperatura del sistema T e' maggiore della temperatura

$$1.8 \quad T_c = \frac{v_0 p_0}{k_B} e^{-\frac{1}{C\varepsilon}} \quad (1.8)$$

allora la funzione di correlazione a due punti $S(x)$ e' data da

$$1.9 \quad S(x) = S_0(x) + \frac{A(\varepsilon, x)}{1 + |x|} \quad (1.9)$$

14 GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE PER UN SISTEMA DI FERMIONI INTERAGENTI IN DUE DIMENSIONI

dove la funzione $A(\varepsilon, x)$ gode della seguente proprieta': esiste una funzione $B(\varepsilon, \beta^{-1}|x|)$, limitata, $o(\varepsilon)$, che decade all' infinito nell' argomento $\beta^{-1}|x|$ piu' veloce di ogni potenza ed e' tale che $|A(\varepsilon, x)| \leq B(\varepsilon, \beta^{-1}|x|)$.

Si noti ancora che T_c della (1.8) non e' la temperatura critica fisica del sistema, che d' ora in poi chiameremo sempre T_{BCS} , bensì e' una sua stima.

Alla fine del Capitolo 7 discutiamo la possibilita' di distinguere tra un comportamento del sistema "di tipo Fermi" o "di tipo Luttinger" (le virgolette vogliono sottolineare che a temperatura finita non e' definito a rigore cosa significhi che il sistema si comporti come un liquido di Fermi di Luttinger; introduciamo una nozione di questo tipo nelle Definizioni 7.3 e 7.4). Ci accorgiamo di non essere in grado di distinguere tra i due comportamenti. Nel lavoro [DR2] si sostiene che il sistema in questione (che e' lo stesso studiato in questa tesi) si comporti come un liquido di Fermi. Noi non siamo riusciti a verificare questa affermazione.

Infine nelle Appendici sono riportate molte dimostrazioni e discussioni tecniche. Alcune di esse sono risultati standard della teoria del gruppo di rinormalizzazione per fermioni e sono prese essenzialmente da [GM]. Altre sono dimostrazioni originali. In particolare l' Appendice 7 contiene la dimostrazione di un Teorema dovuto originariamente a Feldman-Magnen-Rivasseau-Trubowitz. Poiche' pero' la loro versione della dimostrazione [FMRT] era particolarmente sintetica, abbiamo aggiunto tutti i dettagli necessari a renderla completa ed autoconsistente.

sec.2

2. Il modello. Tecniche e problemi.

p.2.1

2.1. Presentazione del modello.

Il sistema che vogliamo studiare é un sistema di fermioni identici in due dimensioni, interagenti secondo un potenziale a due corpi $\lambda_0 v(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, a corta portata (lo supporremo di classe C^∞ e a supporto compatto, $v(\mathbf{r}) = 0$ per $|\mathbf{r}| > p_0^{-1}$, dove p_0 é la portata dell' interazione), tale che $\int d\mathbf{x} |v(\mathbf{x})| = 1$ e invariante per rotazioni. Inoltre supporremo il potenziale v indipendente dallo spin delle particelle; per semplicitá quindi non introdurremo affatto un indice di spin negli operatori di campo fermionici, tanto le espressioni delle osservabili del sistema cambierebbero solo per una costante moltiplicativa (corrispondente alla degenerazione dei livelli energetici dovuta alla presenza dello spin). Supporremo il sistema chiuso in un contenitore Ω , cubico di lato L con condizioni periodiche al bordo. Descriveremo il sistema di fermioni nell' insieme gran canonico, quindi, al momento di realizzare il limite termodinamico $L \rightarrow \infty$, fisseremo, piuttosto che la densitá di particelle, il potenziale chimico del sistema.

Possiamo scrivere l' hamiltoniana complessiva del sistema nella forma:

$$2.1 \quad H = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-(1 + \alpha) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial_{\mathbf{x}_i}^2}{2m} - \mu + \nu \right) + \sum_{i < j=1}^n \lambda_0 v(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right] \quad (2.1)$$

dove m é la massa delle particelle, μ é il potenziale chimico "nudo", i coefficienti α e ν sono parametri liberi che ci serviranno a fissare le costanti fisiche del problema interagente a dei valori prefissati, e dove le unitá di misura sono state scelte in modo tale che la costante di Planck \hbar sia uguale ad 1.

E' possibile (ed é conveniente) scrivere l' hamiltoniana del sistema nel formalismo della seconda quantizzazione [L3]. Si trova che

$$2.1a \quad H = (1 + \alpha)T - (\mu - \nu)N + V \quad (2.2)$$

dove gli operatori T , N e V sono definiti come segue:

$$2.2 \quad \begin{aligned} T &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_L} \frac{\mathbf{k}^2}{2m} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^- \equiv \int_{\Omega} d\mathbf{x} \psi_{\mathbf{x}}^+ \left(-\frac{\partial_{\mathbf{x}}^2}{2m} \right) \psi_{\mathbf{x}}^- \\ N &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_L} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^- \equiv \int_{\Omega} d\mathbf{x} \psi_{\mathbf{x}}^+ \psi_{\mathbf{x}}^- \\ V &= \int_{\Omega} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \psi_{\mathbf{x}}^+ \psi_{\mathbf{y}}^+ \lambda_0 v(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi_{\mathbf{y}}^- \psi_{\mathbf{x}}^- \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove:

- (1) gli operatori $\psi_{\mathbf{x}}^{\pm}$ sono gli operatori di campo fermionici;
- (2) gli operatori $a_{\mathbf{k}}^{\pm}$ sono gli operatori di creazione e distruzione, legati agli operatori di campo $\psi_{\mathbf{x}}^{\pm}$ dalla relazione $\psi_{\mathbf{x}}^{\pm} = L^{-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_L} a_{\mathbf{k}}^{\pm} e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{x}}$;
- (3) l' insieme \mathcal{D}_L é definito come segue:

$$2.0 \quad \mathcal{D}_L \equiv \left\{ \mathbf{k} = \frac{2\pi\mathbf{n}}{L} \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (2.4)$$

E' possibile scrivere nel formalismo della seconda quantizzazione gli operatori corrispondenti a tutti i possibili osservabili fisici. E' facile allora rendersi conto che i valori medi delle osservabili possono essere tutti espressi in termini delle funzioni di correlazione a $2n$ punti:

$$2.3 \quad \frac{\text{Tre}^{-\beta H} \psi_{\mathbf{x}_1}^+ \cdots \psi_{\mathbf{x}_n}^+ \psi_{\mathbf{x}_{n+1}}^- \cdots \psi_{\mathbf{x}_n}^-}{\text{Tre}^{-\beta H}} \quad (2.5)$$

dove β é l' inverso della temperatura del sistema (piú precisamente della temperatura assoluta moltiplicata per la costante di Boltzmann k_B , che noi per comodità porremo uguale ad 1).

Facciamo alcuni esempi espliciti importanti:

(a) Il numero di occupazione $n_{\mathbf{k}}$ é uguale al valor medio dell' operatore $a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^-$, e quindi si puó calcolare come la trasformata di Fourier della funzione di correlazione a due punti $\frac{\text{Tr} e^{-\beta H} \psi_{\mathbf{x}_1}^+ \psi_{\mathbf{x}_2}^-}{\text{Tr} e^{-\beta H}}$.

(b) La risposta lineare a campi esterni in condizioni di equilibrio é banalmente connessa con le funzioni di correlazione a due e quattro punti. Consideriamo il sistema con hamiltoniana $H - \int_{\Omega} h(\mathbf{y}) \rho(\mathbf{y})$, dove $\rho(\mathbf{x}) \equiv \psi_{\mathbf{x}}^+ \psi_{\mathbf{x}}^-$ é l' operatore densità di particelle e dove $h(\mathbf{x})$ é un campo esterno. Vogliamo studiare come cambia la densità di particelle nel punto \mathbf{x} come conseguenza dell' accensione del campo $h(\mathbf{x})$. Quando il campo é acceso il valore della densità nel punto \mathbf{x} é

$$2.3a \quad \frac{\text{Tr} e^{-\beta H + \beta \int_{\Omega} d\mathbf{y} h(\mathbf{y}) \rho(\mathbf{y})} \psi_{\mathbf{x}}^+ \psi_{\mathbf{x}}^-}{\text{Tr} e^{-\beta H + \beta \int_{\Omega} d\mathbf{y} h(\mathbf{y}) \rho(\mathbf{y})}} \quad (2.6)$$

La risposta lineare $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é uguale al valore della derivata funzionale della densità nel punto \mathbf{x} rispetto al campo h nel punto \mathbf{y} , calcolata all' equilibrio ($h(\mathbf{x}) \equiv 0$), e divisa per β . Un calcolo esplicito mostra che

$$2.3b \quad \chi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y}) \rangle - \langle \rho(\mathbf{x}) \rangle \langle \rho(\mathbf{y}) \rangle \quad (2.7)$$

dove il simbolo di media $\langle \cdot \rangle$ sta a significare $\frac{\text{Tr} e^{-\beta H} \cdot}{\text{Tr} e^{-\beta H}}$.

Le informazioni fisiche sul sistema si possono allora ottenere una volta note le funzioni di correlazione. Preferiremo studiare, piuttosto che le funzioni di correlazione definite come nella (2.5), le funzioni di Schwinger, ossia le funzioni di correlazione generalizzate a tempi immaginari diversi da 0:

$$2.4 \quad S(x_1, \sigma_1; \dots x_{2n}, \sigma_{2n}) \equiv \frac{\text{Tr} e^{-\beta H} \mathbf{T} \{ \psi_{x_1}^{\sigma_1} \dots \psi_{x_{2n}}^{\sigma_{2n}} \}}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \quad (2.8)$$

dove con x_i si intende il 3-vettore $x_i \equiv (t_i, \mathbf{x}_i)$, $0 \leq t_i \leq \beta$, \mathbf{T} é l' operatore di ordinamento temporale fermionico (scelto in modo da produrre un ordinamento temporale decrescente), $\sigma_i = \pm$, $\sum_{i=1}^{2n} \sigma_i = 0$ e dove, infine, $\psi_{x_i}^{\sigma_i}$ sono gli operatori di Matsubara: $\psi_{x_i}^{\sigma_i} \equiv e^{t_i H} \psi_{\mathbf{x}_i}^{\sigma_i} e^{-t_i H}$.

Per quanto detto sopra, conoscere le funzioni di Schwinger a tempi qualsiasi vuol dire conoscere "piú del necessario" (le osservabili fisiche del sistema all' equilibrio sono legate alle funzioni di Schwinger a tempi nulli); introdurle é però conveniente perché rende la teoria piú "covariante" e le grandezze introdotte in seguito hanno una formulazione piú naturale (in particolare risulterà piú naturale la formulazione funzionale del problema in termini di una teoria di campo fermionica). Inoltre sarebbe possibile risalire dalle funzioni di Schwinger alle funzioni di correlazioni temporali (ossia alle funzioni di correlazione definite come in (2.8), ma in cui, al posto degli operatori di Matsubara, si usino gli operatori di campo in rappresentazione di Heisenberg); vedi [L9], §37 per una discussione su questo punto. Nel nostro lavoro non avremo mai bisogno di funzioni di correlazioni temporali, quindi studieremo le funzioni di Schwinger con l' idea di porre alla fine, eventualmente, $t_i \equiv 0$.

p.2.2 **2.2.La teoria libera**

Il modello introdotto nel paragrafo precedente é esattamente risolubile nel caso in cui $\lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$ e $\alpha = \nu = 0$. In questo caso il modello é detto *gas di Fermi*. Calcoliamone esplicitamente gli autostati e le funzioni di Schwinger.

L' hamiltoniana del sistema adesso é $H_0 = T - \mu N$ e, se la pensiamo nella forma (2.1), é la somma di N termini di singola particella. La funzione d' onda del sistema ad un numero fissato di particelle é un

determinante di Slater di N funzioni d' onda di singola particella. Una possibile base ortonormale per le funzioni d' onda di singola particella é l' insieme delle onde piane con impulsi $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_L$, vedi (2.4). Nel formalismo della seconda quantizzazione gli autostati del sistema sono descritti assegnando il numero N di particelle e gli N impulsi corrispondenti. L' autovalore associato allo stato $|\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N\rangle$ é semplicemente $\sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{k}_i^2}{2m} - \mu \right)$.

Incominciamo con il calcolare la funzione di Schwinger a due punti

$$2.5 \quad S(x_1, -; x_2, +) = \begin{cases} \langle \psi_{x_1}^- \psi_{x_2}^+ \rangle & t_1 > t_2 \\ -\langle \psi_{x_2}^+ \psi_{x_1}^- \rangle & t_1 \leq t_2 \end{cases} \quad (2.9)$$

dove il motivo per cui si sceglie che $S(x_1, -; x_2, +) = -\langle \psi_{x_2}^+ \psi_{x_1}^- \rangle$ quando $t_1 = t_2$ risulterà chiaro in seguito, quando descriveremo la teoria perturbativa (per adesso é una scelta arbitraria).

Scriviamo ψ_x^\pm in termini della sua trasformata di Fourier:

$$2.6 \quad \begin{aligned} \psi_x^\pm &= e^{t \sum_{\mathbf{q}} e(\mathbf{q}) a_{\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{q}}^-} L^{-1} \sum_{\mathbf{k}} e^{\pm i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{k}}^\pm e^{-t \sum_{\mathbf{q}} e(\mathbf{q}) a_{\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{q}}^-} = \\ &= L^{-1} \sum_{\mathbf{k}} e^{te(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^-} e^{\pm i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{k}}^\pm e^{-te(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^-} = L^{-1} \sum_{\mathbf{k}} e^{\pm i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{\pm te(\mathbf{k})} a_{\mathbf{k}}^\pm \equiv L^{-1} \sum_{\mathbf{k}} e^{\pm i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{k}, t}^\pm \end{aligned} \quad (2.10)$$

dove $e(\mathbf{k}) \equiv \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu$ e dove si sono usate le regole di anticommutazione degli operatori di creazione e distruzione fermionici (in particolare nel penultimo passaggio si é usato che, per $\mathbf{q} \neq \mathbf{k}$, $[a_{\mathbf{k}}^\pm, a_{\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{q}}^-] = 0$ e nell' ultimo passaggio si é usato che $a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^+ = a_{\mathbf{k}}^- a_{\mathbf{k}}^- = 0$ e $(a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^-)^n a_{\mathbf{k}}^+ = a_{\mathbf{k}}^+$). Il valor medio di $a_{\mathbf{k}_2, t_2}^+ a_{\mathbf{k}_1, t_1}^-$ é diverso da zero solo se $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. In questo caso, usando il fatto che la funzione d' onda globale del sistema si fattorizza in funzioni d' onda di singola particella, abbiamo che

$$2.7 \quad \langle a_{\mathbf{k}, t_2}^+ a_{\mathbf{k}, t_1}^- \rangle = \frac{\sum_E \langle E | e^{-\beta H_0 + (t_2 - t_1) H_0} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^- | E \rangle}{\sum_E \langle E | e^{-\beta H_0} | E \rangle} \quad (2.11)$$

dove lo stato $|E\rangle$ é uno stato di singola particella e quindi puó essere solo $|0\rangle$ (ossia tale che $a_{\mathbf{k}}^- |0\rangle = 0$) o $|1\rangle$ (ossia tale che $a_{\mathbf{k}}^+ |1\rangle = 0$). E' immediato verificare che dalla (2.11) segue che

$$2.8 \quad \langle a_{\mathbf{k}, t_2}^+ a_{\mathbf{k}, t_1}^- \rangle = \frac{e^{-\beta e(\mathbf{k})} e^{(t_2 - t_1) e(\mathbf{k})}}{1 + e^{-\beta e(\mathbf{k})}} \quad (2.12)$$

Dalle regole di anticommutazione di $a_{\mathbf{k}}^+$ con $a_{\mathbf{k}}^-$ segue poi che

$$2.9 \quad \langle a_{\mathbf{k}, t_1}^- a_{\mathbf{k}, t_2}^+ \rangle = \frac{e^{-(t_1 - t_2) e(\mathbf{k})}}{1 + e^{-\beta e(\mathbf{k})}} \quad (2.13)$$

A questo punto la funzione di Schwinger a due punti é semplicemente

$$2.10 \quad S(x_1, -; x_2, +) \equiv g(\mathbf{x}, t) = L^{-2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_L} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left(\chi(t > 0) \frac{e^{-te(\mathbf{k})}}{1 + e^{-\beta e(\mathbf{k})}} - \chi(t \leq 0) \frac{e^{-\beta e(\mathbf{k})} e^{-te(\mathbf{k})}}{1 + e^{-\beta e(\mathbf{k})}} \right) \quad (2.14)$$

dove $x = x_1 - x_2$ e la funzione χ (condizione) é uguale a uno se la condizione é verificata e zero altrimenti.

Un modo conveniente di riscrivere la (2.14) é il seguente:

$$2.11 \quad g(\mathbf{x}, t) = L^{-2} \beta^{-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_L} \sum_{k_0 \in \mathcal{D}_\beta} \frac{e^{-i(k_0(\tau + 0^-) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}}{-i k_0 + e(\mathbf{k})} \quad (2.15)$$

dove l' insieme \mathcal{D}_β é definito come segue:

$$2.12 \quad \mathcal{D}_\beta \equiv \left\{ k_0 = \frac{2\pi}{\beta} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (2.16)$$

Verifichiamo che la (2.14) e la (2.15) sono equivalenti (per $-\beta < t \leq \beta$):

$$2.13 \quad \begin{aligned} (2.15) &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - e(\mathbf{k})(t+0^-)} e^{(-ik_0 + e(\mathbf{k}))(t+0^-)}}{L^2 \beta} = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - e(\mathbf{k})(t+0^-)}}{L^2 \beta} \left(\int_{-\infty}^{t+0^-} d\tau e^{(-ik_0 + e(\mathbf{k}))\tau} \chi(e(\mathbf{k}) > 0) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{t+0^-}^{\infty} d\tau e^{(-ik_0 + e(\mathbf{k}))\tau} \chi(e(\mathbf{k}) < 0) + \frac{1}{2} \int_{t+0^- - \beta}^{t+0^-} d\tau e^{-ik_0\tau} \chi(e(\mathbf{k}) = 0) \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ora si può notare che

$$2.14 \quad \frac{1}{\beta} \sum_{k_0 \in \mathcal{D}_\beta} e^{-ik_0\tau} = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{\beta}\tau} e^{-i\frac{2\pi}{\beta}n\tau} = e^{-i\frac{\pi}{\beta}\tau} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - j\beta) \quad (2.18)$$

dove le uguaglianze sono intese nel senso delle distribuzioni. Sostituendo la (2.18) nella (2.17) e supponendo che $\bar{j}\beta < t + 0^- < (\bar{j} + 1)\beta$, si trova

$$2.15 \quad \begin{aligned} (2.15) &= \frac{1}{L^2} \sum_{\mathbf{k}} \chi(e(\mathbf{k}) > 0) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - e(\mathbf{k})(t+0^-)} \sum_{j=-\infty}^{\bar{j}} \left(-e^{e(\mathbf{k})\beta} \right)^j - \\ &\quad - \frac{1}{L^2} \sum_{\mathbf{k}} \chi(e(\mathbf{k}) < 0) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - e(\mathbf{k})(t+0^-)} \sum_{j=\bar{j}+1}^{\infty} \left(-e^{e(\mathbf{k})\beta} \right)^j + \\ &\quad + \frac{1}{L^2} \sum_{\mathbf{k}} \chi(e(\mathbf{k}) = 0) \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - e(\mathbf{k})(t+0^-)}}{1 + e^{-\beta e(\mathbf{k})}} (-1)^{\bar{j}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ma dato che stiamo supponendo che $-\beta < t + 0^- < \beta$ abbiamo solo due possibilit : se $t \leq 0$ $\bar{j} = -1$, altrimenti $\bar{j} = 0$.

Allora la (2.15) é ancora uguale a

$$2.16 \quad \begin{aligned} &\frac{1}{L^2} \sum_{\mathbf{k}} \chi(t > 0) \left(\chi(e(\mathbf{k}) > 0) \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - e(\mathbf{k})(t+0^-)}}{1 + e^{-\beta e(\mathbf{k})}} + \right. \\ &\quad \left. + \chi(e(\mathbf{k}) < 0) \frac{e^{\beta e(\mathbf{k})} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - e(\mathbf{k})(t+0^-)}}{1 + e^{\beta e(\mathbf{k})}} + \chi(e(\mathbf{k}) = 0) \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - e(\mathbf{k})(t+0^-)}}{1 + e^{-\beta e(\mathbf{k})}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{L^2} \sum_{\mathbf{k}} \chi(t \leq 0) \left(\chi(e(\mathbf{k}) > 0) \frac{-e^{-\beta e(\mathbf{k})} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - e(\mathbf{k})(t+0^-)}}{1 + e^{-\beta e(\mathbf{k})}} + \right. \\ &\quad \left. + \chi(e(\mathbf{k}) < 0) \frac{-e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - e(\mathbf{k})(t+0^-)}}{1 + e^{\beta e(\mathbf{k})}} - \chi(e(\mathbf{k}) = 0) \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - e(\mathbf{k})(\beta + t + 0^-)}}{1 + e^{-\beta e(\mathbf{k})}} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

e quest' ultima espressione é chiaramente equivalente alla (2.14) (per convincersene basta sommare tra loro i termini tra parentesi, che moltiplicano rispettivamente $\chi(t > 0)$ e $\chi(t \leq 0)$).

Nel caso in cui fossimo interessati al limite di volume infinito o di temperatura nulla l' espressione di $g(\mathbf{x}, t)$ nella forma (2.15) cambierebbe soltanto perché le sommatorie diventerebbero integrali:

$$2.17 \quad \frac{1}{L^2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \quad (2.21)$$

$$2.18 \quad \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}_\beta} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \int \frac{dk_0}{2\pi} \quad (2.22)$$

Piú avanti useremo spesso le espressioni continue corrispondenti ai limiti di volume infinito e temperatura nulla, sia perché é interessante studiare il comportamento del sistema in questi limiti, sia per comoditá, poiché la maggior parte delle stime e degli argomenti che useremo saranno uniformi nel volume e nella temperatura. Per questo motivo useremo indifferentemente il simbolo di integrale per indicare formalmente o la sommatoria o l' integrale vero e proprio; quando ci sará perdita di uniformitá nelle stime e non sará equivalente usare sommatorie o integrale, lo sottolineeremo esplicitamente.

Come spiegato nel paragrafo precedente, dalle funzioni di Schwinger a due punti é possibile calcolare la funzione di distribuzione dei numeri di occupazione $n_{\mathbf{k}}$. In particolare lo stato fondamentale del gas di Fermi é descritto dalla funzione $n_{\mathbf{k}}$ calcolata a temperatura nulla. Ricordiamo la definizione di $n_{\mathbf{k}}$:

$$2.29 \quad n_{\mathbf{k}} \equiv \langle a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^- \rangle = - \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} g(\mathbf{x}, 0) \quad (2.23)$$

Dalla (2.15) troviamo allora

$$2.30 \quad n_{\mathbf{k}} = - \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 0^-}}{-ik_0 + e(\mathbf{k})} = \chi(e(\mathbf{k}) < 0) + \frac{1}{2} \chi(e(\mathbf{k}) = 0) \quad (2.24)$$

dove nell' ultimo passaggio si é usata la tecnica dei residui per calcolare l' integrale in $\frac{dk_0}{2\pi}$ (che é un vero integrale tra $-\infty$ e ∞ dato che stiamo supponendo che la temperatura sia nulla). La distribuzione in (2.24) é nota come *distribuzione di Fermi*. La condizione $e(\mathbf{k}) < 0$ implica che $|\mathbf{k}| < \sqrt{2m\mu}$; quindi lo stato fondamentale é quello in cui sono occupati tutti i livelli energetici corrispondenti ad impulsi contenuti nella *sfera di Fermi*, che é la sfera nello spazio degli impulsi di raggio $\sqrt{2m\mu} \equiv p_F$, dove p_F é l' *impulso di Fermi*. Vediamo che, perché lo stato non sia banale, μ deve essere positivo; inoltre vediamo che, come giusto, fissare il potenziale chimico equivale a fissare il numero di particelle (in questo caso speciale non é neanche necessario eseguire il limite termodinamico per verificare l' equivalenza delle due scelte). In seguito decideremo di fissare $\mu > 0$ anche per il sistema interagente, e sceglieremo il parametro libero ν in modo tale che l' impulso di Fermi della teoria interagente sia lo stesso della corrispondente teoria libera (vedi il prossimo paragrafo per una definizione di "impulso di Fermi" nel caso interagente e per maggiori dettagli su questo punto).

Rimangono da calcolare le funzioni di Schwinger a piú punti. In realtá non é necessario calcolarle esplicitamente, poiché si possono ottenere dalle funzioni a due punti $g(\mathbf{x}, t)$ con la *regola di Wick*, che é la seguente: il valor medio del prodotto di $2n$ campi rispetto alla distribuzione di probabilitá indotta dall' hamiltoniana H_0 é uguale a

$$2.19 \quad \langle \prod_{i=1}^{2n} \psi_{\mathbf{x}_i, t_i}^{\sigma_i} \rangle = \sum' (-1)^\pi \prod_{i=0}^{n-2} \langle \psi_{x_{\pi(2i+1)}}^{\sigma_{\pi(2i+1)}} \psi_{x_{\pi(2i+2)}}^{\sigma_{\pi(2i+2)}} \rangle \quad (2.25)$$

dove $\sigma_i = \pm 1$, \sum' é la somma sui $\frac{(2n)!}{2^n}$ modi di estrarre n coppie dai $2n$ campi, π é una permutazione che manda la configurazione iniziale in una tale che i campi appartenenti ad una coppia siano adiacenti e nello stesso ordine relativo in cui comparivano nella configurazione iniziale, e $(-1)^\pi$ é il segno di questa permutazione.

Dimostriamo che vale la regola di Wick. Notiamo che basta mostrare che é valida per il valor medio di un prodotto di operatori $a_{\mathbf{k}}^{\sigma_i}$ tutti relativi ad uno stesso stato di singola particella \mathbf{k} ; infatti se é valida in questo caso é valida anche per un prodotto di operatori $a_{\mathbf{k}_i}^{\sigma_i}$ relativi a stati qualsiasi di singola particella \mathbf{k}_i , poiché i valori medi si fattorizzano; inoltre se é valida per un prodotto qualsiasi di operatori $a_{\mathbf{k}_i}^{\sigma_i}$ é valida anche per un prodotto qualsiasi di operatori $\psi_{\mathbf{x}_i}^{\sigma_i}$, che sono una loro combinazione lineare. Notiamo anche che per dimostrarla non é necessario supporre che gli operatori di creazione e distruzione abbiano una dipendenza temporale, poiché abbiamo visto sopra che la dipendenza temporale degli operatori $a_{\mathbf{k}}^{\pm}$ é realizzata attraverso un numero ($e^{\pm e(\mathbf{k})t}$) e quindi esce fuori dall' operazione di valor medio.

Consideriamo allora il valor medio

$$2.20 \quad \langle a_{\mathbf{k}}^{\sigma_1} \cdots a_{\mathbf{k}}^{\sigma_{2n}} \rangle \quad (2.26)$$

dove $\sigma_1, \dots, \sigma_n = +$ e $\sigma_{n+1}, \dots, \sigma_{2n} = -$, con $n > 1$. La (2.26) é sicuramente nulla poiché $a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^+ = a_{\mathbf{k}}^- a_{\mathbf{k}}^- = 0$. Per essa é valida la regola di Wick, poiché per ogni contrazione dei $2n$ operatori in n coppie, che non sia identicamente nulla (ossia che non contenga contrazioni tra due $a_{\mathbf{k}}^+$ o tra due $a_{\mathbf{k}}^-$), esiste un' altra contrazione la cui corrispondente permutazione ha il segno opposto; per convincersene basta considerare, per ogni data contrazione, la contrazione ottenuta scambiando tra loro gli operatori di distruzione contratti con i primi due operatori di creazione. Quindi per ogni configurazione di $2n$ operatori $a_{\mathbf{k}}^+$ e $a_{\mathbf{k}}^-$ (tale che ci siano n operatori $a_{\mathbf{k}}^+$ e n operatori $a_{\mathbf{k}}^-$) esiste almeno una permutazione per cui la regola di Wick é valida. Supponiamo ora induttivamente che la regola di Wick sia valida per un prodotto di $2k - 2$ operatori; consideriamo allora un prodotto di $2k$ operatori ed individuiamo in esso una coppia di operatori $a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^-$ adiacenti tra loro:

$$2.21 \quad \langle \cdots a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^- \cdots \rangle \quad (2.27)$$

Usando la regola di anticommutazione tra operatori di creazione e distruzione si ha che la (2.27) é uguale a:

$$2.22 \quad \langle \cdots 1 \cdots \rangle - \langle \cdots a_{\mathbf{k}}^- a_{\mathbf{k}}^+ \cdots \rangle \quad (2.28)$$

Ora per il primo addendo della (2.28) la regola di Wick é supposta valida. D' altra parte se si sviluppa il secondo addendo secondo la regola di Wick si trova che differisce dallo sviluppo della (2.27) proprio per il termine $\langle \cdots 1 \cdots \rangle \langle a_{\mathbf{k}}^- a_{\mathbf{k}}^+ \rangle$, che nella (2.27) é sostituito dal termine $\langle \cdots 1 \cdots \rangle \langle a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^- \rangle$. Quindi é chiaro che la regola di Wick per il secondo addendo della (2.28) é valida se e solo se é valida per la (2.27). Più in generale se la regola di Wick é valida per una qualche configurazione dei $2k$ operatori, é valida anche per tutte le sue permutazioni. Dato che noi sappiamo che é valida per una configurazione speciale (*ordinamento normale*) é valida per tutte. Induttivamente si trova che la regola di Wick é valida (chiaramente é valida al primo passo, per $k = 1$).

Abbiamo concluso il calcolo delle funzioni di Schwinger della teoria libera e possiamo ora affrontare il calcolo (perturbativo) delle funzioni di Schwinger interagenti.

p.2.3 2.3.La teoria perturbativa

Vogliamo calcolare le funzioni di Schwinger della teoria interagente

$$2.25 \quad S(x_1, \sigma_1; \cdots x_{2n}, \sigma_{2n}) \equiv \frac{\text{Tr}(-1)^\pi e^{-\beta H} \psi_{x_{\pi(1)}}^{\sigma_{\pi(1)}} \cdots \psi_{x_{\pi(2n)}}^{\sigma_{\pi(2n)}}}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \quad (2.29)$$

come serie formali nei parametri dell' interazione ($\alpha, \nu, \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y})$). (Nella (2.29) π é la permutazione generata dall' operatore di ordinamento temporale, vedi (2.8)).

Usiamo la rappresentazione:

$$2.23 \quad e^{-t(H_0 + H_I)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{-\frac{t}{n} H_0} \left(1 - \frac{t}{n} H_I \right) \right]^n \quad (2.30)$$

dove H_I nel nostro caso é uguale a

$$2.24 \quad H_I = \alpha T + \nu N + V \quad (2.31)$$

vedi (2.1).

Sostituendo la (2.31) nel numeratore della (2.29) otteniamo:

$$2.26 \quad \sum_{p_1, \dots, p_{2n+1}} \int \text{Tre}^{-\beta H_0} [-H_I(t'_1)] \cdots [-H_I(t'_{p_1-1})] \psi_{\mathbf{x}_{\pi(1)}, t'_{p_1}}^{\sigma_{\pi(1)}} \cdots \psi_{\mathbf{x}_{\pi(2n)}, t'_{p_1+\dots+p_{2n}}}^{\sigma_{\pi(2n)}} \cdots [-H_I(t'_{p_1+\dots+p_{2n+1}})] dt' \quad (2.32)$$

dove $H_I(t) = e^{tH_0} H_I e^{-tH_0}$, p_1, \dots, p_{2n+1} sono interi nonnegativi, l' integrazione in dt' va eseguita sulle variabili t'_j $j \neq p_1, p_1+p_2, \dots, p_1+p_2+\dots+p_{2n}$ con i vincoli $\beta \geq t'_1 \geq \dots \geq t'_{p_1+\dots+p_{2n}} \geq 0$ e $t'_{p_1+\dots+p_i} \equiv t_{\pi(i)}$, vedi (2.29).

Analogamente si può scrivere lo sviluppo per il denominatore della (2.29) e allora, moltiplicando e dividendo per $\text{Tre}^{-\beta H_0}$ si trova che (2.29) é uguale alla seguente espressione:

$$2.27 \quad \frac{\sum_{p_1, \dots, p_{2n+1}} \int \langle [-H_I(t'_1)] \cdots [-H_I(t'_{p_1-1})] \psi_{\mathbf{x}_{\pi(1)}, t'_{p_1}}^{\sigma_{\pi(1)}} \cdots \psi_{\mathbf{x}_{\pi(2n)}, t'_{p_1+\dots+p_{2n}}}^{\sigma_{\pi(2n)}} \cdots [-H_I(t'_{p_1+\dots+p_{2n+1}})] \rangle dt'}{\sum_{p_1, \dots, p_{2n+1}} \int \langle [-H_I(t'_1)] \cdots [-H_I(t'_{p_1-1})] \cdots [-H_I(t'_{p_1+\dots+p_{2n+1}})] \rangle dt'} \quad (2.33)$$

dove le medie sono eseguite rispetto alla distribuzione di probabilità indotta dall' hamiltoniana libera e dove va notato che al denominatore non compaiono esplicitamente operatori di campo ψ .

Poiché H_I é una combinazione lineare di T , N e V , che sono tutti operatori che si possono scrivere come prodotti di operatori di campo ψ , le medie che compaiono nella (2.33) si possono calcolare con la regola di Wick. Il termine generico della (2.33) di ordine n_1 nell' interazione V , n_2 nell' interazione νN , n_3 nell' interazione αT , si può esprimere graficamente nel modo che segue.

Consideriamo gli *elementi di grafico* (o *vertici*) disegnati in Fig. 1.

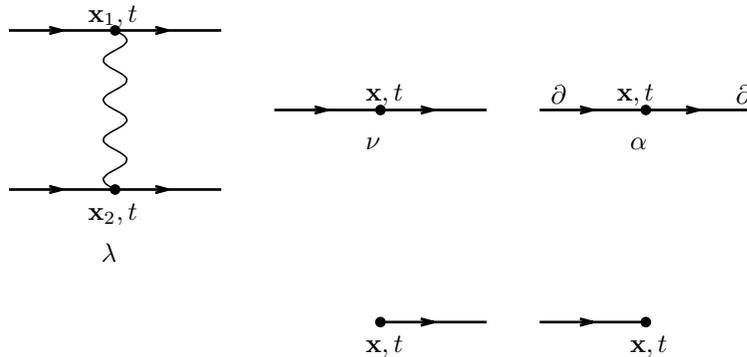


FIG. 1. Gli elementi di grafico con cui si può costruire un' espansione perturbativa delle funzioni di Schwinger interagenti. Gli elementi di tipo λ , ν e α corrispondono ai valori riportati rispettivamente nelle prime tre righe della (2.34). Le linee esterne (ossia i due elementi di grafico disegnati nella seconda riga di Fig. 1) corrispondono ai valori riportati rispettivamente nelle ultime due righe in (2.34).

Gli elementi di grafico in Fig. 1 rappresentano rispettivamente:

$$\begin{aligned}
 & -\lambda_0 v_0(x_1 - x_2) \psi_{\mathbf{x}_1, t_1}^+ \psi_{\mathbf{x}_2, t_2}^+ \psi_{\mathbf{x}_2, t_2}^- \psi_{\mathbf{x}_1, t_1}^- \\
 & -\nu \psi_{\mathbf{x}, t}^+ \psi_{\mathbf{x}, t}^- \\
 & \alpha \psi_{\mathbf{x}, t}^+ \frac{\partial^2}{2m} \psi_{\mathbf{x}, t}^- \\
 & \psi_{\mathbf{x}, t}^+ \\
 & \psi_{\mathbf{x}, t}^-
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

dove $v_0(x) \equiv v(\mathbf{x})\delta(x_0)$.

Disegniamo n_1 elementi di grafico di tipo λ , n_2 elementi di tipo ν , n_3 elementi di tipo α e $2n$ elementi degli ultimi due tipi (campi esterni). Attacciamo ad ognuno in essi contenuto un diverso indice \mathbf{x}, t ; chiamiamo *indici liberi* gli indici attaccati agli elementi λ, ν ed α , e *indici esterni* gli indici attaccati ai campi esterni; facciamo in modo che gli indici esterni siano esattamente quelli che compaiono nella (2.33). Consideriamo ora tutti i modi possibili di unire tra loro le mezze linee uscenti dai diversi elementi di grafico, in modo tale che le direzioni delle frecce delle mezze linee contratte siano uguali tra loro. Ognuno di questi modi corrisponde ad un insieme di linee chiamate *grafico* o *diagramma*. Per ragioni che saranno chiare piú avanti, chiameremo *grafico di Feynman* (o *diagramma di Feynman*) un grafico completamente connesso.

Ad ogni grafico Γ associamo un *segno* $\sigma(\Gamma) = \pm 1$, corrispondente al segno della permutazione necessaria a portare uno accanto all'altro i campi tra loro contratti, in modo che in ogni coppia il campo ψ^- si trovi alla sinistra del corrispondente campo ψ^+ .

Ad ogni linea ℓ contratta contenuta nel grafico Γ , i cui vertici sono indicizzati con \mathbf{x}_1, t_1 e \mathbf{x}_2, t_2 con il verso della freccia che va da \mathbf{x}_1, t_1 a \mathbf{x}_2, t_2 , assegnamo il valor medio del prodotto $\psi_{\mathbf{x}_2, t_2}^- \psi_{\mathbf{x}_1, t_1}^+$ che, come sappiamo, é uguale a $g(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2) \equiv g_\ell(x_\ell)$; chiameremo $g(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2)$ il *propagatore* del campo tra il punto x_1 e il punto x_2 . Se la linea $\ell = (x_1, x_2)$ va a finire su un vertice di tipo α assegnamo alla linea il valore $g_\ell(x_\ell) \equiv \frac{\partial^2}{2m} g(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2)$ piuttosto che il semplice propagatore.

Al grafico Γ assegnamo poi un valore $\text{Val}(\Gamma)$ definito nel modo seguente:

$$\text{Val}(\Gamma) \equiv \sigma(\Gamma) \prod_{\ell \in \Gamma \setminus \tilde{\Gamma}} g_\ell(x_\ell) \prod_{\ell \in \tilde{\Gamma}} v_0(x_\ell) \prod_v r_v \tag{2.35}$$

dove $\tilde{\Gamma}$ é l'insieme delle linee ondulate di Γ ed r_v é uguale a α se il vertice é di tipo α , a $-\nu$ se il vertice é di tipo ν e a $-\lambda_0$ se v é di tipo λ .

Consideriamo il valore $\text{Val}(\Gamma)$ di un grafico Γ di ordine $O(\Gamma) = (n_1, n_2, n_3)$, ossia di un grafico con n_1 vertici di tipo λ , n_2 di tipo ν ed n_3 di tipo α . Supponiamo poi che questo grafico Γ abbia n linee esterne di tipo $-$ ed n di tipo $+$. Chiaramente l'integrale sugli indici esterni del valore $\text{Val}(\Gamma)$ equivalgono a calcolare un termine di ordine (n_1, n_2, n_3) del numeratore della (2.33) usando la regola di Wick.

Notiamo che il denominatore della (2.33) equivale alla somma degli integrali sugli indici liberi dei valori di tutti i possibili grafici di vuoto. Quindi, se $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, si ha

$$(2.33) = \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\Gamma: o(\Gamma)=\mathbf{n}}' \int dx(I_{\mathbf{n}}) \text{Val}(\Gamma) \tag{2.36}$$

dove:

- (1) l'accento sulla seconda somma significa che bisogna sommare solo sui grafici che non contengono sottografici sconnessi di vuoto (questa restrizione equivale ad aver semplificato, grazie all'osservazione precedente la (2.36), il denominatore nella (2.33));
- (2) l'insieme $I_{\mathbf{n}}$ é l'insieme degli indici liberi associati al grafico;
- (3) l'integrale in $dx(I_{\mathbf{n}})$ é l'integrale su tutti gli indici liberi;

(4) i grafici che compaiono nella sommatoria in (2.36) hanno $2n$ campi esterni, indicizzati dalle stesse coordinate e segni dei campi che compaiono nella (2.33).

Sarà conveniente per lo sviluppo della teoria successiva cambiare leggermente la definizione degli operatori corrispondenti agli elementi di grafico α e ν . È piú comodo avere a che fare, piuttosto che con il laplaciano $\frac{\partial^2}{2m}$ che compare nel valore dell' elemento di grafico α , con l' operatore $\frac{\partial^2}{2m} + \frac{p_F^2}{2m}$, che in spazio k corrisponde all' operatore $-\frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \frac{p_F^2}{2m}$ (in pratica usando questo operatore piuttosto che il semplice laplaciano si sposta lo zero dell' energia sulla superficie di Fermi). Definiamo allora $\alpha_0 = \alpha$ e $\nu_0 = \nu + \mu\alpha$; l' hamiltoniana del problema si può scrivere nella forma

$$2.31 \quad H = (1 + \alpha_0)(T - \mu N) + \nu_0 N + V \equiv (1 + \alpha_0)H_0 + \nu_0 N + V \quad (2.37)$$

Possiamo allora ripetere la discussione fatta sopra per far corrispondere ad una funzione di Schwinger interagente una somma di grafici con una nuova definizione degli elementi di grafico; chiamiamo α_0 e ν_0 gli elementi di grafico che prima si chiamavano α e ν , pur continuandoli a rappresentare graficamente nello stesso modo, come in Fig. 1; associamo ad essi i valori:

$$2.31a \quad \begin{aligned} & -\nu_0 \psi_{\mathbf{x},t}^+ \psi_{\mathbf{x},t}^- \\ & \alpha_0 \psi_{\mathbf{x},t}^+ \left(\frac{\partial^2}{2m} + \frac{p_F^2}{2m} \right) \psi_{\mathbf{x},t}^- \end{aligned} \quad (2.38)$$

Il calcolo del valore del grafico si esegue esattamente come descritto sopra, con alcuni ovvi cambiamenti nei fattori da associare ai vertici e alle linee.

Nel seguito sarà anche comodo esprimere il valore di un grafico di Feynman direttamente in spazio k . A proposito definiamo

$$2.31b \quad \int dx(I_{\mathbf{n}}) \text{Val}(\Gamma) \equiv \int dx(I_{\mathbf{n}}) dk(I_{\mathbf{n}}) \tilde{\text{Val}}(\Gamma) \equiv \int dk(I_{\mathbf{n}}) e^{ik_{ext}x_{ext}} \hat{\text{Val}}(\Gamma) \quad (2.39)$$

dove: l' integrazione in $dk(I_{\mathbf{n}})$ è l' integrazione su tutti gli impulsi associati alle linee del grafico Γ ; il fattore $e^{ik_{ext}x_{ext}}$ va interpretato come il prodotto sui punti x_i associati ad indici esterni dei fattori $e^{\pm ik_i x_i}$, dove k_i è l' impulso della linea che converge in x_i , e \pm il segno associato alla linea. La funzione $\tilde{\text{Val}}(\Gamma)$ è funzione sia di $k(I_{\mathbf{n}})$ che di $x(I_{\mathbf{n}})$ ed è ottenuta trasformando secondo Fourier tutti i propagatori contenuti, secondo la definizione (2.35), in $\text{Val}(\Gamma)$. Quindi la dipendenza di $\tilde{\text{Val}}(\Gamma)$ dalle coordinate $x(I_{\mathbf{n}})$ è realizzata solo attraverso dei fattori della forma e^{ikx} . Integrando sulle $x(I_{\mathbf{n}})$ questi fattori forniscono una delta (di Dirac o di Kronecker a seconda se abbiamo o no realizzato il limite $\beta, L \rightarrow \infty$) per ogni vertice di Γ . Definiamo

$$2.31c \quad \begin{aligned} \hat{g}(k) & \equiv \frac{1}{-ik_0 + e(\mathbf{k})} \\ \hat{v}_0(k) & \equiv \int dx v_0(x) e^{ikx} \end{aligned} \quad (2.40)$$

e stabiliamo che, se k_ℓ è l' impulso associato alla linea ℓ , $\hat{g}_\ell(k_\ell)$ sia uguale a $\hat{g}(k_\ell)$ se ℓ entra in un vertice di tipo λ_0 o ν_0 , oppure sia uguale a $-e(\mathbf{k}_\ell)\hat{g}(k_\ell)$ se ℓ entra in un vertice di tipo α_0 . Allora è facile verificare che

$$2.31d \quad \hat{\text{Val}}(\Gamma) \equiv \sigma(\Gamma) \prod_{\ell \in \Gamma \setminus \tilde{\Gamma}} \hat{g}_\ell(k_\ell) \prod_{\ell \in \tilde{\Gamma}} \hat{v}_0(k_\ell) \prod_v r_v \prod_v \delta(\underline{k}_v) \quad (2.41)$$

dove $\delta(\underline{k}_v)$ è la delta di conservazione degli impulsi associata all' elemento di grafico v e r_v come al solito è uguale a α_0 se il vertice è di tipo α_0 , a $-\nu_0$ se il vertice è di tipo ν_0 ed a $-\lambda_0$ se il vertice è di tipo λ .

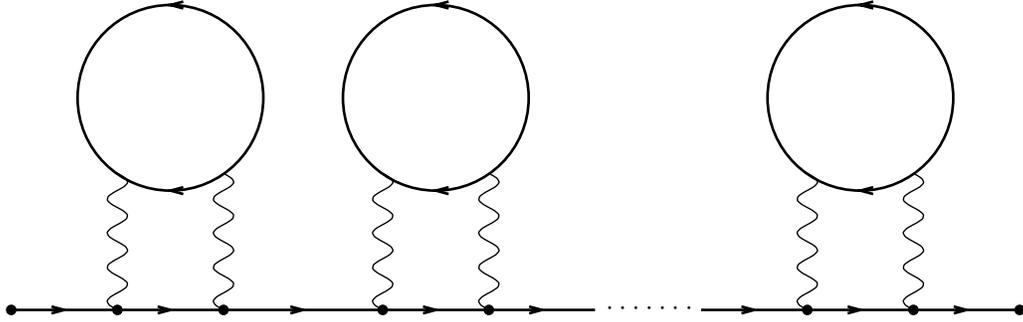


FIG 2

FIG. 2. Un grafico dal comportamento singolare. Supporremo che il grafico contenga $2n$ vertici di tipo λ ed inoltre che il punto piú a sinistra di tutti abbia un indice x e che il punto piú a destra abbia un indice y .

Una volta scritta formalmente la teoria perturbativa il problema diventa quello di studiarne la convergenza, almeno ordine per ordine. Ci aspettiamo che, a meno che α_0 e ν_0 non siano fissati opportunamente come funzioni di λ_0 , la serie perturbativa diverga. Proviamo infatti a supporre che $\alpha_0 = \nu_0 = 0$. Nella serie perturbativa compaiono diagrammi dal comportamento molto singolare. Consideriamo ad esempio il grafico di Fig. 2.

Supponiamo che in Fig.2 ci siano $2n$ vertici di tipo λ ed inoltre che il punto piú a sinistra di tutti abbia un indice x e che il punto piú a destra abbia un indice y . Chiamiamo $\delta\mu(k)$ l' integrale

$$2.32a \quad \delta\mu(k) \equiv \lambda_0^2 \int dk_1 dk_2 \hat{v}_0^2(k_1) g(k_1 - k) g(k_2) g(k_1 + k_2) \quad (2.42)$$

Allora é facile verificare che il contributo a $S(x - y)$ associato al grafico di Fig. 2 é

$$2.32b \quad \int dk e^{ik(x-y)} g(k)^{n+1} \delta\mu^n(k) \quad (2.43)$$

che diverge per ogni n nel limite $\beta, L \rightarrow \infty$. Infatti dimensionalmente ogni propagatore é una singolaritá di ordine 1 e ogni integrazione in dk_i é uno "zero" di ordine 2; globalmente l' integrale in (2.43) ha dimensione $2(1 + n) - (n + 1) - 3n = 1 - 2n$, quindi l' integrale "diverge superficialmente" (ossia a meno di qualche cancellazione di cui non abbiamo tenuto conto) per ogni $n \geq 1$. Il grafico di Fig. 2 contribuisce a spostare il punto di singolaritá del propagatore della teoria interagente. Sommando infatti rispetto a n tutti i contributi della forma (2.43) troviamo:

$$2.32c \quad \int dk e^{ik(x-y)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-ik_0 + e(\mathbf{k}))^{n+1}} \delta\mu^n(k) = \int dk e^{ik(x-y)} \frac{1}{-ik_0 + e(\mathbf{k}) + \delta\mu(k)} \quad (2.44)$$

Vediamo allora che la divergenza infrarossa dell' integrale in (2.43) é fittizia, ed é dovuta al fatto che stiamo tentando di sviluppare una funzione singolare in punto rispetto ad una funzione singolare in un punto diverso, il che é molto poco ragionevole. In questo modo stiamo riscrivendo una singolaritá di ordine 1 come una somma di singolaritá di ordine n . Se non abbiamo a disposizione parametri liberi con cui poter fissare il punto di singolaritá l' ordine n della teoria perturbativa apparirá divergente, nonostante sia possibile che la teoria stessa non sia divergente. Se invece abbiamo a disposizione dei parametri liberi α_0 e ν_0 in generale diversi da zero, possiamo cercare di rendere finita la teoria fissando il punto di singolaritá della teoria interagente,

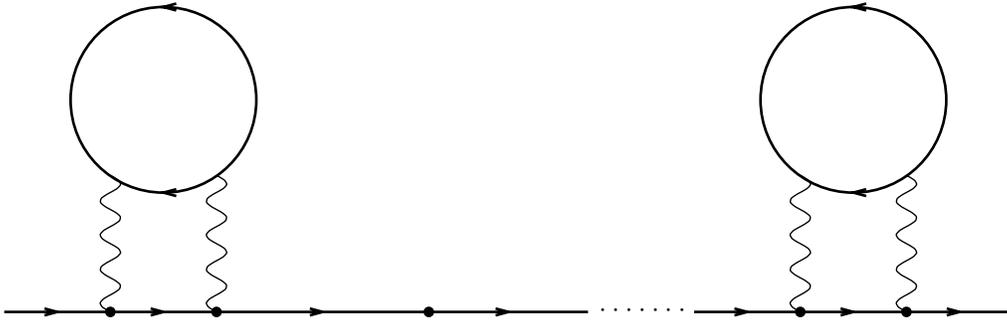


FIG 3

FIG. 3. Uno dei diagrammi che contribuiscono a cancellare la divergenza del diagramma il Fig. 2.

in modo che sia lo stesso della teoria libera attorno a cui stiamo studiando (perturbativamente) il nostro sistema. Se definiamo *impulso di Fermi* quell' impulso per cui il propagatore della teoria in spazio k ha una singolarità, possiamo dire che i parametri liberi vanno fissati in modo che l' impulso di Fermi della teoria interagente sia lo stesso della teoria libera. Se ν_0 è diverso da zero si hanno a disposizione diagrammi come quello di Fig. 3 con cui cancellare, per una scelta opportuna di ν_0 , la singolarità del grafico di Fig. 2.

Se sommiamo al grafico in Fig. 2 tutti i possibili grafici del tipo in Fig. 3 (ossia tutti i possibili grafici in cui, al posto di alcuni dei sottografici che hanno valore $\delta\mu(k)$, venga sostituito un vertice di tipo ν) vediamo che otteniamo come risultato un integrale della forma (2.43), in cui però appare, al posto di $\delta\mu(k)$, $\delta\mu(k) - \nu_0$. Scegliendo ν_0 opportunamente (vedremo che la scelta "giustá" sarà $\nu_0 = \delta\mu(0) - k\partial_k\delta\mu(0)$), troviamo un integrale il cui valore può essere stimato uniformemente in β e L .

Altre divergenze di natura diversa dalla precedente (ma la cui origine ha una ragione matematica analoga a quella discussa sopra) nasceranno a causa del fatto che a priori la funzione di Schwinger a due punti interagente non godrá della seguente proprietà:

$$2.32d \quad \frac{\frac{\partial S^{-1}}{\partial(-ik_0)}}{\frac{\partial S^{-1}}{\partial|\mathbf{k}|}} = m \quad (2.45)$$

dove m è la massa delle particelle. Per controllare queste divergenze sarà necessario scegliere opportunamente α_0 .

La discussione precedente, puramente euristica, dá l' idea di che tipo di problemi bisogna affrontare nell' analisi della teoria perturbativa. Il punto di vista che noi assumeremo sarà quello del gruppo di rinormalizzazione, nella formulazione di Gallavotti et al [G1][G2][BG1][BG2]. Cercheremo di scrivere il problema in termini di costanti di accoppiamento su diverse scale di lunghezza (o di impulsi); cercheremo poi di scrivere un' equazione che esprima la costante di accoppiamento su una data scala in funzione delle costanti di accoppiamento su tutte le scale precedenti; vedremo che sarà possibile interpretare questa gerarchia di equazioni come un sistema dinamico con dato iniziale α_0, ν_0 . In questo nuovo linguaggio il problema di scegliere opportunamente i controtermini, in modo che le divergenze cui abbiamo accennato sopra si cancellino, diventa quello di scegliere opportunamente il dato iniziale per il sistema dinamico in modo che l' evoluzione da esso generata tenda ad un dato punto fisso.

Per poter usare lo stesso approccio di [G1][G2][BG1][BG2] è necessario formulare la teoria di campo fermionica che vogliamo studiare nel formalismo funzionale. Affronteremo questo problema nel prossimo Capitolo.

sec.3

3. Impostazione funzionale.

p.3.1

3.1.Integrazione funzionale Grassmaniana e aspettative troncate

Le funzioni di Schwinger (2.5) ammettono una rappresentazione come integrali funzionali Grassmaniani.

Si introduce un' algebra generata dai simboli $\psi_x^+, \psi_y^-, x, y \in [0, \beta] \times \Omega$. Si suppone che i ψ_x^\pm soddisfino le seguenti regole di anticommutazione:

$$3.1 \quad \{\psi_x^+, \psi_y^-\} = 0, \quad \{\psi_x^+, \psi_y^+\} = 0, \quad \{\psi_x^-, \psi_y^-\} = 0 \quad (3.1)$$

Va notato che i ψ_x^\pm sono oggetti diversi dagli operatori di campo fermionici introdotti nel capitolo precedente, ma useremo ugualmente una notazione leggermente ambigua poiche' questa e' la notazione standard che si trova in letteratura.

Un qualsiasi elemento dell' algebra generata dagli elementi ψ_x^\pm si puo' scrivere nella forma:

$$3.2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \int dx_1 \dots dx_n f_{\sigma_1 \dots \sigma_n}(x_1 \dots x_n) \psi_{x_1}^{\sigma_1} \dots \psi_{x_n}^{\sigma_n} \quad (3.2)$$

Allora per definire un' operazione di integrazione funzionale $\int P(d\psi)$ sugli elementi dell' algebra, basta definirla sui monomi $\psi_{x_1}^{\sigma_1} \dots \psi_{x_n}^{\sigma_n}$ e poi estenderla per linearita' agli elementi del tipo (3.2) (se la somma nella (3.2) si estende effettivamente fino ad ∞ , il risultato dell' integrazione sara' dato da una serie formale di cui poi occorrera' verificare la convergenza).

Si stabilisce che l' integrale funzionale

$$3.3 \quad \int P(d\psi) \psi_{x_1}^{\sigma_1} \dots \psi_{x_n}^{\sigma_n} \quad (3.3)$$

si calcola con la regola di Wick. Piu' precisamente si assegna un propagatore (o covarianza) $g(x-y)$ e si definisce la (3.3) uguale a 0 se $\sum_{i=1}^n \sigma_i \neq 0$. Se invece $n = 2k$ e $\sum_{i=1}^n \sigma_i = 0$ si considerano tutti i modi possibili di scegliere k coppie dai $2k$ simboli $\psi_{x_1}^{\sigma_1} \dots \psi_{x_{2k}}^{\sigma_{2k}}$ in modo tale che in ogni coppia la somma dei σ sia 0; per ognuna di queste scelte si considera il segno della permutazione necessaria a portare vicini tra loro tutti i simboli accoppiati, in modo tale che in ogni coppia il simbolo ψ^- si trovi alla sinistra del simbolo ψ^+ ; si considera poi il prodotto \mathcal{P} di questo segno per un propagatore $g(x-y)$ per ogni coppia $\psi_x^- \psi_y^+$; si definisce che la (3.3) e' uguale alla somma di \mathcal{P} su tutti i modi possibili di scegliere le k coppie.

In altre parole, si consideri il seguente integrale:

$$3.3a \quad \int P(d\psi) \prod_{i=0}^{n-1} \psi_{x_{2i}}^- \psi_{x_{2i+1}}^+ \quad (3.4)$$

Per definizione stabiliamo che il suo valore sia uguale a

$$3.4 \quad (3.4) \equiv \det G \quad (3.5)$$

dove la matrice G e' una matrice $n \times n$ con i seguenti elementi di matrice:

$$3.5 \quad G_{j,l} \equiv g(x_{2j} - x_{2l+1}) \quad j, l = 0, \dots, n-1 \quad (3.6)$$

Diremo che G e' la *matrice di covarianza*.

Stabiliamo inoltre che

$$3.0 \quad \int P(d\psi) = 1 \quad (3.7)$$

Chiameremo $P(d\psi)$ una *distribuzione gaussiana fermionica* per l'evidente analogia con la distribuzione di probabilita' gaussiana standard.

E' possibile anche introdurre inizialmente un'algebra di Grassman con un numero finito di generatori ψ_α^σ , dove $\sigma = \pm$ e dove questa volta l'indice α e' costretto a variare su un reticolo Λ_a (di passo a) contenuto nel dominio $[0, \beta] \times \Omega$.

Si assegnano delle regole di anticommutazione analoghe alle (3.1) e poi si assegnano delle regole di integrazione (rispetto a $d\psi_\alpha^\sigma$). Una volta assegnate queste regole e' possibile dare una espressione esplicita ad una "distribuzione gaussiana fermionica" $P(d\psi)$ che ha le stesse proprieta' (3.5) e (3.7) della distribuzione gaussiana introdotta piu' sopra.

Infine e' possibile studiare il limite in cui il passo reticolare a va a zero.

Questo modo di procedere non e' conveniente ai nostri scopi (poiche' introduce il problema aggiuntivo di dover controllare il limite $a \rightarrow 0$) pero' ha il vantaggio di fornire una espressione esplicita alla distribuzione grassmaniana $P(d\psi)$.

Nel seguito noi useremo questa espressione come una rappresentazione formale di $P(d\psi)$ nel continuo.

Introduciamo allora brevemente le regole di *integrazione Grassmaniana* definite su un'algebra con un numero finito di generatori ψ_α^σ . Valgono le seguenti proprieta' fondamentali:

$$3.4a \quad \int d\psi_\alpha^\sigma \psi_\alpha^\sigma = 1, \quad \int d\psi_\alpha^\sigma = 0, \quad a \in A, \quad \sigma = \pm 1. \quad (3.8)$$

Bisogna pensare che i campi ψ anticommutino con i simboli $d\psi$ e che i simboli $d\psi$ anticommutino tra loro. Usando questa regola, le regole di anticommutazione tra campi ψ e le (3.8), si calcolano gli integrali multipli Grassmaniani.

Sia $F(\psi)$ un elemento dell'algebra Grassmaniana; notiamo che $F(\psi)$ e' necessariamente un polinomio di grado $\leq 2|\Lambda_a|$, dove $2|\Lambda_a|$ e' il numero di generatori dell'algebra. Allora l'operazione

$$3.4b \quad \int \prod_{\alpha \in A} d\psi_\alpha^+ d\psi_\alpha^- F(\psi) \quad (3.9)$$

e' definita semplicemente usando iterativamente le regole (3.8) e le regole di anticommutazione tra generatori e tra variabili $\{d\psi_\alpha^+ d\psi_\alpha^-\}$

E' facile verificare allora che per ogni $\alpha \in \Lambda_a$ ed ogni $C \in \mathbb{C}$ si ha:

$$3.4c \quad \frac{\int d\psi_\alpha^+ d\psi_\alpha^- e^{-\psi_\alpha^+ C \psi_\alpha^-} \psi_\alpha^- \psi_\alpha^+}{\int d\psi_\alpha^+ d\psi_\alpha^- e^{-\psi_\alpha^+ C \psi_\alpha^-}} = C^{-1}; \quad (3.10)$$

in fatti $e^{-\psi_\alpha^+ C \psi_\alpha^-} = 1 - \psi_\alpha^+ C \psi_\alpha^-$ e per la (3.8)

$$3.4d \quad \int d\psi_\alpha^+ d\psi_\alpha^- e^{-\psi_\alpha^+ C \psi_\alpha^-} = C, \quad (3.11)$$

mentre

$$3.4e \quad \int d\psi_\alpha^+ d\psi_\alpha^- e^{-\psi_\alpha^+ C \psi_\alpha^-} \psi_\alpha^- \psi_\alpha^+ = 1. \quad (3.12)$$

Le precedenti relazioni si possono generalizzare al caso in cui si integra rispetto a piu' variabili e in cui, al posto di C , compaia una matrice. Piu' esattamente si ha:

$$\begin{aligned}
 & \int \prod_{\alpha \in \Lambda_a} d\psi_{\alpha}^{+} d\psi_{\alpha}^{-} e^{-\sum_{i,j \in \Lambda_a} \psi_i^{+} M_{ij} \psi_j^{-}} = \det M \\
 3.4f \quad & \int \prod_{\alpha \in \Lambda_a} d\psi_{\alpha}^{+} d\psi_{\alpha}^{-} e^{-\sum_{i,j \in \Lambda_a} \psi_i^{+} M_{ij} \psi_j^{-}} \psi_{\alpha'}^{-} \psi_{\beta'}^{+} = M'_{\alpha' \beta'} \\
 & \frac{\int \prod_{\alpha \in \Lambda_a} d\psi_{\alpha}^{+} d\psi_{\alpha}^{-} e^{-\sum_{i,j \in \Lambda_a} \psi_i^{+} M_{ij} \psi_j^{-}} \psi_{\alpha'}^{-} \psi_{\beta'}^{+}}{\int \prod_{\alpha \in \Lambda_a} d\psi_{\alpha}^{+} d\psi_{\alpha}^{-} e^{-\sum_{i,j \in \Lambda_a} \psi_i^{+} M_{ij} \psi_j^{-}}} = [M^{-1}]_{\alpha' \beta'}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

dove $M'_{\alpha\beta}$ e' il determinante del minore della matrice M complementare all' elemento di matrice $M_{\alpha\beta}$, moltiplicato per il fattore $(-1)^{\alpha+\beta}$

Infine l' integrale della forma

$$3.4g \quad \frac{\int \prod_{\alpha \in \Lambda_a} d\psi_{\alpha}^{+} d\psi_{\alpha}^{-} e^{-\sum_{i,j \in \Lambda_a} \psi_i^{+} M_{ij} \psi_j^{-}} \prod_{i=1}^n \psi_{\alpha_i}^{-} \psi_{\beta_i}^{+}}{\int \prod_{\alpha \in \Lambda_a} d\psi_{\alpha}^{+} d\psi_{\alpha}^{-} e^{-\sum_{i,j \in \Lambda_a} \psi_i^{+} M_{ij} \psi_j^{-}}} \tag{3.14}$$

si calcola con la regola di Wick.

Per maggiori dettagli sulle dimostrazioni delle precedenti proprieta' si possono consultare [GM] ed il capitolo introduttivo di [ZJ].

Dalle proprieta' (3.13) e (3.14) segue immediatamente la rappresentazione della distribuzione gaussiana fermionica $P(d\psi)$ nel caso in cui i fermioni siano sul reticolo Λ_a :

$$3.4h \quad P(d\psi) = \frac{\prod_{\alpha \in \Lambda_a} d\psi_{\alpha}^{+} d\psi_{\alpha}^{-} e^{-\sum_{i,j \in \Lambda_a} \psi_i^{+} G_{ij}^{-1} \psi_j^{-}}}{\int \prod_{\alpha \in \Lambda_a} d\psi_{\alpha}^{+} d\psi_{\alpha}^{-} e^{-\sum_{i,j \in \Lambda_a} \psi_i^{+} G_{ij}^{-1} \psi_j^{-}}} \tag{3.15}$$

dove la matrice G e' la matrice di covarianza.

Passiamo adesso ad elencare alcune proprieta' degli integrali grassmaniani ed alcune notazioni che ci saranno utili in seguito (tutte le seguenti proprieta' sono valide sia in un' algebra con un numero finito di generatori, sia in un' algebra con un' infinita' continua di generatori, come quelli di (3.1)).

Definiamo il valore di aspettazione fermionico di una qualche funzione analitica $F(\psi)$ appartenente all' algebra Grassmaniana nel seguente modo:

$$3.6 \quad \int P(d\psi) F(\psi) \equiv \mathcal{E}(F) \tag{3.16}$$

Nel seguito ci servira' anche la nozione di *aspettazione troncata*:

assegnate p funzioni X_1, \dots, X_p definite sull' algebra di Grassman e p numeri interi n_1, \dots, n_p l' *aspettazione troncata* e' definita come segue:

$$3.7 \quad \mathcal{E}^T(X_1, \dots, X_p; n_1, \dots, n_p) = \frac{\partial^{n_1 + \dots + n_p}}{\partial \lambda_1^{n_1} \dots \partial \lambda_p^{n_p}} \log \int P(d\psi) e^{\lambda_1 X_1(\psi) + \dots + \lambda_p X_p(\psi)} \Big|_{\lambda=0} \tag{3.17}$$

dove $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

Si verifica facilmente che l' operazione di aspettazione troncata soddisfa alla seguente proprieta':

$$3.8 \quad \mathcal{E}^T(c_1 X_1 + \dots + c_p X_p; n) = \sum_{n_1 + \dots + n_p = n} \frac{n!}{n_1! \dots n_p!} c_1^{n_1} \dots c_p^{n_p} \mathcal{E}^T(X_1, \dots, X_p; n_1, \dots, n_p) \tag{3.18}$$

Dei banali corollari della (3.17) sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \mathcal{E}^T(X; 1) = \mathcal{E}(X) , \\
 (2) \quad & \mathcal{E}^T(X; 0) = 0 , \\
 (3) \quad & \mathcal{E}^T(X, \dots, X; n_1, \dots, n_p) = \mathcal{E}^T(X; n_1 + \dots + n_p) \\
 (4) \quad & \mathcal{E}^T(X_1, \dots, X_1, \dots, X_p, \dots, X_p; 1, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 1) = \mathcal{E}^T(X_1, \dots, X_p; n_1, \dots, n_p)
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

dove nel membro di sinistra dell' ultima uguaglianza si suppone che, per ogni $j = 1, \dots, p$, X_j sia ripetuto esattamente n_j volte.

Definiamo poi:

$$\mathcal{E}^T(X_1, \dots, X_p) \equiv \mathcal{E}^T(X_1, \dots, X_p; 1, \dots, 1)
 \tag{3.20}$$

Alcune importanti conseguenze delle precedenti definizioni sono:

(1) *Invarianza degli esponenziali* Formalmente vale il seguente sviluppo di Taylor:

$$\log \int P(d\psi) e^{X(\psi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \log \int P(d\psi) e^{\lambda X(\psi)} \Big|_{\lambda=0}
 \tag{3.21}$$

e quindi, per la definizione (3.17),

$$\log \int P(d\psi) e^{X(\psi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{E}^T(X; n)
 \tag{3.22}$$

e quindi ancora, se ϕ e' un "campo esterno" (ossia un campo non integrato):

$$\int P(d\psi) e^{X(\psi+\phi)} = \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{E}^T(X(\cdot + \phi); n) \right]
 \tag{3.23}$$

che e' la proprieta' voluta.

(2) *Principio di addizione* Supponiamo siano assegnate due misure di probabilita' $P(d\psi_1)$ e $P(d\psi_2)$ associate rispettivamente a due covarianze $g_1(x)$ e $g_2(x)$. Supponiamo poi sia assegnata una funzione dei campi ψ_1 e ψ_2 che possa essere scritta nella forma $F(\psi_1 + \psi_2)$, dove F ha la forma (3.2). Allora, se definiamo il campo $\psi \equiv \psi_1 + \psi_2$ con covarianza $g(x) \equiv g_1(x) + g_2(x)$, vale la seguente proprieta':

$$\int P(d\psi_1) \int P(d\psi_2) F(\psi_1 + \psi_2) = \int P(d\psi) F(\psi)
 \tag{3.24}$$

Dato che F ha la forma (3.2), e' sufficiente verificare la (3.24) sulla funzione $F(\psi) = \prod_{i=0}^{n-1} \psi_{x_{2i}}^- \psi_{x_{2i+1}}^+$. Il secondo membro della (3.24) in questo caso e' uguale, per definizione, a $\det G$ (vedi (3.5)). Il primo membro, invece, e' uguale a:

$$\begin{aligned}
 & \int P(d\psi_1) \int P(d\psi_2) \prod_{i=0}^{n-1} (\psi_{1,x_{2i}}^- + \psi_{2,x_{2i}}^-) (\psi_{1,x_{2i+1}}^+ + \psi_{2,x_{2i+1}}^+) = \\
 & = \sum_{\alpha} \int P(d\psi_1) \int P(d\psi_2) \prod_{i=0}^{n-1} \psi_{\alpha_{2i}, x_{2i}}^- \psi_{\alpha_{2i+1}, x_{2i+1}}^+
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

dove $\alpha \equiv \{\alpha_0, \dots, \alpha_{2n-1}\}$ e dove gli indici α_j $j = 0, \dots, 2n-1$ possono assumere i valori 1 o 2.

30 GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE PER UN SISTEMA DI FERMIONI INTERAGENTI IN DUE DIMENSIONI

Definiamo le matrici $G^{(\beta_0)\dots(\beta_{n-1})}$, dove gli indici β_j $j = 0, \dots, n-1$ possono assumere i valori 1 o 2, come le matrici $n \times n$ con i seguenti elementi di matrice:

$$3.17 \quad G_{j,l}^{(\beta_0)\dots(\beta_{n-1})} = g^{(\beta_j)}(x_{2j} - x_{2l+1}) \quad j, l = 0, \dots, n-1 \quad (3.26)$$

Allora e' facile verificare, usando ancora la definizione (3.5), che il secondo membro della (3.25) e' uguale a:

$$3.16 \quad (3.25) = \sum_{\beta} \det G^{(\beta)} \quad (3.27)$$

dove $\beta \equiv \{\beta_0, \dots, \beta_{n-1}\}$; ma la (3.27) e' banalmente identica a $\det G$ poiche' $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$.

p.3.2 3.2.Funzioni di Schwinger e potenziale efficace

Una volta stabilite le proprieta' e le definizioni elencate nel precedente paragrafo, siamo in grado di formulare in un modo piu' conveniente la teoria perturbativa descritta nel precedente capitolo.

Ricordiamo che l' oggetto a cui siamo interessati, la funzione di Schwinger a 2n punti, e' definita come:

$$3.18 \quad S(x_1, \sigma_1; \dots x_{2n}, \sigma_{2n}) \equiv \frac{\text{Tre}^{-\beta H} \text{T}\{\psi_{x_1}^{\sigma_1} \dots \psi_{x_{2n}}^{\sigma_{2n}}\}}{\text{Tre}^{-\beta H}} \quad (3.28)$$

dove si suppone che $\beta \geq t_1 \geq \dots \geq t_{2n} \geq 0$ e che $\sum_{i=1}^{2n} \sigma_i = 0$.

Consideriamo l' integrale funzionale Grassmaniano

$$3.19 \quad \int P(d\psi) \prod_{i=1}^{2n} (\psi_{x_i}^{\sigma_i}) \exp - \left\{ \int dx dy \psi_x^+ \psi_y^+ \lambda_0 v_0(x-y) \psi_y^- \psi_x^- + \right. \\ \left. + \int dx \left[\nu_0 \psi_x^+ \psi_x^- - \alpha_0 \psi_x^+ \left(\frac{\partial^2}{2m} + \mu \right) \right] \right\} \quad (3.29)$$

dove $\lambda_0(x) \equiv \lambda(\mathbf{x})\delta(t)$, dove le variabili di integrazione x ed y variano nel dominio $\Omega \times [0, \beta]$. La distribuzione gaussiana grassmaniana $P(d\psi)$ e' quella associata al propagatore fermionico libero

$$3.20 \quad g(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(k_0(t+0^-) + \mathbf{k}\mathbf{x})}}{-ik_0 + e(\mathbf{k})} \quad (3.30)$$

dove, ricordiamolo, gli integrali in $\frac{dk}{(2\pi)^3}$ sono solo formali (in effetti a L e β finiti vanno sostituiti con delle sommatorie) e la funzione $e(\mathbf{k})$ e' uguale a

$$e(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^2 - p_F^2}{2m}$$

Se sviluppiamo in serie di Taylor l' esponenziale che appare sotto segno di integrale nella (3.29) ci accorgiamo immediatamente che otteniamo uno sviluppo perturbativo nei parametri $\lambda_0, \alpha_0, \nu_0$ equivalente a quello considerato nel paragrafo §2.3. Abbiamo allora la relazione voluta:

$$3.21 \quad (3.29) = S(x_1, \sigma_1; \dots x_{2n}, \sigma_{2n}) \quad (3.31)$$

L' analisi delle funzioni di Schwinger nella forma (3.29) non e' la piu' conveniente in vista di un approccio ricorsivo come quello del gruppo di rinormalizzazione di Wilson.

Gli oggetti piu' convenienti da studiare sono le funzioni di Schwinger troncate, che corrispondono ai diagrammi di Feynman connessi e sono definite nel modo che segue:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}^T(x_1\sigma_1, \dots, x_s\sigma_s) &= \\
 3.22 \quad &= \frac{\delta^s}{\delta\phi_{x_1}^{\sigma_1} \dots \delta\phi_{x_s}^{\sigma_s}} \log \int P(d\psi) \exp \left[-H_I(\psi) + \int dx (\phi_x^+ \psi_x^- + \psi_x^+ \phi_x^-) \right] \Big|_{\phi=0} \equiv \\
 &\equiv \frac{\delta^s}{\delta\phi_{x_1}^{\sigma_1} \dots \delta\phi_{x_s}^{\sigma_s}} \mathcal{S}^T(\phi) \Big|_{\phi=0}
 \end{aligned} \quad (3.32)$$

dove le variabili Grassmaniane ϕ_x^\pm sono variabili ausiliarie che anticommutano con le variabili ψ . Il simbolo δ indica la derivata funzionale che agisce sul funzionale $\mathcal{S}^T(\phi)$ (che va inteso, allo stesso modo delle funzioni logaritmo ed esponenziale, come una serie formale di potenze in ϕ). Sottolineiamo che le funzioni di Schwinger troncate sono legate alle funzioni di Schwinger da relazioni algebriche finite, quindi lo studio delle funzioni di Schwinger troncate e' equivalente allo studio delle funzioni di Schwinger.

Diremo che $\mathcal{S}^T(\phi)$ e' il *funzionale generatore* delle funzione di Schwinger troncate.

Il funzionale generatore $\mathcal{S}^T(\phi)$ ha una relazione molto semplice con il *potenziale efficace* definito come segue:

$$3.23 \quad e^{-V_{eff}(\phi)} = \int P(d\psi) e^{-H_I(\psi+\phi)} \quad (3.33)$$

Piu' esattamente, se il simbolo (\cdot, \cdot) indica l' operazione di prodotto scalare, vale la seguente relazione:

$$3.24 \quad -V_{eff}(G\phi) + (\phi^+, G\phi^-) = \mathcal{S}^T(\phi) \quad (3.34)$$

Nella (3.34) $G\phi$ significa:

$$\begin{aligned}
 (G\phi)^-(x) &\equiv \int dy g(x-y) \phi^-(y) \equiv g * \phi^- \\
 3.25 \quad (G\phi)^+(x) &\equiv \int dy \phi^+(x-y) g(-y) \left(= \int dy \phi^+(y) g(y-x) \right) \equiv \phi^+ * g' \quad g'(x) \equiv g(-x)
 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dalle definizioni (3.35) segue la seguente proprieta':

$$3.26 \quad (\phi^+, G\phi^-) = (G\phi^+, \phi^-) \quad (3.36)$$

che useremo tra poco.

Se usiamo la rappresentazione formale della misura di $P(d\psi)$ introdotta nel precedente paragrafo:

$$3.4h \quad P(d\psi)'' ='' \frac{\prod_x d\psi_x^+ d\psi_x^- e^{-(\psi^+, G^{-1}\psi^-)}}{\int \prod_x d\psi_x^+ d\psi_x^- e^{-(\psi^+, G^{-1}\psi^-)}} \quad (3.37)$$

e' molto facile verificare la validita' della (3.34):

infatti, eseguendo il "cambio di variabile" $\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \psi + G\phi$, ricaviamo:

$$\begin{aligned}
 e^{-V_{eff}(G\phi)} &= \frac{\int \prod_x d\psi_x^+ d\psi_x^- e^{-(\psi^+, G^{-1}\psi^-)} e^{-H_I(\psi+G\phi)}}{\int \prod_x d\psi_x^+ d\psi_x^- e^{-(\psi^+, G^{-1}\psi^-)}} = \\
 3.27 \quad &= \frac{\int \prod_x d\tilde{\psi}_x^+ d\tilde{\psi}_x^- e^{-(\tilde{\psi}^+, G^{-1}\tilde{\psi}^-) + (\phi^+, \tilde{\psi}^-) + (\tilde{\psi}^+, \phi^-) - (\phi, G\phi)} e^{-H_I(\tilde{\psi})}}{\int \prod_x d\psi_x^+ d\psi_x^- e^{-(\psi^+, G^{-1}\psi^-)}} = \\
 &= e^{-(\phi, G\phi)} \int P(d\psi) e^{-H_I(\psi) + (\phi^+, \psi^-) + (\psi^+, \phi^-)} = e^{-(\phi, G\phi) + \mathcal{S}^T(\phi)}
 \end{aligned} \quad (3.38)$$

che e' equivalente alla (3.34).

Naturalmente, se decidiamo di non trattare il problema del passaggio al limite dall' integrale Grassmaniano finito-dimensionale a quello infinito-dimensionale, i passaggi nella (3.38) sono privi di significato e vanno interpretati semplicemente come una "guida" utile per trovare la giusta relazione tra V_{eff} e \mathcal{S}^T .

Una volta stabilita la giusta relazione, questa va verificata come una uguaglianza ordine per ordine tra le serie formali che definiscono V_{eff} e \mathcal{S}^T . Nonostante questa verifica sia concettualmente banale, non e' affatto banale realizzarla esplicitamente, cosi' rimandiamo alla Appendice A1 per il conto dettagliato.

La discussione precedente implica che lo studio delle funzioni di Schwinger troncate (che e' equivalente allo studio delle funzioni di Schwinger) e' equivalente allo studio del potenziale efficace.

In particolare vediamo che il potenziale efficace definito nella (3.33) racchiude tutte le informazioni sul comportamento macroscopico del sistema di fermioni interagenti, poiche' da esso possono essere ricavate tutte le funzioni di Schwinger e quindi tutti i valori medi di osservabili macroscopiche del sistema.

sec.4

4. Decomposizione in multiscale ed espansione in alberi.

p.4.1

4.1. Decomposizione in multiscale e quasi-particelle

L'idea introdotta nel precedente capitolo e' quella secondo cui, integrando via i gradi di liberta' "irrelevanti" della teoria, si ottiene una teoria efficace, piu' semplice di quella iniziale e che contiene tutte le informazioni rilevanti sul comportamento macroscopico del sistema.

Questa idea e' esattamente quella su cui si basa il gruppo di rinormalizzazione alla Wilson (originariamente applicato allo studio dei fenomeni critici nella meccanica statistica delle transizioni di fase [M]). In piu', l'approccio di Wilson e' basato su un calcolo ricorsivo del potenziale efficace: si decompone in scale (di lunghezza o di impulsi) il propagatore della teoria libera; di conseguenza si decompongono in scale tutti gli integrali che ci interessano ai fini dello studio della teoria efficace; a seconda che si sia interessati al problema infrarosso o ultravioletto si integrano mano a mano le scale di lunghezza piu' piccole o piu' grandi e si considera il limite in cui tutte le scale di lunghezza "irrilevanti" siano state integrate via.

Consideriamo allora il propagatore libero della nostra teoria:

$$4.1 \quad \begin{aligned} g(x) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{k}x}}{-ik_0 + e(\mathbf{k})} \equiv \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}x} g(k) \\ e(\mathbf{k}) &= \frac{\mathbf{k}^2 - p_F^2}{2m} \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove x e k sono trivettori con componenti:

$$4.2 \quad \begin{aligned} x &= (x_0, \mathbf{x}) \\ k &= (k_0, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Introduciamo una funzione $F(t)$, C^∞ a supporto compatto, tale che, se γ e' un numero reale > 1 :

$$4.3 \quad F(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \leq \gamma^2 - 1, \\ 0, & \text{se } t \geq \gamma^2 + 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

Possiamo riscrivere $g(x)$ nel seguente modo:

$$4.4 \quad \begin{aligned} g(x) &= g^{(u.v.)}(x) + g^{(i.r.)}(x) \\ g^{(u.v.)}(x) &\equiv \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}x} \frac{1 - F(k_0^2 + e(\mathbf{k})^2)}{-ik_0 + e(\mathbf{k})} \\ g^{(i.r.)}(x) &\equiv \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}x} \frac{F(k_0^2 + e(\mathbf{k})^2)}{-ik_0 + e(\mathbf{k})} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Per ogni $x \in [0, \beta] \times \Omega$ introduciamo due variabili Grassmaniane $\psi_x^{(u.v.)}$ e $\psi_x^{(i.r.)}$, con propagatori $g^{(u.v.)}(x)$ e $g^{(i.r.)}(x)$ rispettivamente.

Poiche' siamo interessati al problema infrarosso (vogliamo infatti studiare il comportamento asintotico delle funzioni di correlazione), porremo la componente ultravioletta del campo (e quindi anche il suo propagatore) identicamente uguale a zero. Questo corrisponde a mettere un regolarizzatore ultravioletto alla teoria, che ha l'importante proprieta' di essere invariante per rotazioni spaziali; in questo modo la teoria con taglio ultravioletto ha le stesse simmetrie della teoria originale, e questo semplifichera' molto la discussione del problema.

Da un punto di vista fisico in realta' non dovrebbe avere importanza, ai fini dello studio del comportamento asintotico delle funzioni di correlazione, la scelta della forma del regolarizzatore ultravioletto. In pratica pero'

34 GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE PER UN SISTEMA DI FERMIONI INTERAGENTI IN DUE DIMENSIONI

la verifica di un' ipotesi del genere e' tutt' altro che banale. Anzi, nel nostro lavoro useremo fortemente l' invarianza per rotazioni della teoria (vedi piu' avanti la discussione sulle stime perturbative e non della funzione beta). Un problema aperto e' quello di estendere i risultati del nostro lavoro ad una teoria con taglio ultravioletto non invariante per rotazioni (ad esempio ad una teoria di fermioni su reticolo).

Una volta posta uguale a zero la componente ultravioletta del campo, possiamo ulteriormente decomporre la componente infrarossa nel seguente modo:

$$4.5 \quad \psi_x^{(i.r.)} \equiv \sum_{h=-\infty}^0 \psi_x^{(h)} \quad (4.5)$$

dove i campi $\psi_x^{(h)}$ hanno il seguente propagatore:

$$4.6 \quad \begin{aligned} g^{(h)}(x) &\equiv \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \frac{f^{(h)}(k_0^2 + e(\mathbf{k})^2)}{-ik_0 + e(\mathbf{k})} \\ f^{(h)}(t) &\equiv F(\gamma^{-2h}t) - F(\gamma^{-2h+2}t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Per ottenere la decomposizione (4.5), (4.6) abbiamo usato la ovvia relazione:

$$4.7 \quad F(t) = \sum_{h=-\infty}^0 f^{(h)}(t) \quad (4.7)$$

La decomposizione in scale ha lo scopo di introdurre, al posto di un propagatore che decade troppo piano all' infinito, una somma di propagatori ognuno dei quali ha buone proprieta' di decadimento all' infinito. Questo permette di trattare ogni integrale corrispondente ad un grafico di Feynman con delle possibili divergenze come una somma di integrali convergenti, ognuno moltiplicato per dei fattori dimensionali che, eventualmente, divergono nel limite $h \rightarrow -\infty$. Risultera' chiaro piu' avanti (vedi dimostrazione del Lemma 4.1) che i propagatori $g^{(h)}(x)$ non hanno le proprieta' di decadimento all' infinito volute. Il motivo e' che i supporti delle funzioni $g^{(h)}(k)$ sono, quando $k_0 = 0$, delle corone circolari di ampiezza $\sim \gamma^h$ e distanti $\sim \gamma^h$ dalla superficie di Fermi, piuttosto che dei "quadrantini" nello spazio delle fasi (una funzione che in spazio k ha supporto in una regione di dimensioni $\sim \gamma^h$, in spazio x decade all' infinito piu' veloce di ogni potenza, su una scala $\sim \gamma^{-h}$).

E' conveniente allora introdurre un' ulteriore decomposizione nell' integrale che definisce $g^{(i.r.)}(x)$, piu' precisamente una decomposizione in settori angolari di ampiezza $\sim \gamma^{\alpha h}$ $\alpha > 0$. La scelta che sembra piu' naturale (e che in effetti garantisce un comportamento "naturale" del propagatore) e' quella per cui $\alpha = 1$; vedremo pero' piu' avanti che, nella discussione sull' analiticita' della funzione beta, e' conveniente (anzi necessario) usare dei settori angolari con $\alpha \neq 1$, quindi fin da adesso useremo una definizione non restrittiva dei settori angolari.

Sia $\chi(\theta)$ una funzione C^∞ di variabile reale tale che:

$$4.8 \quad \begin{aligned} \chi(\theta) &= \begin{cases} 1, & \text{se } |\theta| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{se } |\theta| \geq \frac{3}{2}\pi, \end{cases} \\ \chi(\pi - \theta) + \chi(\pi + \theta) &= 1 \text{ se } |\theta| \leq \pi \end{aligned} \quad (4.8)$$

Siano $\chi_i^{(h)}(\theta)$ le funzioni cosi' definite:

$$4.9 \quad \begin{aligned} \chi_i^{(h)}(\theta) &\equiv \chi[\gamma^{-\alpha h}(\theta - \theta_i)] \\ \theta_i &= 2\pi i \gamma^{\alpha h}, \quad i = 0, \dots, \gamma^{-\alpha h} - 1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

dove $\alpha > 0$.

Quindi, se θ e' l' angolo formato dal vettore \mathbf{k} con l' asse \mathbf{x}_1 , e se ω_i e' il trivettore di componenti:

$$4.10 \quad \omega_i \equiv (0, \cos \theta_i, \sin \theta_i) \quad (4.10)$$

valgono le seguenti identita':

$$4.11 \quad \begin{aligned} g^{(h)}(x) &= \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \frac{f^{(h)}(k_0^2 + e(\mathbf{k})^2)}{-ik_0 + e(\mathbf{k})} \sum_{i=0}^{\gamma^{-\alpha h}-1} \chi_i^{(h)}(\theta) = \\ &= \sum_{i=0}^{\gamma^{-\alpha h}-1} e^{-ip_F \omega_i x} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-i(k-\omega_i p_F)x} \frac{f^{(h)}(k_0^2 + e(\mathbf{k})^2)}{-ik_0 + e(\mathbf{k})} \chi_i^{(h)}(\theta) \equiv \\ &\equiv \sum_{i=0}^{\gamma^{-\alpha h}-1} e^{-ip_F \omega_i x} g_{\omega_i}^{(h)}(x) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nella precedente equazione l' angolo θ va pensato come una funzione delle variabili $k^{\parallel} \equiv k\omega_i$ e $k^{\perp} \equiv k\omega_i^{\perp}$ (ω_i^{\perp} e' il trivettore di componenti $(0, -\sin \theta_i, \cos \theta_i)$). Si puo' eseguire esplicitamente il cambio di variabili $k - \omega_i p_F \rightarrow k$ per ottenere:

$$4.12 \quad \begin{aligned} g_{\omega_i}^{(h)}(x) &= \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \frac{f^{(h)}(k_0^2 + e_{\omega_i}(\mathbf{k})^2)}{-ik_0 + e_{\omega_i}(\mathbf{k})} \chi \left(\gamma^{-\alpha h} \arctan \frac{k^{\perp}}{k^{\parallel} + p_F} \right) \vartheta(k^{\parallel} + p_F) \equiv \\ &\equiv \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \hat{g}_{\omega_i}^{(h)}(k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

dove

$$4.13 \quad e_{\omega_i}(\mathbf{k}) = \beta k^{\parallel} + \frac{k^{\parallel 2} + k^{\perp 2}}{2m}, \quad \beta = \frac{p_F}{m} \quad (4.13)$$

La precedente decomposizione del propagatore corrisponde ad un' ulteriore decomposizione del campo $\psi^{(i.r.)}$:

$$4.14 \quad \psi^{(i.r.)\pm} = \sum_{h=-\infty}^0 \sum_{\omega=0}^{\gamma^{-\alpha h}-1} e^{\pm i\omega p_F x} \psi_{x,\omega}^{(h)\pm} \quad (4.14)$$

I campi $\psi_{x,\omega}^{(h)}$ si chiamano campi Grassmaniani di *quasi-particella* e corrispondono ai campi descrittivi un sistema di fermioni con *momento lineare intrinseco* uguale a $p_F \omega$ (il momento lineare intrinseco va pensato come il momento lineare analogo allo spin).

Vediamo qual e' l' espressione per i propagatori associati ai vertici α_0 , nel formalismo di quasi-particella. Abbiamo visto nel Capitolo 2, prima di introdurre la decomposizione in multiscale, che da ogni vertice α_0 esce un propagatore $\frac{\partial^2 + p_F^2}{2m} g(x)$. Introducendo la decomposizione in multiscale e quasi-particelle otteniamo:

$$4.14c \quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 + p_F^2}{2m} g^{(v)}(x) = \\ &= - \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e(\mathbf{k}) e^{-ikx} \frac{f^{(h)}(k_0^2 + e^2(\mathbf{k})) \chi_{\omega}^{(h)}(\theta)}{-ik_0 + e(\mathbf{k})} = \\ &= - \sum_{\omega} e^{-ip_F \omega x} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e(\mathbf{k}) e^{-i(k-\omega p_F)x} \frac{f^{(h)}(k_0^2 + e^2(\mathbf{k})) \chi_{\omega}^{(h)}(\theta)}{-ik_0 + e(\mathbf{k})} = \\ &= - \sum_{\omega} e^{-ip_F \omega x} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e_{\omega}(\mathbf{k}) e^{-ikx} \frac{f^{(h)}(k_0^2 + e_{\omega}^2(\mathbf{k})) \chi_{\omega}^{(h)}[\theta(k^{\parallel}, k^{\perp}, \alpha)]}{-ik_0 + e_{\omega}(\mathbf{k})} = \\ &= - \sum_{\omega} e^{-ip_F \omega x} i\beta \omega \left(\partial_x + i\omega \frac{\partial^2}{2p_F} \right) \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e_{\omega}(\mathbf{k}) e^{-ikx} \frac{f^{(h)}(k_0^2 + e_{\omega}^2(\mathbf{k})) \chi_{\omega}^{(h)}[\theta(k^{\parallel}, k^{\perp}, \alpha)]}{-ik_0 + e_{\omega}(\mathbf{k})} \equiv \\ &\equiv -i\beta \omega \langle \mathcal{D}_{\omega}^{-} \psi_{x,\omega}^{(h)}, \psi_{0,\omega}^{+} \rangle \end{aligned} \quad (4.15)$$

dove nell' ultimo passaggio abbiamo introdotto l' operatore differenziale \mathcal{D}_ω^\pm :

$$4.14b \quad \mathcal{D}_\omega^\pm \equiv \partial_x \mp i\omega \frac{\partial^2}{2p_F} = \left(\partial_{x_0}, \partial_{\mathbf{x}} \mp i\omega \frac{\partial^2}{2p_F} \right) \quad (4.16)$$

Nel seguito useremo anche la definizione:

$$4.14e \quad \mathcal{D}_\omega \equiv \mathcal{D}_\omega^- \quad (4.17)$$

Il comportamento all' infinito dei propagatori di quasi-particella e' chiarito dal seguente:

LEMMA 4.1 Sia $g_{\omega_i}^{(h)}(x)$ il propagatore di quasi-particella definito come nella (4.12), con $\alpha \geq \frac{1}{2}$. $g_{\omega_i}^{(h)}(x)$ soddisfa alla seguente disuguaglianza:

$$4.14a \quad |g_{\omega_i}^h(x)| \leq \gamma^{(1+\alpha)h} \frac{C_N}{1 + [(\gamma^h x_0)^2 + (\gamma^h \mathbf{x} \cdot \omega_i)^2 + (\gamma^{\alpha h} \mathbf{x} \cdot \omega_i^\perp)^2]^N} \quad (4.18)$$

Osservazioni.

(1) La dimostrazione del Lemma 4.1 e' riportata in Appendice A2. In effetti l' enunciato del Lemma riportato qui sopra e' esatto solo nel limite $\beta, L \rightarrow \infty$. I dettagli sul caso in cui β ed L sono mantenuti finiti sono riportati in Appendice A2.

(2) Dalla dimostrazione risulta chiara l' importanza dell' ipotesi $\alpha \geq \frac{1}{2}$. In particolare si vede che il lemma non e' valido nel caso $\alpha = 0$ (caso senza decomposizione in quasi-particelle).

(3) Il decadimento piu' veloce di ogni potenza e' una conseguenza della scelta delle funzioni f e χ nella (4.15) (C^∞ a supporto compatto). Se fossimo riusciti a scegliere funzioni f e C analitiche, avremmo trovato un decadimento esponenziale del propagatore in spazio x .

Con una dimostrazione del tutto analoga a quella del Lemma 4.1 si puo' ottenere il seguente:

LEMMA 4.2 Sia $\mathcal{D}_\omega^- g_{\omega_i}^{(h)}(x)$ il propagatore di quasi-particella definito come nella (4.15), con $\alpha \geq \frac{1}{2}$. $\mathcal{D}_\omega^- g_{\omega_i}^{(h)}(x)$ soddisfa alla seguente disuguaglianza:

$$4.14d \quad |\mathcal{D}_\omega^- g_{\omega_i}^h(x)| \leq \gamma^{\alpha h} \frac{C_N}{1 + [(\gamma^h x_0)^2 + (\gamma^h \mathbf{x} \cdot \omega_i)^2 + (\gamma^{\alpha h} \mathbf{x} \cdot \omega_i^\perp)^2]^N} \quad (4.19)$$

Per il Lemma 4.2 valgono le stesse osservazioni seguenti il Lemma 4.1.

Notiamo un' importante proprieta' della precedente decomposizione in scale: se β ed L sono tenuti finiti, tutte le precedenti serie in h (vedi ad esempio (4.14)) sono in effetti delle somme finite.

Infatti se (in particolare) β e' finito, gli integrali in dk_0 che compaiono nelle definizioni dei propagatori vanno pensati come delle somme sull' insieme

$$2.12 \quad \mathcal{D}_\beta \equiv \{k_0 = \frac{2\pi}{\beta} (n + \frac{1}{2}) \quad n \in \mathbb{Z}\} \quad (4.20)$$

quindi $|k_0| \geq \frac{\pi}{\beta}$. Visto che $|k_0| \geq \frac{\pi}{\beta}$, tutti i propagatori $g_\omega^{(h)}(x)$ con $h < h_\beta$ sono identicamente nulli. h_β e' definita come segue:

$$4.15 \quad h_\beta = \min \left\{ h : \gamma^{-2h} (\gamma^2 + 1) > \frac{\pi^2}{\beta^2} \right\}; \quad (4.21)$$

notiamo che $h_\beta = O(\log \beta)$.

In pratica una temperatura finita funge da regolarizzatore infrarosso. E' quindi ragionevole che, a temperatura abbastanza alta (piu' alta di una temperatura critica funzione delle costanti di accoppiamento

della teoria iniziale), le funzioni di correlazione siano tutte finite, anche senza bisogno di introdurre nessuna rinormalizzazione.

Il problema interessante sarebbe quello di rimuovere il regolarizzatore infrarosso mandando la temperatura a zero e di studiare quindi lo stato fondamentale del sistema interagente. Vedremo piu' avanti nel lavoro che questo problema, che pure e' stato risolto per i sistemi di fermioni unidimensionali (a piccolo accoppiamento nel caso repulsivo oppure senza spin [BGPS]), in due dimensioni non si riesce a trattare (non si riescono ad ottenere stime non perturbative dei potenziali efficaci uniformi nella temperatura).

Nonostante ci siano delle ragioni puramente tecniche per cui nascono queste difficolta' (che verranno fuori nello svolgimento del lavoro), ce ne sono anche alcune concettuali: in due dimensioni ci si aspetta che lo stato fondamentale del sistema sia, sotto ipotesi piuttosto generali sulla forma del potenziale di interazione microscopico, uno stato superconduttivo, e quindi di natura bosonica (per uno stato fondamentale di questo genere le tecniche fermioniche, basate, come vedremo, su cancellazioni negli integrali dovute alle regole di anticommutazione tra i campi, falliscono); oppure, peggio ancora, nel caso di un' interazione microscopica repulsiva, non si riesce a stabilire, neanche ad un livello qualitativo, quale debba essere lo stato fondamentale, se un liquido di Luttinger, un liquido normale di Fermi o un superconduttore BCS (si ritiene che genericamente anche in questo caso lo stato fondamentale sia superconduttore; questa proprieta' viene detta *instabilita' di Kohn-Luttinger* [KL]).

Da un punto di vista fisico-teorico, quello che ci si aspetta con "certezza" e' che la temperatura critica T_{BCS} al di sopra della quale il sistema di fermioni e' stabile sia esponenzialmente piccola con la costante di accoppiamento λ_0 (e che quindi sia invisibile perturbativamente).

Un problema interessante allora e' quello di stabilire un limite superiore ottimale a questa temperatura critica (e questo e' il problema che affronteremo nell' ultima parte del lavoro).

p.4.2 4.2.Sviluppo in alberi non rinormalizzato

Una volta introdotta la decomposizione in scale del precedente paragrafo, possiamo passare ad illustrare il calcolo iterativo del potenziale efficace.

Intanto, avendo introdotto nel precedente paragrafo un taglio ultravioletto, ridefiniamo il potenziale efficace come segue:

$$4.16 \quad e^{-\mathcal{V}_{eff}(\phi)} = \int P(d\psi^{(i.r.)}) e^{-H_I(\psi^{(i.r.)} + \phi)} \quad (4.22)$$

Usando poi il *principio di addizione* (3.24) e lo sviluppo (4.5), possiamo riscrivere la (4.22) nella forma:

$$4.17 \quad e^{-\mathcal{V}_{eff}(\phi)} = \int \prod_{h=-\infty}^0 P(d\psi^{(h)}) e^{-H_I(\psi^{(i.r.)} + \phi)} \quad (4.23)$$

E' naturale allora introdurre la nozione di *potenziali efficaci su scala h*:

$$4.18 \quad e^{-\mathcal{V}^{(\bar{h})}(\psi^{(\leq \bar{h})})} = \int \prod_{h=\bar{h}+1}^0 P(d\psi^{(h)}) e^{-H_I(\psi^{(0)} + \dots + \psi^{\bar{h}+1} + \psi^{(\leq \bar{h})})} \quad (4.24)$$

dove abbiamo usato:

$$4.19 \quad \psi^{(\leq h)\pm} \equiv \sum_{k=-\infty}^h \psi^{(k)\pm} \quad (4.25)$$

In questo modo

$$4.19a \quad \mathcal{V}_{eff}(\phi) = \lim_{h \rightarrow -\infty} \mathcal{V}^{(h)}(\phi) \quad (4.26)$$

Consideriamo esplicitamente il primo passo di integrazione:

$$4.20 \quad e^{-\mathcal{V}^{(-1)}(\psi^{(\leq -1)})} = \int P(d\psi^{(0)}) e^{-H_I(\psi^{(0)} + \psi^{(\leq -1)})} \quad (4.27)$$

Vediamo che, usando la proprieta' (3.23) di *invarianza degli esponenziali*, possiamo riesprimere $-\mathcal{V}^{(-1)}$ come una somma su valori di aspettazione troncata:

$$4.21 \quad -\mathcal{V}^{(-1)}(\psi^{(\leq -1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{E}^T \left(-H_I(\cdot + \psi^{(\leq -1)}; n) \right) \quad (4.28)$$

E' comodo dare una rappresentazione grafica della (4.28) come in Fig. 4.

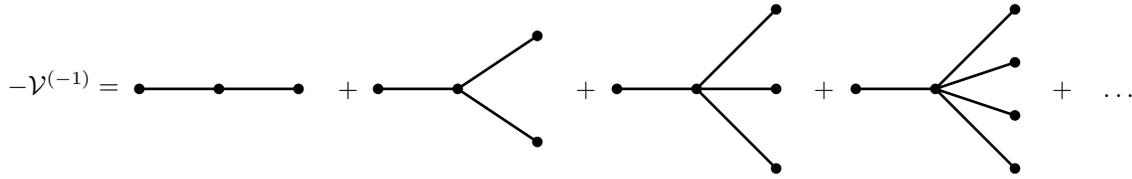


FIG. 4. Rappresentazione grafica dell' espansione (4.28). Chiameremo *alberi* gli addendi della somma grafica. Possiamo associare ad ogni albero degli indici, in corrispondenza dei suoi punti: un indice $h=-1$ al punti che si trova piu' a sinistra possibile (*radice* dell' albero); un indice $h=0$ al punto nel mezzo; un indice $h=1$ ai punti finali (*foglie* dell' albero).

In ogni albero dell' espansione in Fig. 4, ogni punto finale rappresenta un termine $-H_I(\psi^{(\leq 0)})$ e ogni vertice diverso dalla radice e dai punti finali (che negli alberi di Fig. 4 e' solo il vertice di mezzo) rappresenta un' operazione di aspettazione troncata rispetto al campo corrispondente alla frequenza di quel vertice (nel caso degli alberi di Fig. 4 la frequenza e' $h = 0$). Inoltre ad ogni albero e' associato un fattore combinatorio uguale a $\frac{1}{n!}$, dove n e' il numero di punti finali.

L' interesse della rappresentazione grafica di Fig. 4 e' che puo' essere facilmente iterata.

Consideriamo ancora esplicitamente il secondo passo di integrazione:

$$4.22 \quad \begin{aligned} e^{-\mathcal{V}^{(-2)}(\psi^{(\leq -2)})} &= \int P(d\psi^{(-1)}) \int P(d\psi^{(0)}) e^{-H_I(\psi^{(0)} + \psi^{(\leq -1)})} = \\ &= \int P(d\psi^{(-1)}) e^{-\mathcal{V}^{(-1)}(\psi^{(-1)} + \psi^{(\leq -2)})} \end{aligned} \quad (4.29)$$

che, in termini di somme di aspettazione troncate, diventa:

$$4.23 \quad \begin{aligned} -\mathcal{V}^{(-2)}(\psi^{(\leq -2)}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{E}_{-1}^T \left(-\mathcal{V}^{(-1)}(\cdot + \psi^{(\leq -2)}; n) \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{E}_{-1}^T \left(\sum_{n'=0}^{\infty} \frac{1}{n'!} \mathcal{E}_0^T (-H_I; n'); n \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Possiamo tradurre graficamente le equazioni (4.29), (4.30) come in Fig. 5.

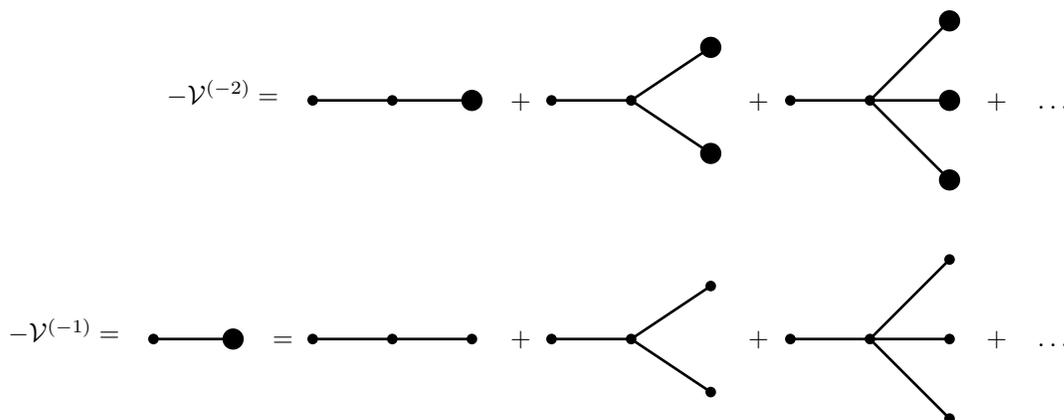


FIG. 5. Rappresentazione grafica dell'espansione (4.29), (4.30). La prima linea rappresenta $-\mathcal{V}^{(-2)}$ in termini di $-\mathcal{V}^{(-1)}$, mentre la seconda linea definisce un' unica rappresentazione grafica per tutti i contributi a $\mathcal{V}^{(-1)}$.

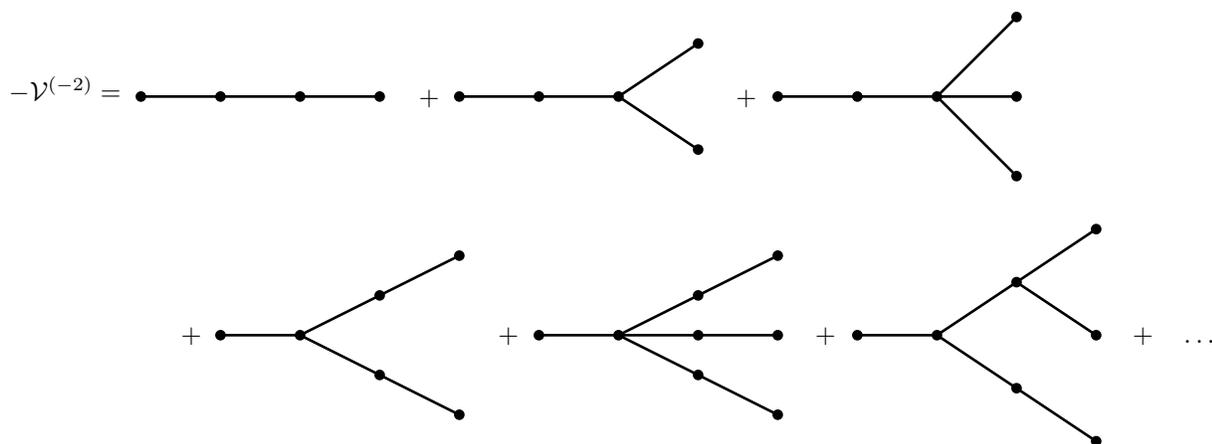


FIG. 6. Rappresentazione grafica di $-\mathcal{V}^{(-2)}$ in termini di $-H_I$: ogni termine che rappresenta $-\mathcal{V}^{(-1)}$ nella prima riga di Fig. 5 e' espanso usando la seconda linea di Fig. 6. Dato un qualsiasi albero dello sviluppo in Fig. 6, bisogna immaginare che la radice abbia frequenza $h=-2$, che il vertice che segue la radice abbia frequenza $h=-1$, che i punti finali abbiano frequenza $h=1$ e che i rimanenti vertici abbiano frequenza $h=0$.

Nella prima riga di Fig. 5 le palle nere rappresentano $-\mathcal{V}^{(-1)}$.

Riscrivendo le palle nere come nella seconda riga di Fig. 5 otteniamo immediatamente lo sviluppo descritto in Fig. 6.

Anche negli alberi di Fig. 6 i vertici v (a frequenza h_v) diversi dalla radice e dai punti finali corrispondono ad un' operazione di aspettazione troncata rispetto alla variabile Grassmaniana $\psi^{(h_v)}$; i punti finali corrispondono ai fattori $-H_I$; ad ogni albero τ e' associato un fattore combinatorio $\frac{1}{n(\tau)}$ uguale a $\prod_v \frac{1}{s_v!}$ dove s_v e' il numero di rami che si dipartono (in avanti, ossia in direzione opposta alla radice) dal vertice v . Ad esempio i fattori combinatori associati agli alberi disegnati esplicitamente in Fig. 6 sono, seguendo lo stesso ordine con cui sono disegnati: $1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{2!2!}$.

E' chiaro che la procedura descritta sopra per rappresentare i primi due passi di integrazione puo' essere

iterata $|h|$ volte fino ad ottenere uno sviluppo in alberi per il potenziale efficace su scala $h - \mathcal{V}^{(h)}$.

Possiamo esplicitamente scrivere che il potenziale efficace $-\mathcal{V}^{(h)}$ e' la somma dei contributi di tutti gli alberi τ possibili:

$$-\mathcal{V}^{(h)}(\psi^{(\leq h)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)}), \tag{4.31}$$

dove $\mathcal{T}_{h,n}$ e' l' insieme degli alberi con n punti finali e con frequenza h associata alla radice.

Un possibile albero di $\mathcal{T}_{h,n}$ e' quello riportato come esempio in Fig. 7.

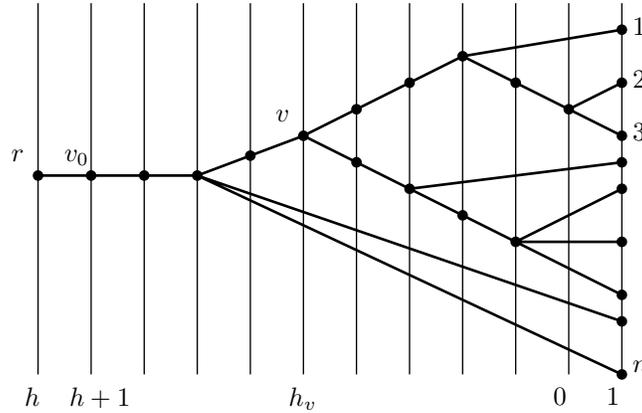


FIG. 7. Un possibile albero che compare nella rappresentazione grafica di $\mathcal{V}^{(h)}$. Un albero di questo tipo e' ottenuto iterando la rappresentazione grafica delle precedenti figure. Tutti i punti finali stanno sulla linea verticale corrispondente alla frequenza $h=1$.

Elenchiamo qui alcune definizioni che useremo spesso nel seguito del lavoro (anche se alcune sono state gia' introdotte, le ripetiamo per comodita' di consultazione).

Chiameremo *scala* o *frequenza* l' indice associato alle linee verticali (che in Fig. 7 e' compreso tra h ed 1). Chiameremo *punti finali* (*p. f.*) i punti dell' albero che appartengono alla linea verticale a frequenza = 1; inoltre chiameremo *vertici* i punti sulle linee a frequenze comprese tra $h + 1$ e 1 (si noti in particolare che il punto r non e' un vertice). Chiameremo *radice* il punto r in Fig. 7. Chiaramente l' albero induce un ordinamento parziale tra i vertici: diremo che $v_1 < v_2$ (o che v_1 *precede* v_2) se v_1 si trova sul cammino che unisce r con v_2 . Dato un vertice v chiameremo v' il vertice che lo precede immediatamente. Sia s_v il numero di vertici che seguono immediatamente il vertice v . Diremo che un vertice v e' *non banale* se $s_v > 1$ o se $s_v = 0$ e che e' *banale* se $s_v = 1$. Dato l' albero τ ed un suo vertice v chiameremo $\tau^{(v)}$ il sottoalbero di τ che ha radice in v . Se ogni vertice dell' albero appartiene (come in Fig. 7) ad una linea verticale ad una ben determinata frequenza, diremo che l'albero e' *decorato* (in altre parole un albero e' decorato se ad ogni vertice e' associata una frequenza). Per ogni vertice decorato esiste un corrispondente albero *non decorato* con radice che ha la stessa struttura topologica dell' albero decorato ma ha solo vertici non banali, non ha nessun indice di frequenza associato ai suoi vertici ed ha solo un indice r per indicare quale dei punti e' la radice. Ad esempio l' albero non decorato con radice associato all' albero di Fig. 7 e' quello disegnato in Fig. 8.

Possiamo associare ad ogni albero non decorato un fattore combinatorio uguale a quello definito per un albero decorato ad esso associato (infatti tutti gli alberi decorati τ associati ad uno stesso albero non decorato hanno lo stesso fattore combinatorio $\frac{1}{n(\tau)}$).

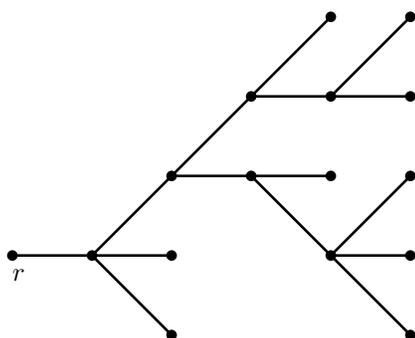


FIG. 8. L' albero non decorato con radice corrispondente all' albero decorato di Fig. 7. L' albero non decorato ha la stessa struttura topologica dell' albero decorato ma ha solo vertici non banali. Ai vertici non e' associato nessun indice, a meno della lettera r associata alla radice dell' albero.

Possiamo anche espandere la somma $\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}}$ della (4.31) in una somma sugli alberi non decorati per la somma sulle decorazioni. Piu' esattamente, se \mathcal{T}_n^* e' l' insieme degli alberi non decorati con radice con n punti finali, abbiamo la seguente identita':

4.25
$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_n^*} \sum_{\{h_v\}_{v \in \tau}} , \tag{4.32}$$

dove l' insieme di indici $\{h_v\}$ deve soddisfare ad alcune proprieta': gli indici h_v devono essere compatibili con l' ordinamento parziale indotto dall' albero, devono essere tutti compresi tra $h + 1$ e 0 e la frequenza dei punti finali deve essere necessariamente $= 1$.

Infine stabiliremo che due alberi non decorati con radice sono *equivalenti* o *identici* se possono essere sovrapposti con delle deformazioni continue delle linee sul piano (senza che siano ammessi incroci tra le linee stesse). Riportiamo in Fig. 9 un esempio di due alberi non decorati con radice non equivalenti.

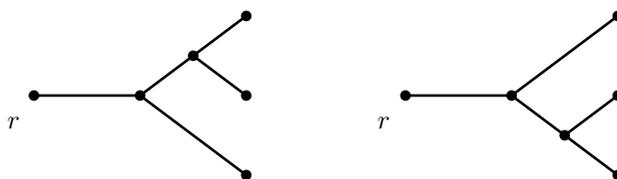


FIG. 8. Due alberi non decorati con radice non equivalenti. Si noti che i due alberi non sono considerati equivalenti, pur avendo lo stesso numero di punti finali e la stessa successione di indici s_v (e quindi, in particolare, lo stesso fattore combinatorio).

Alcuni risultati tecnici sul conteggio degli alberi e dei grafici di Feynman sono riportati in Appendice A3.

Bisogna adesso descrivere le regole che ci permettano di calcolare esplicitamente i contributi $\mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)})$. Abbiamo già spiegato sopra che ogni punto finale dell' albero $\tau \in \mathcal{T}_{h,n}$ corrisponde ad un fattore $-H_I(\psi^{(\leq 0)})$. Visto che H_I è una somma di diversi contributi (un contributo $\sim \lambda_0$, uno $\sim \alpha_0$ ed uno $\sim \nu_0$) conviene associare ai punti finali dell' albero un indice che può assumere i valori λ, α, ν ; in questo modo un punto finale λ corrisponderà al termine dell' hamiltoniana di interazione $\sim \lambda_0$, e così via. Chiaramente adesso l' espansione in alberi del potenziale efficace su scala h avrà un indice di sommatoria in più, quello relativo agli indici associati ai punti finali.

Ogni vertice diverso dai punti finali rappresenta invece un' operazione di valore di aspettazione troncata. Consideriamo lo sviluppo (4.31). I termini $\mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)})$ sono definiti ricorsivamente nel modo che segue.

Se τ è l' albero banale τ_0 (ossia l' albero che ha una sola linea che connette la radice con l' unico punto finale) allora $h = 0$ e $\mathcal{V}^{(0)}(\tau_0, \psi^{(\leq 0)})$ è dato da uno dei contributi (α, ν o λ) all' hamiltoniana di interazione H_I .

Se τ è non banale, v_0 è il primo vertice di τ e $\tau_1, \dots, \tau_{s_{v_0}}$ sono i sottoalberi di τ che hanno v_0 come radice, allora

$$4.26 \quad \mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)}) = \frac{1}{s_{v_0}!} \mathcal{E}_{h+1}^T \left(\mathcal{V}^{(h+1)}(\tau_1, \psi^{(\leq h+1)}), \dots, \mathcal{V}^{(h+1)}(\tau_{s_{v_0}}, \psi^{(\leq h+1)}) \right). \quad (4.33)$$

Iterando la (4.33) otteniamo

$$4.27 \quad \mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)}) = \left(\prod_{v \in V(\tau)} \frac{1}{s_v!} \right) \mathcal{E}_{h+1}^T \left(\mathcal{E}_{h+2}^T \left(\mathcal{E}_{h+3}^T \dots \mathcal{E}_{-2}^T \left(\mathcal{E}_{-1}^T \left(\mathcal{E}_0^T \left(\mathcal{V}(\tau_0, \psi^{(\leq 1)}), \dots \right), \dots \right), \dots \right), \dots \right), \dots \right), \quad (4.34)$$

dove τ_0 è l' albero banale e la definizione di $V(\tau)$ è riportata in Appendice A3. Le aspettative troncate in (4.34) vanno calcolate partendo dai punti finali e muovendosi verso la radice.

Ogni volta che si incontra un vertice v bisogna allora considerare un' espressione del tipo

$$4.28 \quad \frac{1}{s_v!} \mathcal{E}_{h_v}^T \left(\tilde{\psi}^{(\leq h_v)}(P_{v_1}), \dots, \tilde{\psi}^{(\leq h_v)}(P_{v_{s_v}}) \right), \quad (4.35)$$

dove P_{v_j} $j = 1, \dots, s_v$ è un insieme di indici tale che

$$4.29 \quad \tilde{\psi}^{(\leq h_v)}(P_{v_j}) = \prod_{f \in P_{v_j}} \left(\frac{\partial^2}{2m} \right)^{\alpha(f)} \psi_{x(f)}^{(\leq h_v)\sigma(f)}, \quad j = 1, \dots, s_v, \quad (4.36)$$

con $\sigma(f) = \pm$, $\alpha(f) = 0, 1$ e $x(f) = (x_0(f), \mathbf{x}(f)) \in [0, \beta] \times \Omega$. In altre parole, se si disegnano (come spiegato in Appendice A3) gli elementi di grafico corrispondenti ai punti finali dell' albero $\tau^{(v)}$ ognuno con le sue linee uscenti (2 o 4 a seconda dei casi), si può considerare l' insieme di indici I_v , ossia l' insieme degli indici che numerano tutte le linee uscenti dagli elementi di grafico disegnati e in più, per ogni elemento di grafico con due linee uscenti, stabiliscono se l' elemento è di tipo α o ν ; P_v è un qualche sottoinsieme di I_v . Se $f \in P_v$, $\alpha(f) = 1$ è uguale a 1 solo se l' elemento di grafico in $x(f)$ è di tipo α e se $\sigma(f) = -$.

Dimostriamo per induzione la (4.35). Notiamo prima di tutto che $\mathcal{V}^{(0)}(\tau_0, \psi^{(\leq 0)})$ è una somma di contributi della forma

$$4.30 \quad \int dx(I_v) \mathcal{W}^{(0)}(x(I_v)) \tilde{\psi}^{(\leq 0)}(I_v), \quad (4.37)$$

dove, ad esempio, $x(I_v) = \{x, y\}$, $\tilde{\psi}^{(\leq 0)}(I_v) = \psi_x^+ \psi_y^+ \psi_y^- \psi_x^-$, $\mathcal{W}^{(0)}(x(I_v)) = \lambda_0(x - y)$ e

$$4.31 \quad \int dx(I_v) = \int_{[0, \beta] \times \Omega} dx \int_{[0, \beta] \times \Omega} dy, \quad (4.38)$$

Quindi se $h_v = 0$ il secondo membro della (4.33) diventa, piu' esplicitamente, una somma di termini del tipo

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n!} \mathcal{E}_1^T \left(\int dx(I_{v_1}) \mathcal{W}^{(0)}(x(I_{v_1})) \tilde{\psi}^{(\leq 0)}(I_{v_1}), \dots, \int dx(I_{v_n}) \mathcal{W}^{(0)}(x(I_{v_n})) \tilde{\psi}^{(\leq 0)}(I_{v_n}) \right) \\
 & = \int dx(I_{v_1}) \dots \int dx(I_{v_n}) \mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{x}(I_{v_1})) \dots \mathcal{W}^{(0)}(\mathbf{x}(I_{v_n})) \frac{1}{n!} \mathcal{E}_0^T \left(\tilde{\psi}^{(\leq 0)}(I_{v_1}), \dots, \tilde{\psi}^{(\leq 0)}(I_{v_n}) \right),
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

che contiene un' espressione del tipo in (4.35) con $P_{v_j} = I_{v_j}$ $j = 1, \dots, n$.

Se $h_v < 0$, usando l' ipotesi induttiva e le (4.34)(4.35), vediamo subito che $\mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)})$ e' una somma di termini proporzionali a

$$\frac{1}{s_v!} \mathcal{E}_{h_v}^T \left(\mathcal{E}_{h_v+1}^T \left(\tilde{\psi}^{(\leq h_v+1)}(P_{v_{11}}), \dots, \tilde{\psi}^{(\leq h_v+1)}(P_{v_{1s_{v_1}}}) \right), \dots \right), \tag{4.40}$$

dove v_1, \dots, v_{s_v} sono gli s_v vertici che seguono v e $v_{j1}, \dots, v_{js_{v_j}}$ sono gli s_{v_j} vertici che seguono v_j , $j = 1, \dots, s_v$. Allora, dalle definizioni,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E}_{h_v+1}^T \left(\tilde{\psi}^{(\leq h_v+1)}(P_{v_{j1}}), \dots, \tilde{\psi}^{(\leq h_v+1)}(P_{v_{js_{v_j}}}) \right) \\
 & = \sum_{Q_{v_{j1}} \subset P_{jv_1}} \dots \sum_{Q_{v_{js_{v_j}}} \subset P_{js_{v_j}}} \tilde{\psi}^{(\leq h_v)}(Q_{v_{j1}}) \dots \tilde{\psi}^{(\leq h_v)}(Q_{v_{js_{v_j}}}) \\
 & \quad \mathcal{E}_{h_v+1}^T \left(\tilde{\psi}^{(h_v+1)}(P_{v_{j1}} \setminus Q_{v_{j1}}), \dots, \tilde{\psi}^{(h_v+1)}(P_{v_{js_{v_j}}} \setminus P_{v_{js_{v_j}}}) \right),
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

dove

$$\mathcal{E}_{h_v+1}^T \left(\tilde{\psi}^{(h_v+1)}(P_{v_{j1}} \setminus Q_{v_{j1}}), \dots, \tilde{\psi}^{(h_v+1)}(P_{v_{js_{v_j}}} \setminus P_{v_{js_{v_j}}}) \right) \tag{4.42}$$

e' una costante (ossia una quantita' che non dipende dai campi).

Allora, come voluto, nella (4.40) rimane un' espressione proporzionale a

$$\frac{1}{s_v!} \mathcal{E}_{h_v}^T \left(\tilde{\psi}^{(\leq h_v)}(P_{v_1}), \dots, \tilde{\psi}^{(\leq h_v)}(P_{v_{s_v}}) \right), \tag{4.43}$$

con

$$P_{v_j} = \bigcup_{i=1}^{s_{v_j}} Q_{v_{ji}}, \tag{4.44}$$

e cosi' la (4.35) e' dimostrata.

A questo punto possiamo scrivere un' espressione ancora piu' esplicita per i potenziali efficaci su scala h :

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{V}^{(h)}(\psi^{(\leq h)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)}), \\
 & \mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)}) = \int dx(I_{v_0}) \sum_{P_{v_0} \subset I_{v_0}} \tilde{\psi}^{(\leq h)}(P_{v_0}) \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(I_{v_0})),
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

dove

$$\int dx(I_{v_0}) = \prod_{f \in I_{v_0}} \int_{[0,\beta] \times \Omega} dx(f), \tag{4.46}$$

Volendo possiamo anche riscrivere la (4.45) nella forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}^{(h)}(\psi^{(\leq h)}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)}) , \\
 \mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)}) &= \sum_{P_{v_0} \subset I_{v_0}} \int dx(P_{v_0}) \tilde{\psi}^{(\leq h)}(P_{v_0}) \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(P_{v_0})) ,
 \end{aligned}
 \tag{4.47}$$

dove

$$\mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(P_{v_0})) = \int dx(I_{v_0} \setminus P_{v_0}) \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(I_{v_0})) .
 \tag{4.48}$$

In questo modo i nuclei $\mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(P_{v_0}))$ dipendono solo dalle variabili

$$x(P_{v_0}) = \{x(f)\}_{f \in P_{v_0}} ,
 \tag{4.49}$$

Usando la (4.45) e la (4.33) otteniamo per i nuclei $\mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(I_{v_0}))$ la seguente relazione ricorsiva:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(I_{v_0})) &= \sum_{P_{v_1}, \dots, P_{v_{s_{v_0}}}} \left(\prod_{j=1}^{s_{v_0}} \mathcal{W}^{(h+1)}(\tau_j, P_{v_j}, x(I_{v_j})) \right) \\
 &\quad \frac{1}{s_{v_0}!} \mathcal{E}_{h+1}^T \left(\tilde{\psi}^{(h+1)}(P_{v_1} \setminus Q_{v_1}), \dots, \tilde{\psi}^{(h+1)}(P_{v_{s_{v_0}}} \setminus Q_{v_{s_{v_0}}}) \right) ,
 \end{aligned}
 \tag{4.50}$$

dove

$$Q_{v_j} = P_{v_0} \cap P_{v_j} , \quad j = 1, \dots, s_{v_0} .
 \tag{4.51}$$

La (4.50) puo' poi essere iterata per ottenere:

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(I_{v_0})) \\
 &= \sum_{\{P_v\}_{v \in V(\tau)}} \left(\prod_{v \notin V_f(\tau)} \frac{1}{s_v!} \mathcal{E}_{h_v}^T \left(\tilde{\psi}^{(h_v)}(P_{v_1} \setminus Q_{v_1}), \dots, \tilde{\psi}^{(h_v)}(P_{v_{s_v}} \setminus Q_{v_{s_v}}) \right) \right) \left(\prod_{v \in V_f(\tau)} r_v \right) ,
 \end{aligned}
 \tag{4.52}$$

dove r_v e' il valore dell' elemento di grafico associato al punto finale v ($r_v = \lambda_0(x), \alpha_0, \nu_0$).

La somma

$$\sum_{\{P_v\}_{v \in V(\tau)}}
 \tag{4.53}$$

in (4.51) e' su tutte le possibile scelte degli insiemi P_v corrispondenti ai vertici di τ , eccetto P_{v_0} che e' fissato. Notiamo che gli insiemi Q_v sono univocamente determinati dalla scelta degli insiemi $\{P_v\}$; per convincersene basta tenere conto del fatto che, per ogni $v \in V(\tau)$, si ha:

$$Q_v \subset P_v , \quad P_v = \bigcup_{j=1}^{s_v} Q_{v_j} ,
 \tag{4.54}$$

In questo modo per ogni $v \in V(\tau)$ e per ogni v_j che segue immediatamente v si ha:

$$Q_{v_j} = P_v \cap P_{v_j} , \quad j = 1, \dots, s_v ,
 \tag{4.55}$$

che e' una generalizzazione della (4.51).

Consideriamo i valori di aspettazione troncata

$$4.45 \quad \mathcal{E}_{h_v}^T \left(\tilde{\psi}^{(h_v)}(P_{v_1} \setminus Q_{v_1}), \dots, \tilde{\psi}^{(h_v)}(P_{v_{s_v}} \setminus Q_{v_{s_v}}) \right) \quad (4.56)$$

contenuti nella (4.52). Sono possibili due espansioni per calcolarli: una in *diagrammi di Feynman*, l'altra, piu' compatta, in *determinanti*. La verifica della validita' delle due espansioni e' riportata nell' Appendice A4. Nei prossimi due paragrafi, invece, elenchiamo semplicemente le regole per scrivere le due espansioni

p.4.4 4.4. Grafici di Feynman e ammassi.

L' espansione in diagrammi di Feynman si ottiene nel seguente modo: per ogni insieme di indici $P_{v_i} \setminus Q_{v_i}$ si disegnano gli elementi di grafico corrispondenti, da ognuno dei quali escono delle linee orientate; ogni linea orientata e' la rappresentazione grafica di uno dei campi contenuti nel prodotto che definisce $\tilde{\psi}^{(h_v)}(P_{v_i} \setminus Q_{v_i})$ (vedi (4.36)); stabiliremo che ad ogni campo + corrisponda una linea con verso uscente dal suo elemento di grafico e viceversa per ogni campo -. Si disegna attorno agli elementi di grafico di v_i un "contenitore" G_{v_i} , in modo tale che le linee uscenti dagli elementi di grafico al suo interno escano dal contenitore stesso; inoltre si fa in modo che contenitori corrispondenti a vertici diversi siano disgiunti. Chiameremo questi contenitori *ammassi* (che e' la traduzione italiana della parola *clusters*, molto usata nella letteratura). Piu' avanti, con un leggero abuso di definizione, chiameremo questi contenitori anche *vertici* (ed indicheremo G_v semplicemente con v).

Le linee andranno poi contratte come descritto nell' Appendice A3, con la sola accortezza aggiuntiva di considerare gli ammassi come dei punti. In altre parole le linee vanno contratte in modo tale che tutti gli ammassi risultino connessi.

Ogni scelta del modo di contrarre le linee corrisponde ad un grafico di Feynman Γ . Ad ogni grafico di Feynman Γ si associa poi un valore $\text{Val}(\Gamma)$, definito come nel Capitolo 2, con l' unica differenza che adesso, al posto dei propagatori completi, bisogna prendere i propagatori su scala h_v . Se si vogliono avere dei propagatori con buone proprieta' di decadimento all' infinito si deve ancora espandere ogni propagatore $g^{(h_v)}(x)$ in una somma di propagatori di quasi-particella:

$$4.45a \quad g^{(h_v)}(x) = \sum_{\omega} e^{-ip_F \omega x} g_{\omega}^{(h_v)}(x) \quad (4.57)$$

Se usiamo l' espansione (4.57), il valore $\text{Val}(\Gamma)$ sara' definito come nel Capitolo 2, con la differenza che, al posto dei propagatori completi, bisogna prendere i propagatori $e^{-ip_F \omega x} g_{\omega}^{(h_v)}(x)$ (e al posto del propagatore $\frac{\partial^2 + p_F^2}{2m} g^{(h_v)}(x)$ che esce da ogni vertice di tipo α bisogna prendere il propagatore $e^{-ip_F \omega x} \mathcal{D}_{\omega} g_{\omega}^{(h_v)}(x)$).

Se \mathcal{G}_0 e' l' insieme dei grafici di Feynman ottenuti seguendo il procedimento descritto sopra, si ha:

$$4.46 \quad \mathcal{E}^T \left(\tilde{\psi}(P_{v_1} \setminus Q_{v_1}), \dots, \tilde{\psi}(P_{v_{s_v}} \setminus Q_{v_{s_v}}) \right) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_0} \text{Val}(\Gamma) . \quad (4.58)$$

Se si ripete la costruzione precedente per tutti i fattori della forma (4.56) contenuti nello sviluppo (4.52), si vede subito che i nuclei $\mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(I_{v_0}))$ sono uguali alla somma dei valori di tutti i grafici di Feynman Γ con le seguenti proprieta':

- (1) tutti gli elementi di grafico sono connessi dalle linee di Γ ;
- (2) tutti gli ammassi G_v sono connessi dalle linee di Γ ;
- (3) i propagatori contenuti nell' ammasso G_v e non in nessun ammasso piu' piccolo hanno frequenza h_v ;
- (4) il grafico Γ ha $|P_{v_0}|$ linee esterne, indicizzate dagli elementi di P_{v_0} .

Un grafico Γ con le proprieta' (1)-(4) e' allora tale che, dato un ammasso G_v , se tutti i sottoammassi massimali $G_{v_1}, \dots, G_{v_{s_v}}$ sono pensati come punti, allora l' insieme di punti cosi' ottenuto e' connesso dalle linee di Γ . In particolare e' possibile estrarre dalle linee di Γ un insieme di $s_v - 1$ linee che connetta i "punti" $G_{v_1}, \dots, G_{v_{s_v}}$. Un tale insieme sara' chiamato *albero ancorato* (ed indicato con T_v) ed e' tale da realizzare una connessione minimale tra i sottoammassi massimali di G_v .

Se chiamiamo $\mathcal{G}(P_{v_0})$ l' insieme di grafici di Feynman con le proprieta' (1)-(4), abbiamo, come detto sopra,

4.46a
$$\mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(I_{v_0})) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(P_{v_0})} \text{Val}(\Gamma) \tag{4.59}$$

Un possibile esempio di grafico di Feynman, con associato un albero τ ed una struttura ad ammassi compatibili, e' quello disegnato in Fig. 10.

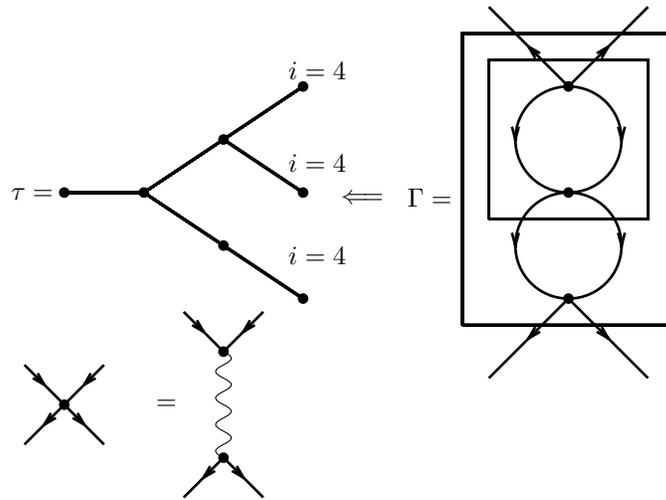


FIG. 10. Un esempio di grafico di Feynman Γ con i suoi ammassi. La struttura ad ammassi identifica univocamente un albero τ . Nell' esempio tutti gli elementi di grafico sono supposti di tipo λ (in generale possono essere di tipo λ , α , o ν , come descritto in Fig. 1).

E' evidente che la struttura ad ammassi stabilisce un ordinamento gerarchico tra gli elementi del grafico, che e' lo stesso indotto dall' albero τ . Piu' esattamente, dato un albero τ , possiamo rappresentarlo come un insieme di ammassi disgiunti contenuti gli uni negli altri; e viceversa. In Fig. 11 e' riportato un esempio (nel quale sono disegnati solo i cluster corrispondenti a vertici non banali).

L' espressione finale per il potenziale efficace ottenuta attraverso le relazioni (4.45) e (4.59) e' chiamata *espansione non rinormalizzata*. Il motivo e' che piu' avanti sara' necessario introdurre una espansione rinormalizzata per controllare le divergenze di cui abbiamo gia' parlato nel Capitolo 2 a proposito della teoria perturbativa "ingenua" (ossia la teoria perturbativa senza espansione in multiscale).

La struttura ad ammassi e' particolarmente utile per identificare queste divergenze; anzi, meglio, per identificare quali propagatori in una classe di grafici di Feynman sono realmente pericolosi. Dato un diagramma di Feynman Γ , supponiamo di considerare un sottodiagramma connesso Γ' formato da alcuni elementi di grafico e dalle linee che li connettono: vedremo nel prossimo Capitolo che possono venir fuori stime divergenti nel limite $h \rightarrow -\infty$ sul valore di Γ' solo se il numero di linee esterne di Γ' e' uguale a 2 o a 4. Un' analisi piu' dettagliata mostra poi che in realta' i sottografici veramente pericolosi sono quelli in cui tutte le linee interne sono su scala maggiore delle linee esterne. Ma una proprieta' di questo genere e' garantita automaticamente

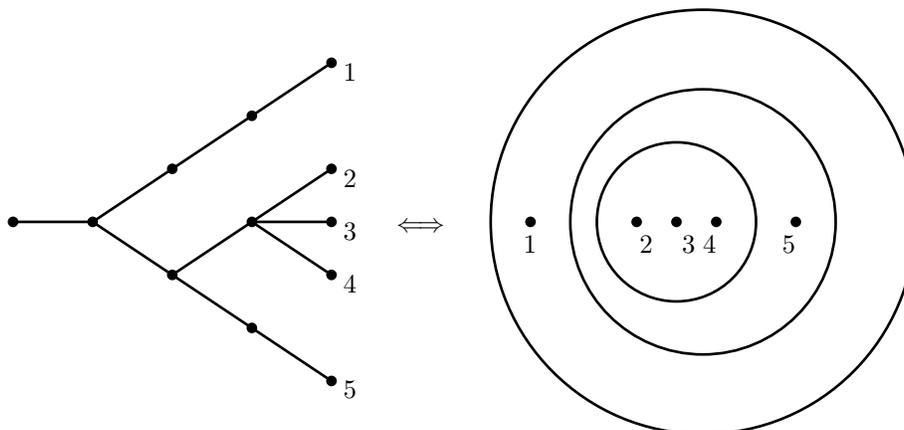


FIG. 11. Un albero di ordine 5 e la corrispondente struttura ad ammassi. Nel disegno sono riportati solo i cluster corrispondenti a vertici non banali.

se il sottodiagramma Γ' e' un ammasso; quindi, in termini di ammassi, possiamo dire che solo ammassi a due o quattro gambe esterne possono essere fonte di problemi (tutto questo discorso risultera' piu' chiaro quando nel prossimo Capitolo eseguiremo esplicitamente le stime).

p.4.5 4.5. Espansione in determinanti. Confronto con l' espansione in grafici di Feynman

Consideriamo ancora una volta un valore di aspettazione troncata della forma $\mathcal{E}^T \left(\tilde{\psi}(P_1), \dots, \tilde{\psi}(P_s) \right)$, con $|P_1| + \dots + |P_s| = n$. Lo sviluppo in determinanti consiste nel riscrivere questa aspettazione troncata nel seguente modo:

$$4.47 \quad \mathcal{E}^T \left(\tilde{\psi}(P_1), \dots, \tilde{\psi}(P_s) \right) = (-1)^{s+1} \sum_T \left(\prod_{\ell \in T} g_\ell \right) \int dP_T(\mathbf{t}) \det G^T(\mathbf{t}), \quad (4.60)$$

dove (1) T e' un insieme di linee che forma un *albero ancorato* tra i cluster P_1, \dots, P_s , (2) \mathbf{t} e' un insieme di parametri

$$4.48 \quad \mathbf{t} = \{t_{j,j'} \in [0, 1], \quad 1 \leq j, j' \leq s\}, \quad (4.61)$$

(3) $dP_T(\mathbf{t})$ e' un' opportuna misura di probabilita' con supporto su un insieme di parametri \mathbf{t} tale che $t_{j,j'} = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_{j'}$, per qualche famiglia di versori $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^s$, e (4) $G^T(\mathbf{t})$ e' una matrice $(n - s + 1) \times (n - s + 1)$ di elementi

$$4.49 \quad [G^T(\mathbf{t})]_{(j,i),(j',i')} = t_{j,j'} g(\mathbf{x}(j,i) - \mathbf{x}(j',i')), \quad (4.62)$$

dove $1 \leq j, j' \leq s$, $1 \leq i \leq |P_j|$, $1 \leq i' \leq |P_{j'}|$, e le linee $\ell = \mathbf{x}(j,i) - \mathbf{x}(j',i')$ non appartengono a T .

Se $s = 1$, la somma su T e' vuota, ma possiamo ancora usare la (4.60), interpretando il membro di destra come

$$4.50 \quad \begin{cases} 1, & \text{se } P_1 \text{ e' vuoto,} \\ \det G(\mathbf{1}), & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (4.63)$$

Sviluppando il determinante nella (4.60) riotteniamo lo sviluppo in diagrammi di Feynman descritto sopra. Il vantaggio di riscrivere una certa somma di diagrammi di Feynman sotto forma di determinante e' che in questo modo si tiene automaticamente conto dei segni relativi tra diversi diagrammi di Feynman e quindi di alcune cancellazioni tra diagrammi altrimenti difficilmente controllabili.

Piu' precisamente vedremo che sia gli integrali sulle coordinate libere dei valori dei diagrammi di Feynman di ordine n (ossia i diagrammi con n elementi di grafico), sia gli integrali sulle coordinate libere dei fattori della forma

$$4.51 \quad \left(\prod_{\ell \in T} g_\ell \right) \int dP_T(\mathbf{t}) \det G^T(\mathbf{t}) \quad (4.64)$$

possono essere stimati, a meno di fattori dimensionali, da C^n , per qualche costante C .

Una volta eseguita questa stima, uniforme sulla scelta del diagramma di Feynman (o dell' albero ancorato T), rimane da sommare sui diagrammi di Feynman (o sugli alberi ancorati). Dai risultati dell' Appendice A3 sappiamo che il numero di diagrammi di Feynman di ordine n e' stimato (a meno di C^n) da $(n!)^2$ mentre il numero di alberi ancorati che connettono n punti e' $o(n!)$. Nelle stime per grafici troveremo allora un $n!$ di troppo, che non fara' convergere la serie perturbativa.

Per questo motivo le stime eseguite grafico per grafico si chiamano *stime $n!$* e garantiscono solamente l' esistenza del termine di ordine n della serie che definisce i potenziali efficaci, ma non la sommabilita'.

Vedremo invece che le stime sui determinanti permetteranno di dimostrare l' esistenza dei potenziali efficaci in senso non perturbativo.

sec.5

5. Stime perturbative per la funzione beta.

p.5.1

5.1. Stime perturbative per l' espansione non rinormalizzata

In questo paragrafo vogliamo iniziare a stimare i contributi ai potenziali efficaci

$$5.1z \quad \mathcal{V}^{(h)}(\psi^{(\leq h)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)}) \quad (5.1)$$

definiti nel paragrafo §4.3, usando lo sviluppo in grafici di Feynman, per un albero τ con n punti finali. Vogliamo eseguire questa stima in spazio k , e quindi e' conveniente definire l' oggetto da stimare direttamente nello spazio degli impulsi. Eseguiremo la stima supponendo che le costanti di accoppiamento $\nu_0, \alpha_0, \int dx |\lambda_0(x)|$ siano limitate da una costante ε .

Ricordiamo la forma di $\mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)})$, (4.45):

$$5.1 \quad \begin{aligned} \mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)}) &= \int dx(I_{v_0}) \sum_{P_{v_0} \subset I_{v_0}} \tilde{\psi}^{(\leq h)}(P_{v_0}) \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(I_{v_0})) = \\ &= \sum_{P_{v_0} \subset I_{v_0}} \int dx(P_{v_0}) \tilde{\psi}^{(\leq h)}(P_{v_0}) \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(P_{v_0})) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Trasformiamo la (5.2) secondo Fourier e decomponiamo in campi di quasi-particella. Piu' esattamente, se i campi $\hat{\psi}_{k,\omega}^{(h)}$ sono i trasformati secondo Fourier dei campi $\psi_{\omega,x}^{(h)}$ (vedi (4.14)):

$$5.1a \quad \begin{aligned} \psi_{x,\omega}^{(h)\pm} &= \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{\pm ikx} \hat{\psi}_{k,\omega}^{(h)\pm} \\ \hat{\psi}_{k,\omega}^{(h)\pm} &= \int dx e^{\mp ikx} \psi_{x,\omega}^{(h)\mp} \end{aligned} \quad (5.3)$$

definiamo:

$$5.1b \quad \tilde{\psi}^{(\leq h)}(P_{v_0}, \underline{\omega}_{P_{v_0}}, \underline{k}_{P_{v_0}}) = \prod_{f \in P_{v_0}} \hat{\psi}_{k_f, \omega_f}^{\sigma(f)} \quad (5.4)$$

dove:

- (1) $\underline{\omega}_{P_{v_0}} \equiv \{\omega_f\}$, $f \in P_{v_0}$,
- (2) k_f , $f \in P_{v_0}$ e' l' impulso della linea esterna che entra nel punto x_f , $f \in P_{v_0}$,
- (3) $\underline{k}_{P_{v_0}} \equiv \{k_f\}$, $f \in P_{v_0}$.

Definiamo poi la trasformata di Fourier del nucleo integrale $\mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(P_{v_0}))$ nel modo seguente:

$$5.1c \quad \begin{aligned} &\int dx(I_{v_0}) \tilde{\psi}^{(\leq h)}(P_{v_0}) \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(P_{v_0})) = \\ &= \frac{1}{n(\tau)} \sum_{\underline{\omega}_{P_{v_0}}} \int dx(I_{v_0}) \prod_{f \in P_{v_0}} \frac{dk_f}{(2\pi)^3} \hat{\psi}_{k_f, \omega_f}^{\sigma(f)} e^{i\sigma(f)(k_f + \omega_f P_F)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(P_{v_0})} \text{Val}(\Gamma) = \\ &= \frac{1}{n(\tau)} \sum_{\underline{\omega}_{P_{v_0}}} \int dk(I_{v_0}) \tilde{\psi}^{(\leq h)}(P_{v_0}, \underline{\omega}_{P_{v_0}}, \underline{k}_{P_{v_0}}) \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(P_{v_0})} \hat{\text{Val}}(\Gamma) \equiv \\ &\equiv \sum_{\underline{\omega}_{P_{v_0}}} \int dk(I_{v_0}) \tilde{\psi}^{(\leq h)}(P_{v_0}, \underline{\omega}_{P_{v_0}}, \underline{k}_{P_{v_0}}) \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, \underline{\omega}_{P_{v_0}}, \underline{k}_{I_{v_0}}) \equiv \\ &\equiv \sum_{\underline{\omega}_{P_{v_0}}} \int dk(P_{v_0}) \tilde{\psi}^{(\leq h)}(P_{v_0}, \underline{\omega}_{P_{v_0}}, \underline{k}_{P_{v_0}}) \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, \underline{\omega}_{P_{v_0}}, \underline{k}_{P_{v_0}}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

dove $dk(P) \equiv \prod_{f \in P} dk_f$ e $\text{Val}(\Gamma)$, $\hat{\text{Val}}(\Gamma)$ sono i valori dei grafici di Feynman in spazio x e in spazio k , come definiti nel Capitolo 2 (con l' unica differenza che adesso i propagatori hanno un indice di scala e un indice di quasi-particella assegnati). Si noti che la misura di integrazione in spazio k non e' divisa per i fattori $(2\pi)^3$ (o βL^2 nel discreto); il motivo e' che ogni integrazione in dx da' una delta di Dirac (o di Kronecher nel discreto) moltiplicata per $(2\pi)^3$ (o βL^2 nel discreto) che si semplifica con il corrispondente fattore contenuto nella misura di integrazione in spazio k .

Decidiamo allora che l' oggetto da stimare sia il seguente:

$$5.1y \quad \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v}^e, n_{1,v}^e \text{ fissati}}} \left| \mathcal{W} \left(\tau, P_{v_0}, \underline{\omega}_{P_{v_0}}, \underline{k}_{P_{v_0}} \right) \right| \quad (5.6)$$

L' integrale in (5.6) stima il contributo di tutti i grafici che hanno il numero e il tipo di linee esterne fissati, e hanno inoltre fissati i valori degli impulsi e degli indici di settore esterni. Possiamo in particolare immaginare che gli impulsi e gli indici di settore esterni siano assegnati in modo compatibile con la regola di conservazione dell' impulso.

Abbiamo scelto la forma della norma in (5.6) pensando alle stime per i coefficienti di ordine n della funzione beta (vedi piu' sotto). In questo paragrafo sceglieremo di stimare comunque la norma (5.6) e diremo che il potenziale efficace e' ben definito se e' ben definita la norma (5.6)

Nella discussione che segue avremo bisogno di una stima sulla trasformata di Fourier di $g_\omega^{(h)}(x)$, $\hat{g}_\omega^{(h)}(k)$ (vedi (4.12)) e sulle sue derivate rispetto a k . Vale il seguente Lemma:

LEMMA 5.1 Sia $\hat{g}_\omega^{(h)}(k)$ la trasformata di Fourier del propagatore (4.12). Se $\gamma^{\alpha h}$, $\alpha \geq \frac{1}{2}$ e l' ampiezza dei settori angolari che definiscono le quasi-particelle, allora:

$$5.2 \quad \left| \partial_{k_0}^{n_0} \partial_{k_\parallel}^{n_1} \partial_{k_\perp}^{n_2} g_\omega^{(h)}(k) \right| \leq C_{n_0+n_1+n_2} \gamma^{-(n_0+n_1+\alpha n_2+1)h} \quad (5.7)$$

Dimostrazione. E' sufficiente derivare, mettere in evidenza i fattori dimensionali e tenere conto delle proprieta' delle funzioni f e χ (C^∞ a supporto compatto). Affinche' ogni derivata rispetto a k^\perp abbia dimensione $\gamma^{-\alpha h}$ e' necessario, come gia' discusso nell' Appendice A2, che $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Scriviamo il piu' esplicitamente possibile il contributo a $\mathcal{W} \left(\tau, P_{v_0}, \underline{\omega}_{P_{v_0}}, \underline{k}_{P_{v_0}} \right)$ corrispondente ad un singolo grafico di Feynman $\Gamma \in \mathcal{G}(P_{v_0})$ (che e' proprio $\frac{1}{n(\tau)} \int dk (I_{v_0} \setminus P_{v_0}) \text{Val}(\Gamma)$).

Avremo bisogno delle seguenti definizioni. Siano:

$\tilde{n}_{0,v}$ il numero di propagatori ottenuti contraendo due campi $\psi_{k,\omega}$ interni all' ammasso G_v ma non all' ammasso $G_{\bar{v}}$, $\bar{v} > v$,

$\tilde{n}_{1,v}$ il numero di propagatori ottenuti contraendo un campo $e_\omega(\mathbf{k})\psi_{k,\omega}$ con un campo $\psi_{k,\omega}$, interni all' ammasso G_v ma non agli ammassi $G_{\bar{v}}$, $\bar{v} > v$,

$\tilde{n}_v \equiv \tilde{n}_{0,v} + \tilde{n}_{1,v}$,

$F^{(v)}$ il valore del sottografico corrispondente all' ammasso G_v , integrato sugli impulsi e sulle ω delle linee contenute in G_v ,

$\tilde{k}^{(v)}$ l' insieme degli impulsi da integrare in corrispondenza di ogni ammasso G_v (impulsi di ciclo dell' ammasso G_v),

$k_{ext}^{(v)}$ gli impulsi esterni all' ammasso G_v ,

s_v il numero di rami uscenti dal vertice v dell' albero τ (o anche il numero di sottoammassi massimali contenuti nell' ammasso G_v),

$n_{0,v}^e$ il numero di campi $\psi_{k,\omega}^\pm$ che escono dal cluster G_v ,

$n_{1,v}^e$ il numero di campi $e_\omega(\mathbf{k})\psi_{k,\omega}^\pm$ che escono dall' ammasso G_v ,
 $n_v^e \equiv n_{0,v}^e + n_{1,v}^e$, ossia $n_v^e = |P_v|$,
 n^e il numero di linee uscenti dal grafico (ossia $n^e \equiv n_{v_0}^e$),
 $m_{2,\nu}$ il numero dei vertici di tipo ν contenuti nell' ammasso G_v ,
 $m_{2',\nu}$ il numero dei vertici di tipo α contenuti nell' ammasso G_v ,
 $m_{4,\nu}$ il numero dei vertici di tipo λ contenuti nell' ammasso G_v .

L' integrale a cui siamo interessati e' il seguente:

$$\begin{aligned}
 & \int dk(I_{v_0} \setminus P_{v_0}) \hat{\text{Val}}(\Gamma) = \\
 5.3 \quad & = \prod_{\substack{v \in \tau \\ v \text{ non p. f.}}} \sum_{\omega_1 \dots \omega_{\tilde{n}_v}} \int \prod_{j=1}^{\tilde{n}_v - s_v + 1} d\tilde{k}_j^{(v)} g_{\omega_j}^{(h_v)}(\tilde{k}_j) \prod_{j=1}^{s_v - 1} g_{\omega_{j+(\tilde{n}_v - s_v + 1)}}^{(h_v)}(\tilde{k}^{(v)}, k_{ext}^{(v)}) \prod_{v \text{ p. f.}} r_v
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

dove per comodita' di notazione abbiamo scritto sempre $g_\omega^{(h)}(k)$ al posto di $\hat{g}_\omega^{(h)}(k)$. v (*non*) *p. f.* significa che nella produttoria (non) devono comparire i vertici corrispondenti ai punti finali dell' albero τ . I fattori r_v sono le costanti di accoppiamento corrispondenti agli elementi di grafico v (se v e' un punto finale): possono essere uguali a α_0 , ν_0 o a $\lambda_0 \int dx v_0(x)$.

Nell' integrale precedente abbiamo gia' usato le delta di conservazione sugli impulsi $k + \omega p_F$. In questo modo ci sono alcuni propagatori contenuti nell' ammasso G_v (e non in nessun ammasso piu' piccolo) che hanno gli impulsi fissati, in funzione degli impulsi di ciclo $\tilde{k}^{(v)}$. Questi propagatori sono esattamente $s_v - 1$ e corrispondono alle linee di un albero ancorato T_v tra i sottocluster massimali di G_v (scelto in modo arbitrario tra tutti quelli possibili). Nell' integrale (5.8) i propagatori dell' albero T_v sono quelli della forma $g_{\omega_{j+(\tilde{n}_v - s_v + 1)}}^{(h_v)}(\tilde{k}^{(v)}, k_{ext}^{(v)})$, mentre gli integrali delle linee di ciclo sono quelli della forma $g_{\omega_j}^{(h_v)}(\tilde{k}_j)$.

Nella (5.8) non abbiamo esplicitamente riportato i fattori che compaiono ogni volta che si ha un propagatore uscente da un vertice di tipo α . Abbiamo visto nel Capitolo 4 che da ogni vertice α esce un propagatore $\mathcal{D}_\omega g_\omega^{(h)}(x)$, la cui trasformata di Fourier e' $e_\omega(\mathbf{k})g_\omega^{(h)}(k)$ (vedi (4.15)). Quindi per ogni propagatore uscente da un vertice α nella (5.8) compare, anche se non e' esplicitamente riportato, un fattore $e_\omega(\mathbf{k})$. Piu' esattamente, usando le definizioni introdotte sopra, in corrispondenza del vertice v ci saranno $\tilde{n}_{1,v}$ propagatori $g_\omega^{(h)}(k)$ moltiplicati per il fattore $e_\omega(\mathbf{k})$.

Possiamo riscrivere l' integrale in (5.8) in forma ricorsiva:

$$\begin{aligned}
 5.3a \quad & F^{(v)}(\tilde{k}^{(v')}, k_{ext}^{(v')}; \omega_1 \dots \omega_{\tilde{n}_v}) = \sum_{\omega_1 \dots \omega_{\tilde{n}_v}} \int \prod_{j=1}^{\tilde{n}_v - s_v + 1} d\tilde{k}_j^{(v)} g_{\omega_j}^{(h_v)}(\tilde{k}_j) \cdot \\
 & \cdot \prod_{j=1}^{s_v - 1} g_{\omega_{j+(\tilde{n}_v - s_v + 1)}}^{(h_v)}(\tilde{k}^{(v)}, k_{ext}^{(v)}) \prod_{j=1}^{s_v} F^{(v_j)}(\tilde{k}^{(v)}, k_{ext}^{(v)}; \omega_1 \dots \omega_{\tilde{n}_v})
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

dove, ricordiamolo, v' e' il vertice che precede v , e $F^{(v)}$ e' il valore del sottografico corrispondente all' ammasso G_v , integrato sugli impulsi e sulle ω delle linee contenute in G_v . I fattori $F^{(v_j)}$ corrispondenti a punti finali, vanno interpretati come costanti di accoppiamento r_{v_j} . Anche nella (5.9) non abbiamo scritto esplicitamente i fattori $e_\omega(\mathbf{k})$ che moltiplicano i propagatori delle linee uscenti dai vertici α .

E' conveniente riscrivere i propagatori $g_\omega^{(h)}(k)$ nella forma:

$$\begin{aligned}
 5.4 \quad & g_\omega^{(h)}(k) = \tilde{g}^{(h)}(k_0, |\mathbf{k} + \omega p_F|) \chi_\omega^{(h)}(\theta) \\
 & \tilde{g}^{(h)}(k_0, |\mathbf{k}|) = \frac{f^{(h)} \left[k_0^2 + \left(\frac{\mathbf{k}^2 - p_F^2}{2m} \right)^2 \right]}{-ik_0 + \frac{\mathbf{k}^2 - p_F^2}{2m}}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

dove θ e' l' angolo formato dal vettore \mathbf{k} con l' asse coordinato spaziale 1.

Sostituendo la (5.10) nella (5.9) troviamo:

$$\begin{aligned}
 F^{(v)}(\tilde{k}^{(v')}, k_{ext}^{(v')}; \omega_1 \dots \omega_{\tilde{n}_v}) &= \sum_{\omega_1 \dots \omega_{\tilde{n}_v}} \int \prod_{j=1}^{\tilde{n}_v - s_v + 1} d\tilde{k}_j^{(v)} \tilde{g}^{(h_v)}(\tilde{k}_{0j}, |\tilde{\mathbf{k}}_j + \omega_j p_F|) \chi_{\omega_j}^{(h_v)}(\tilde{\theta}_j) \cdot \\
 5.5 \quad &\cdot \prod_{j=1}^{s_v - 1} \tilde{g}^{(h_v)}(k_{0,j+(\tilde{n}_v - s_v + 1)}, |\mathbf{k}_{j+(\tilde{n}_v - s_v + 1)} + \omega_{j+(\tilde{n}_v - s_v + 1)} p_F|) \chi_{\omega_{j+(\tilde{n}_v - s_v + 1)}}^{(h_v)}(\theta_{j+(\tilde{n}_v - s_v + 1)}) \cdot \\
 &\cdot \prod_{j=1}^{s_v} F^{(v_j)}(\tilde{k}^{(v)}, k_{ext}^{(v)}; \omega_1 \dots \omega_{\tilde{n}_v})
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

dove $\tilde{\theta}_j$ sono gli angoli che gli impulsi di ciclo $\tilde{\mathbf{k}}_j$ formano con l' asse coordinato spaziale 1, $k_{j+(\tilde{n}_v - s_v + 1)}$ sono gli impulsi dell' albero ancorato T_v (sono funzioni di $\tilde{k}_i, \omega_i, k_{ext}, \omega_{ext}$) e $\theta_{j+(\tilde{n}_v - s_v + 1)}$ sono gli angoli che questi impulsi formano con l' asse coordinato spaziale 1.

Supponiamo induttivamente che nella (5.11) le funzioni $F^{(v_j)}(\tilde{k}^{(v)}, k_{ext}^{(v)}; \omega_1 \dots \omega_{\tilde{n}_v})$ dipendano dalle variabili k e ω solo nella forma $(k_0, |\mathbf{k} + \omega p_F|)$. Allora possiamo eseguire nella (5.11) il cambio di variabili $k_i + \omega_i p_F \rightarrow k_i$, opposto a quello eseguito quando abbiamo introdotto le quasi-particelle. In particolare tutti i fattori $e_\omega(\mathbf{k})$ che, come gia' nella (5.8) e nella (5.9), non abbiamo riportato esplicitamente nella (5.11), dopo il cambio di variabili diventano uguali a $e(\mathbf{k})$, e diventano quindi indipendenti da ω . Piu' in generale, una volta eseguito il cambio di variabili, la dipendenza esplicita dalle ω sopravvive solo attraverso le funzioni χ . Quindi si puo' eseguire la somma sulle ω , che cancella tutte le funzioni χ e da' come risultato semplicemente 1 (poiche' le funzioni $\{\chi_\omega\}_{\omega=0}^{2\pi(\gamma^{\alpha h} - 1)}$ sono una partizione del cerchio unitario). Una volta sommate via le ω rimane una funzione che dipende dagli impulsi e dalle ω esterne solo nella forma $(k_{ext,0}, |\mathbf{k}_{ext} + \omega_{ext} p_F|)$.

Rimane da verificare il primo passo di induzione. Bisogna cioe' mostrare che se nella (5.11) le "costanti di accoppiamento" $F^{(v_j)}(\tilde{k}^{(v)}, k_{ext}^{(v)}; \omega_1 \dots \omega_{\tilde{n}_v})$ sono tutte uguali a ν_0, α_0 o λ_0 il risultato dell' integrazione e' una funzione che dipende dagli impulsi e dalle ω esterne solo nella forma $(k_{ext,0}, |\mathbf{k}_{ext} + \omega_{ext} p_F|)$. La dimostrazione e' ovvia se i vertici v_j sono tutti di tipo ν o α , poiche' in questo caso ognuno di essi e' associato ad una costante (ν_0 o α_0 rispettivamente) e non a una funzione di k e ω . Per ogni vertice di tipo λ invece compare l' integrale $\sum_\omega \int dk \hat{\lambda}_0(k + \omega p_F)$, dove k e ω sono l' impulso e l' indice di quasi-particella associati alla linea ondulata dell' elemento di grafico λ e $\hat{\lambda}(k) = \int dx e^{ikx} \lambda_0(x)$. Ma sappiamo, dall' ipotesi di invarianza per rotazioni della teoria, che $\lambda_0(x) = \tilde{\lambda}_0(x_0, |\mathbf{x}|)$, da cui segue che $\hat{\lambda}(k) \hat{\lambda}_0(k_0, |\mathbf{k}|)$, che e' il risultato voluto.

Riassumiamo il risultato trovato nel seguente:

TEOREMA 5.1. *I nuclei integrali dei sottografici a $2l$ gambe esterne godono della seguente proprieta':*

$$5.6 \quad F^{(v)}(k_1 \omega_1, \dots, k_{2l} \omega_{2l}) = \tilde{F}^{(v)}(k_1 + \omega_1 p_F, \dots, k_{2l-1} + \omega_{2l-1}) \tag{5.12}$$

Le funzioni $\tilde{F}^{(v)}(k_1 + \omega_1 p_F, \dots, k_{2l-1} + \omega_{2l-1})$ sono invarianti per rotazioni spaziali, ossia dipendono solo dalle variabili $k_{1,0}, \dots, k_{2l-1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|, \dots, |\mathbf{k}_{2l-1} + \omega_{2l-1}|$ e dagli angoli relativi tra i vettori $\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F, \dots, \mathbf{k}_{2l-1} + \omega_{2l-1}$.

In particolare la funzione a due punti dipende dal suo argomento $k + \omega p_F$ solo attraverso la sua componente temporale k_0 e attraverso il modulo $|\mathbf{k} + \omega p_F|$ del vettore formato dalle sue componenti spaziali.

Dimostrazione. Segue dalla discussione fatta sopra, tenendo presente che la regola di conservazione degli impulsi elimina la dipendenza da una delle variabili (ad esempio quella da $k_{2l} + \omega_{2l}$).

Osservazioni.

(1) E' notevole che l' integrale sugli impulsi e sugli ω interni del valore di un sottografico di Feynman dia come risultato una funzione che non dipende esplicitamente dagli indici ω delle linee esterne (vi dipende solo attraverso la combinazione $k + \omega p_F$). Questa proprieta' ci sara' molto utile in seguito.

(2) La proprieta' espressa dal Teorema 5.1 non dipende dal valore della costante α da cui dipende l' ampiezza dei settori angolari di quasi-particella. Infatti, come gia' spiegato sopra nella dimostrazione del Lemma 5.1, la condizione $\alpha \geq \frac{1}{2}$ serve a garantire delle stime sulle derivate del propagatore. Ma nella dimostrazione del Teorema 5.1 non abbiamo mai avuto bisogno far agire derivate sui propagatori.

(3) Il risultato espresso dal Teorema 5.1, che useremo piu' volte in modo fondamentale in questo lavoro, dipende crucialmente dall' ipotesi dell' invarianza per rotazioni della teoria. Se si rompe l' invarianza per rotazioni con una scelta "inopportuna" del regolarizzatore ultravioletto, la proprieta' enunciato nel Teorema non e' piu' valida. In effetti la teoria non dovrebbe dipendere dalla forma del regolarizzatore ultravioletto, ma la verifica di questa affermazione fisicamente ragionevole e' tutt' altro che semplice, e va oltre gli scopi di questa tesi.

Una volta "sommate via" le ω con il procedimento descritto sopra, l' integrale da stimare (5.8) diventa uguale a:

$$5.7 \quad \prod_{\substack{v \in \tau \\ v \text{ non p. f.}}} \int \prod_{j=1}^{\tilde{n}_v - s_v + 1} d\tilde{k}_j^{(v)} \tilde{g}^{(h_v)}(\tilde{k}_j) \prod_{j=1}^{s_v - 1} \tilde{g}^{(h_v)}(\tilde{k}^{(v)}, k_{ext}^{(v)}) \prod_{v \text{ p. f.}} r_v \quad (5.13)$$

dove ora, ricordiamolo, le proprieta' di supporto compatto di $\tilde{g}^{(h_v)}(k)$ costringono l' impulso k ad modulo vicino a p_F , entro γ^h . Va notato che adesso l' integrale ha la forma che avrebbe avuto se non avessimo introdotto affatto le quasi-particelle. In effetti i risultati discussi in questo paragrafo sono validi anche per una teoria senza quasi-particelle.

A questo punto:

ogni fattore $e(\mathbf{k})$ che moltiplica un propagatore uscente da un vertice α e contenuto nell' ammasso v si puo' stimare con $C\gamma^{h_v}$;

ogni propagatore dell' albero ancorato T_v si puo' stimare con $C\gamma^{-h_v}$ per il Lemma 5.1 (per semplicita' chiameremo sempre C le costanti adimensionali che compaiono nelle stime, anche se in realta' sarebbe necessaria una costante diversa per ogni stima);

ogni integrazione in $d\tilde{k}$ sul corrispondente propagatore $\tilde{g}^{(h_v)}$ si puo' stimare con $C\gamma^{2h_v}\gamma^{-h_v}$ (il fattore γ^{2h_v} viene dall' integrazione e γ^{-h_v} dalla stima sul propagatore), per le proprieta' di supporto compatto della funzione $f^{(h_v)}$ contenuta nel propagatore;

ogni costante di accoppiamento r_v si puo' stimare con ε , per l' ipotesi fatta all' inizio del Capitolo.

Mettendo insieme le precedenti stime e tenendo conto del fatto che il numero di linee di un grafico di ordine n e' stimato da $4n$ otteniamo:

$$5.8 \quad \left| \int dk (I_{v_0} \setminus P_{v_0}) \hat{\text{Val}}(\Gamma) \right| \leq C^m \varepsilon^n \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{h_v \tilde{n}_{1,v}} \gamma^{-h_v \tilde{n}_v} \gamma^{2h_v (\tilde{n}_v - s_v + 1)} = \\ = C^m \varepsilon^n \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{h_v (\tilde{n}_v + \tilde{n}_{1,v} - 2(s_v - 1))} \quad (5.14)$$

Sia ora $h \equiv h_{v_0}$. Possiamo mettere in evidenza davanti ad ogni fattore $\gamma^{h_v \delta}$ (dove δ e' una qualche dimensione) contenuto nella (5.14) un fattore $\gamma^{h \delta}$ e poi riscrivere gli incrementi $(h_v - h)$ come una somma sugli incrementi

tra scale contigue. Valgono le seguenti identita', facilmente verificabili per induzione:

$$\begin{aligned}
 \sum_{v \text{ non p. f.}} (h_v - h)(s_v - 1) &= \sum_{v \text{ non p. f.}} (h_v - h_{v'})(m_{4,v} + m_{2,v} + m_{2',v} - 1) \\
 \sum_{v \text{ non p. f.}} (h_v - h)\tilde{n}_v &= \sum_{v \text{ non p. f.}} (h_v - h'_v)\frac{1}{2}(4m_{4,v} + 2m_{2,v} + 2m_{2',v} - n_v^e) \\
 \sum_{v \text{ non p. f.}} (h_v - h)\tilde{n}_{1,v} &= \sum_{v \text{ non p. f.}} (h_v - h'_v)(m_{2',v} - n_{1,v}^e) \\
 \sum_{v \text{ non p. f.}} (s_v - 1) &= m_{4,v_0} + m_{2,v_0} + m_{2',v_0} - 1 \\
 \sum_{v \text{ non p. f.}} \tilde{n}_v &= \frac{1}{2}(4m_{4,v_0} + 2m_{2,v_0} + 2m_{2',v_0} - n^e) \\
 \sum_{v \text{ non p. f.}} \tilde{n}_{1,v} &= m_{2',v_0} - n_{1,v_0}^e
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Usando le (5.15) possiamo riscrivere la (5.14) nella forma:

$$\begin{aligned}
 \left| \int dk(I_{v_0} \setminus P_{v_0}) \hat{\text{Val}}(\Gamma) \right| &\leq C^n \varepsilon^n \gamma^h \left(2 - m_{2,v_0} - \frac{n_{0,v_0}^e}{2} - \frac{3n_{1,v_0}^e}{2} \right) \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{(h_v - h_{v'}) \left(2 - m_{2,v} - \frac{n_{0,v}^e}{2} - \frac{3n_{1,v}^e}{2} \right)} \equiv \\
 &\equiv C^n \varepsilon^n \gamma^{h\rho_{v_0}} \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{(h_v - h_{v'})\rho_v}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

dove abbiamo definito $\rho_v \equiv 2 - m_{2,v} - \frac{n_{0,v}^e}{2} - \frac{3n_{1,v}^e}{2}$.

La stima ottenuta sulla (5.2) e' allora la seguente:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v}^e, n_{1,v}^e \text{ fissati}}} \left| \mathcal{W}(\tau, P_{v_0}, \underline{\omega}_{P_{v_0}}, \underline{k}_{P_{v_0}}) \right| &= \\
 &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v}^e, n_{1,v}^e \text{ fissati}}} \left| \int dk(I_{v_0} \setminus P_{v_0}) \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(P_{v_0})} \hat{\text{Val}}(\Gamma) \right| \leq \\
 &\leq \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v}^e, n_{1,v}^e \text{ fissati}}} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(P_{v_0})} \left| \int dk(I_{v_0} \setminus P_{v_0}) \hat{\text{Val}}(\Gamma) \right| \leq \\
 &\leq \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v}^e, n_{1,v}^e \text{ fissati}}} \sum_{\substack{\{P_v\} \\ \{P_v\} \text{ fissati}}} \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}(P_{v_0})} C^n \varepsilon^n \gamma^{h\rho_{v_0}} \prod_{v \text{ non p. f.}} \frac{1}{s_v!} \gamma^{(h_v - h_{v'})\rho_v}
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

dove nell' ultimo passaggio la somma sugli indici $\{P_v\}$ e' pensata a P_{v_0} fissato.

E' chiaro che, per avere speranza che il secondo membro sia finito nel limite $h \rightarrow -\infty$, la dimensione ρ_v deve essere negativa (infatti $h_v - h_{v'} \geq 1$). Ma questo per alcuni grafici non e' vero. In particolare:

- (1) $\rho_v = 1$ se $n_{0,v}^e = 2$ e $n_{1,v}^e = 0$,
- (2) $\rho_v = 0$ se $n_{0,v}^e = 4$ e $n_{1,v}^e = 0$,
- (3) $\rho_v = 0$ se $n_{0,v}^e = n_{1,v}^e = 1$,

ed in questo senso abbiamo affermato nel Capitolo precedente che i contributi pericolosi vengono dagli ammassi a due o quattro gambe esterne (chiaramente perche' il contributo di questi sottografici sia nonnullo,

gli impulsi esterni devono essere assegnati compatibilmente alla regola di conservazione degli impulsi). Nelle (1)-(3) considerate sopra non abbiamo tenuto conto delle correzioni alle dimensioni ρ_v dovute ai termini $m_{2,v}$ (vedi definizione seguente la (5.16)); in effetti, anche tenendone conto, la casistica (1)-(3) non cambierebbe affatto, ossia i grafici li' considerati non assumerebbero dimensione negativa: ogni eventuale fattore $\gamma^{-m_{2,v}}$ guadagnato come dimensione interna, sarebbe pagato con un fattore cattivo esterno $\gamma^{-hm_{2,v}}$ (vedi (5.16) e definizione di ρ_v).

Dalle precedenti osservazioni segue che se nella (5.16) compaiono contributi dagli ammassi a due o quattro gambe esterne non si puo' eseguire la somma sulle decorazioni degli alberi τ (ossia la somma sulle frequenze $\{h_v\}_{v \in \tau}$) nel limite in cui $h \rightarrow -\infty$. Diremo che gli ammassi a due o quattro gambe esterne di tipo ψ (o con una gamba esterna di tipo ψ ed una di tipo $e(\mathbf{k})\psi$) hanno bisogno di essere *rinormalizzati*. Per adesso questo significa semplicemente che su questi sottografici e' necessario "fare qualcosa" per rendere sensata tutta la teoria: dovremo considerare un' espansione differente, in cui in particolare i contributi di questi sottografici pericolosi siano trattati in modo "speciale".

Per il momento possiamo chiederci se per lo meno, mettendo artificialmente il vincolo $\rho_v < 0$ nella (5.16) (ossia togliendo "a mano" i sottografici pericolosi che possono eventualmente comparire), si ottiene una teoria sensata, ossia si ottengono dei potenziali efficaci ben definiti nel limite $h \rightarrow -\infty$. Usando il Lemma A3.2 discusso nell' Appendice A3 ed i Lemmi A6.1, A6.2 discussi nell' Appendice A6, e supponendo anche, per semplicita', che i coefficienti $m_{2,v}$ siano identicamente nulli, si trova:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\{P_v\}} \sum_{\substack{\Gamma \in \mathcal{G}(P_{v_0}) \\ \{P_v\} \text{ fissati}}} C^n \varepsilon^n \gamma^{h\rho_{v_0}} \prod_{v \text{ non p. f.}} \frac{1}{s_v!} \gamma^{(h_v - h_{v'})\rho_v} \leq \\
 5.13 \quad & \leq \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\{P_v\}} C^n \varepsilon^n \gamma^{h\rho_{v_0}} \prod_{v \text{ non p. f.}} \frac{\tilde{n}_v!}{s_v!} \gamma^{-\frac{n_v^e}{8} - \frac{1}{2}(h_v - h_{v'})} \leq \\
 & \leq C^n \varepsilon^n \gamma^{h\rho_{v_0}} \frac{(2n)!}{n!} \leq C^n \varepsilon^n \gamma^{h\rho_{v_0}} n!
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

dove:

(1) nel primo passaggio abbiamo stimato il numero di grafici di Feynman con numeri di coordinazione P_v fissati con $\prod_v \tilde{n}_v!$ (Lemma A6.1),

(2) nel primo passaggio abbiamo stimato il prodotto $(h_v - h_{v'})\rho_v$ nel modo seguente:

$$5.14 \quad (h_v - h_{v'})\rho_v \leq (h_v - h_{v'}) \left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{n_{0,v}^e}{4} - \frac{3n_{1,v}^e}{4} \right) \leq -\frac{n_v^e}{8} - \frac{1}{2}(h_v - h_{v'}) \tag{5.19}$$

dove abbiamo sfruttato i vincoli $m_{2,v} = 0$, $2 - \frac{n_{0,v}^e}{2} - \frac{3n_{1,v}^e}{2} \leq -1$, $n_v^e \geq 2$ e $h_v - h_{v'} \geq 1$,

(3) nel secondo passaggio abbiamo stimato la somma sugli alberi decorati dei fattori della forma $\gamma^{-\frac{1}{2}(h_v - h_{v'})}$ con C^n (vedi Lemma A3.2),

(4) nel secondo passaggio abbiamo stimato la somma sugli indici $\{P_v\}$ dei fattori della forma $\gamma^{-\frac{n_v^e}{8}}$ con C^n (vedi Lemma A6.2),

(5) nell' ultimo passaggio abbiamo stimato $\prod_v \tilde{n}_v!$ con $C^n (2n)!$ e $\prod_v \frac{1}{s_v!}$ con $\frac{1}{n!}$, dove abbiamo usato che $\sum_v \tilde{n}_v \leq 2n$ e $\sum_v s_v - 1 = n - 1$,

(6) abbiamo sempre usato, per semplicita' di notazione, la stessa costante C , anche se sarebbe stato necessario usare una diversa costante C per ogni stima.

E' allora chiaro che anche in questo caso particolarmente semplice (e di scarso interesse fisico) la stima sul contributo di ordine n al potenziale efficace su scala h non e' sommabile rispetto ad n (a causa della presenza dell' $n!$), e quindi anche in questo caso i potenziali efficaci non sono ben definiti. Abbiamo gia' accennato al motivo per cui nasce questo problema: usando l' espansione in diagrammi di Feynman e stimando il

modulo della somma sui valori dei grafici con la somma dei moduli, si perdono delle informazioni cruciali sulle cancellazioni tra grafici di segno diverso (dovute, in ultima analisi, alle regole di anticommutazione tra campi Grassmaniani). In altre parole usando l'espansione in grafici di Feynmansi "espande troppo", ossia si introducono delle sommatorie su un numero troppo grande di addendi, che poi non si riescono a controllare.

Si potrebbe direttamente passare all'analisi dell'espansione dei potenziali efficaci in determinanti che, come chiarito dai Lemmi dell' Appendice A5, ha speranza di risultare convergente.

Preferiamo pero' discutere prima la rinormalizzazione in spazio k , con l'espansione in grafici di Feynman, che e' piu' semplice tecnicamente; in questo modo cominceremo a comprendere quali problemi nascono al variare del parametro α che controlla l'ampiezza dei settori angolari di quasi-particella. Vedremo in particolare nei prossimi paragrafi che per $\alpha = 1$ si riescono a definire in modo molto naturale le operazioni di rinormalizzazione, mentre nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ nascono diverse difficolta' tecniche (l'interesse per il caso $\alpha = \frac{1}{2}$ risultera' chiaro piu' avanti, quando discuteremo l'espansione in determinanti).

p.5.2 **5.2.L' operazione di localizzazione e l' espansione rinormalizzata. Stime perturbative per il funzionale beta nel caso $\alpha = 1$.**

Nel Capitolo 4 abbiamo costruito uno sviluppo perturbativo per i potenziali efficaci su scala h $\mathcal{V}^{(h)}$. Nel paragrafo precedente abbiamo poi stimato il valore di ogni grafico di Feynman che contribuisce a $\mathcal{V}^{(h)}$. Abbiamo trovato una stima finita per ogni h finito, ma non uniforme nel limite $h \rightarrow -\infty$.

Questo non e' in nessun modo stupefacente poiche' espandendo i potenziali efficaci e poi risommando tutti i contributi non abbiamo fatto nulla di concettualmente diverso dallo sviluppo perturbativo ingenuo discusso nel Capitolo 2. Quindi naturalmente ci siamo ritrovati con tutte le stesse divergenze gia' discusse nel Capitolo 2.

Cercheremo allora di costruire una diversa serie perturbativa con migliori proprieta' di convergenza nel seguente modo [G2][GN][BG1][BG2].

Definiamo l'azione di un *operatore di localizzazione* \mathcal{L} sui potenziali efficaci $\mathcal{V}^{(h)}$ in modo che, se $\mathcal{R} \equiv \mathbb{1} - \mathcal{L}$,

$$5.15 \quad \mathcal{V}^{(h)} = \mathcal{L}\mathcal{V}^{(h)} + \mathcal{R}\mathcal{V}^{(h)} \quad (5.20)$$

Chiameremo $\mathcal{L}\mathcal{V}^{(h)}$ la parte *rilevante* o *locale* del potenziale efficace e $\mathcal{R}\mathcal{V}^{(h)}$ la parte *irrilevante*. \mathcal{L} agisce sul potenziale efficace nel modo seguente:

$$5.16 \quad \mathcal{L}\mathcal{V}^{(h)}(\psi^{(\leq h)}) = \sum_i v_{i,h} F^i(\psi^{(\leq h)}) \quad (5.21)$$

dove $F^i(\psi^{(\leq h)})$ e' l'integrale di un monomio nei campi ψ e $v_{i,h}$ sono chiamate le *costanti correnti* su scala h (o costanti *efficaci*). La forma esplicita delle funzioni $F^i(\psi^{(\leq h)})$ sara' definita in un modo conveniente piu' avanti.

La definizione (5.21) conduce ad una nuova espansione in alberi, decorati con degli indici \mathcal{R} o \mathcal{L} ad ogni vertice. Vedi Fig. 12 per la definizione degli alberi *rinormalizzati* di ordine piu' basso.

In Fig. 12 va notata in particolare la definizione grafica data nella seconda riga: si e' scelto di indicare con un punto finale su scala $h = 0$ la somma dei sottoalberi con radice associata ad un indice di scala $h = 0$ e ad un indice \mathcal{L} . Ripetendo la costruzione di Fig. 12 per un altro passo si ottiene:

In Fig. 13 va notato che alcuni punti finali sono su scala $h = 0$ invece che, come al solito, su scala $h = 1$. Usando la definizione grafica introdotta in Fig. 12, vediamo che questi punti finali corrispondono a $-\mathcal{L}\mathcal{V}^{(-1)}$. Inoltre in Fig. 13 si introduce la definizione di punti finali su scala $h = -1$ e si stabilisce che ognuno di essi corrisponda a $-\mathcal{L}\mathcal{V}^{(-2)}$.

Queste costruzioni e queste definizioni possono essere iterate, fino ad ottenere un'espansione in alberi rinormalizzati per il potenziale efficace su scala h . Un possibile albero che contribuisce a $\mathcal{V}^{(h)}$ e' quello riportato come esempio in Fig. 14.

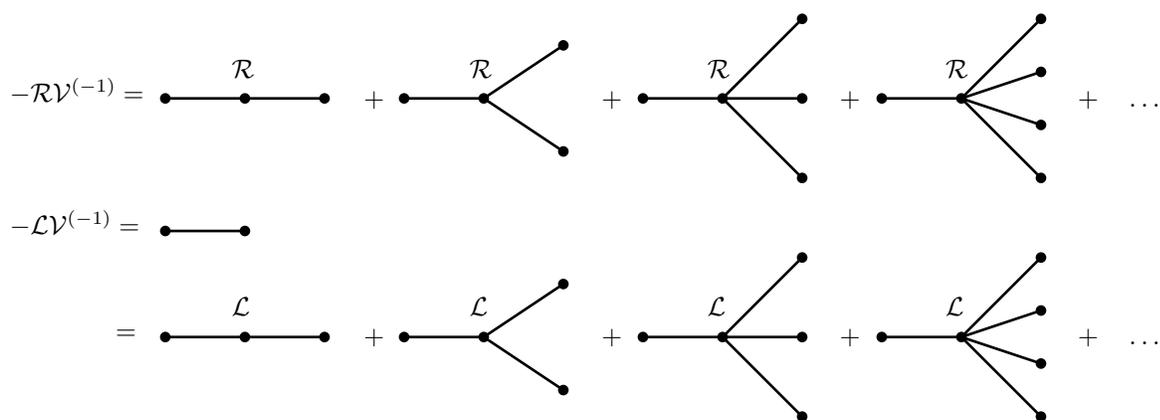


FIG. 12. L' espansione in alberi rinormalizzati di ordine piu' basso. Le radici degli alberi in Fig. 12 sono su scala $h=-1$, i punti di mezzo su scala $h=0$ e i punti finali su scala $h=1$. Fa eccezione il punto finale che appare sulla seconda riga di Fig. 12: la sua scala e' $h=0$ ed equivale alla somma di tutti gli alberi con radice associata ad un indice $h=0$ e ad un indice \mathcal{L} .

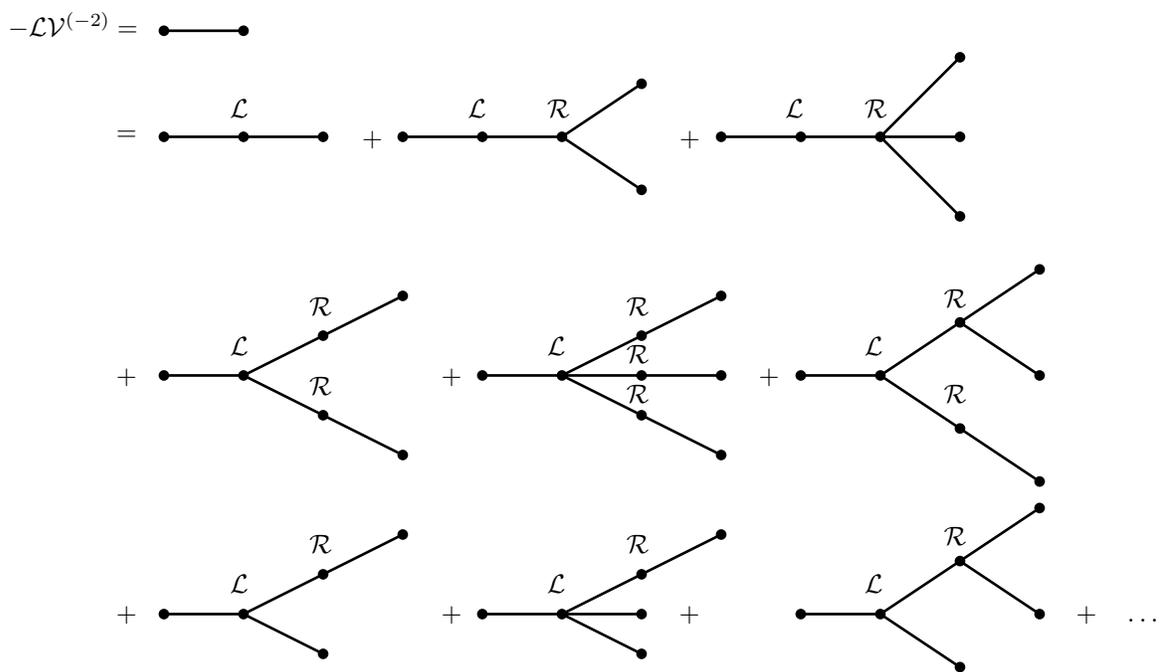


FIG. 13. L' espansione in alberi rinormalizzati al secondo passo iterativo. Le radici degli alberi in Fig. 12 sono su scala $h=-2$, mentre i punti finali sono alcuni su scala $h=1$ ed altri su scala $h=0$. I punti finali su scala $h=0$ hanno il solito significato, mentre quelli su scala $h=0$ corrispondono a $-\mathcal{L}\mathcal{V}^{(-1)}$, vedi Fig. 12.

Vediamo allora che l' espansione in alberi rinormalizzati ha le seguenti differenze rispetto all' espansione

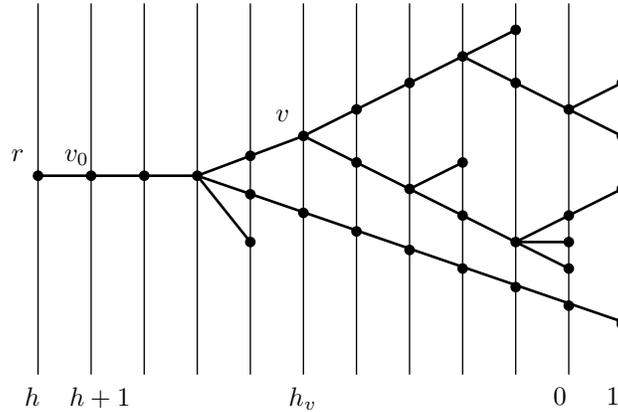


FIG. 14. Un possibile albero rinormalizzato che contribuisce al potenziale efficace su scala h . Ad ogni vertice diverso da v_0 e dai punti finali va associato un indice \mathcal{R} o l'indice \mathcal{L} . Al vertice v_0 va associato o l'indice \mathcal{R} o l'indice \mathcal{L} . I punti finali su scala \bar{h} rappresentano $-\mathcal{L}\mathcal{V}^{(\bar{h}-1)}$.

in alberi non rinormalizzati.

- (1) Ad ogni vertice diverso dai punti finali e dal vertice v_0 e' associato un operatore \mathcal{R} .
- (2) Al vertice v_0 e' associato l'operatore \mathcal{R} o l'operatore \mathcal{L} a seconda che l'albero contribuisca alla parte irrilevante o rilevante di $\mathcal{V}^{(h)}$.
- (3) Ci sono punti finali con scale comprese tra $h+2$ ed 1. Se il punto finale ha scala $\bar{h} < 1$ allora corrisponde ad un termine $-\mathcal{L}\mathcal{V}^{(\bar{h}-1)}$. Se invece ha scala = 1 allora corrisponde ad un termine $-\mathcal{L}H_I$ oppure ad un termine $-\mathcal{R}H_I$, dove H_I e' l'hamiltoniana di interazione (2.31).

E' interessante notare che se al vertice v_0 e' associato l'indice \mathcal{L} allora lo sviluppo in alberi fornisce un modo per calcolare le costanti correnti su scala h in funzione delle costanti correnti su scala maggiore di h (ed in particolare anche delle costanti di accoppiamento del problema originale). Gli alberi con l'indice \mathcal{L} sul primo vertice che segue la radice ci forniscono allora la forma della *funzione beta* definita dalla seguente relazione:

$$5.17 \quad \mathbf{v}_{h-1} = \Lambda \mathbf{v}_h + \beta_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_{h+1}, \dots, \mathbf{v}_0) \tag{5.22}$$

dove \mathbf{v}_h e' il vettore delle costanti correnti su scala h e dove Λ e' un'opportuna trasformazione lineare che sara' definita piu' avanti.

Il problema di scegliere i parametri liberi della teoria, in modo tale che le funzioni abbiano un comportamento asintotico dato (e che si riesca a dimostrare che la serie perturbativa che li definisce e' convergente) puo' essere tradotto in termini della funzione beta definita nella (5.22). Va dimostrato prima di tutto che la funzione beta e' ben definita (almeno ordine per ordine, se vogliamo stimare gli alberi usando lo sviluppo in diagrammi di Feynman). Si puo' poi cercare di controllare il flusso delle costanti correnti generato dalla funzione beta. Se si riesce a mostrare che, per certi valori speciali dei dati iniziali \mathbf{v}_0 (ossia per certi valori speciali dei controtermini contenuti in H_I), il flusso rimane limitato, allora segue (abbastanza) semplicemente che la teoria e' ben definita, nel senso che le funzioni di Schwinger interagenti sono finite.

Vedremo che non e' semplice completare il programma delineato sopra. Iniziamo in questo paragrafo ad affrontare il problema di dimostrare l'esistenza della funzione beta.

Per rendere la discussione meno astratta (e soprattutto, per poter iniziare a stimare esplicitamente i contributi alla funzione beta) e' necessario definire come agisce l'operatore \mathcal{L} sui potenziali efficaci. La discussione del paragrafo precedente suggerisce che \mathcal{L} debba agire in modo non banale sui contributi a $\mathcal{V}^{(h)}$

che vengono dai sottografici a due o quattro gambe esterne. E' naturale definire come segue l' azione di \mathcal{L} su ogni contributo a $\mathcal{V}^{(h)}$ corrispondente a sottografici con numero e tipo di linee esterne fissate (indichiamo per semplicita' con ψ il campo $\psi^{(\leq h)}$):

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L} \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^+ \psi_{k_3, \omega_3}^- \psi_{k_4, \omega_4}^- \\
 & \quad \cdot \delta(k_1 + \omega_1 p_F + k_2 + \omega_2 p_F - k_3 - \omega_3 p_F - k_4 - \omega_4 p_F) f_h^4(\underline{k}_4; \underline{\omega}_4) \equiv \\
 & \equiv f_h^4(\underline{\mathcal{Q}}_4; \underline{\omega}_4) \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^+ \psi_{k_3, \omega_3}^- \psi_{k_4, \omega_4}^- \\
 & \quad \cdot \delta(k_1 + \omega_1 p_F + k_2 + \omega_2 p_F - k_3 - \omega_3 p_F - k_4 - \omega_4 p_F)
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

5.18

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L} \int dk_1 dk_2 \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^- \delta(k_1 + \omega_1 p_F - k_2 - \omega_2 p_F) f_h^2(\underline{k}_2; \underline{\omega}_2) \equiv \\
 & \int dk_1 dk_2 \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^- \delta(k_1 + \omega_1 p_F - k_2 - \omega_2 p_F) \left[f_h^2(\underline{\mathcal{Q}}_2; \underline{\omega}_2) + \right. \\
 & \quad \left. k_{1,0} \partial_{k_{1,0}} f_h^2(\underline{\mathcal{Q}}_2; \underline{\omega}_2) + \frac{e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1)}{\beta} \omega_1 \partial_{\mathbf{k}_1} f_h^2(\underline{\mathcal{Q}}_2; \underline{\omega}_2) \right]
 \end{aligned}$$

dove la β che sta a dividere $e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1)$ e' la velocita' sulla superficie di Fermi, $\beta = \frac{p_F}{m}$ (non va confusa ne' con l' inverso della temperatura assoluta, ne' con la funzione beta). Nel seguito la porremo per comodita' uguale a 1.

\mathcal{L} poi e' zero se agisce sull' integrale di un nucleo con piu' di quattro gambe esterne. Se una delle gambe uscenti dall' ammasso e' di tipo $e_{\omega}(\mathbf{k}) \psi_{k, \omega}^{\pm}$ si include il fattore $e_{\omega}(\mathbf{k})$ nel nucleo f_h e si usano le definizioni sopra. Infine l' azione di \mathcal{L} e' lineare: se, in spazio k , $\mathcal{V}^{(h)}$ e' la somma di diversi contributi, $\mathcal{V}^{(h)} = \sum_i \mathcal{V}_i^{(h)}$, allora $\mathcal{L} \mathcal{V}^{(h)} = \sum_i \mathcal{L} \mathcal{V}_i^{(h)}$.

Si puo' anche pensare che \mathcal{L} agisca sui nuclei a due o quattro gambe esterne nel modo descritto in (5.23) solo se gli impulsi esterni di questi sottografici sono compatibili con la regola di conservazione degli impulsi e se gli impulsi esterni sono compatibili con le funzioni f e χ a supporto compatto su scala h . In caso contrario il valore del sottografico, se inserito in un grafico piu' grande, sarebbe identicamente nullo e quindi non sarebbe affatto pericoloso (non avrebbe senso selezionare il suo contributo). Ma allora possiamo pensare che le definizioni in (5.23) valgano solo nel caso in cui i vettori che definiscono le direzioni dei settori angolari associati alle gambe esterne ($\omega_1, \dots, \omega_4$) siano compatibili con la regola di conservazione dell' impulso "a meno di γ^h " (ossia solo nel caso in cui la somma dei vettori ω_1, \dots e' uguale a zero a meno di γ^h). Nel seguito supporremo sempre implicitamente che valga una tale condizione sugli indici delle linee esterne.

Le definizioni (5.23) vanno un po' corrette nel caso in cui β e L siano finiti. Prima di tutto in questo caso le derivate vanno interpretate come derivate discrete (vedi Appendice A2). Inoltre se β e L sono finiti k non puo' diventare esattamente zero. Definiamo:

$$\begin{aligned}
 0_{\beta}^{\pm} & \equiv \pm \frac{\pi}{\beta} \\
 0_{L, \omega}^{(j)} & \equiv \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}_0^{(j)} - p_F \omega, \quad j = 1, \dots, \bar{j}_{\omega}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

5.19

dove $\mathbf{n}_0^{(j)} \in \mathbb{Z}$ e' tale che

$$\left| \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}_0^{(j)} - p_F \omega \right| = \min_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}} \left| \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} - p_F \omega \right| \tag{5.25}$$

5.20

Usando le definizioni (5.24) (5.25) possiamo stabilire che l' operatore \mathcal{L} localizzi i nuclei integrali in $k = (0_{\beta}^{\pm}, 0_{L, \omega}^{(j)})$; poiche' la scelta degli indici \pm, j sarebbe arbitraria, si puo' poi stabilire di simmetrizzare l' espressione locale rispetto a questi indici.

La discussione sistematica della rinormalizzazione con questa definizione di localizzazione appesantirebbe molto la dimostrazione successiva, senza per altro introdurre idee diverse da quelle discusse piu' sotto. Quindi preferiamo definire formalmente l' operatore \mathcal{L} come in (5.23), rimandando ai lavori [Bo][BM] per una trattazione piu' sistematica e soddisfacente.

Usando le (5.23) vediamo che l' azione di \mathcal{R} sui nuclei integrali f_h e' la seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f_h^4(\underline{k}_4; \underline{\omega}_4) &\equiv f_h^{4,R}(\underline{k}_4; \underline{\omega}_4) = f_h^4(\underline{k}_4; \underline{\omega}_4) - f_h^4(\underline{0}_4; \underline{\omega}_4) \\ \mathcal{R}f_h^2(\underline{k}_2; \underline{\omega}_2) &\equiv f_h^{2,R}(\underline{k}_2; \underline{\omega}_2) = f_h^2(\underline{k}_2; \underline{\omega}_2) - f_h^2(\underline{0}_2; \underline{\omega}_2) - \\ &- k_{1,0} \partial_{k_{1,0}} f_h^2(\underline{0}_2; \underline{\omega}_2) - -e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1) \omega_1 \partial_{\mathbf{k}_1} f_h^2(\underline{0}_2; \underline{\omega}_2) \end{aligned} \quad (5.26)$$

La parte rilevante del potenziale efficace su scala h e' data da:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathcal{V}^{(h)} &= \gamma^h \nu_h F_\nu + \alpha_h F_\alpha + \zeta_h F_\zeta + \lambda_h F_\lambda \\ F_\nu &= \sum_\omega \int dk_1 dk_2 \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^- \delta(k_1 + \omega_1 p_F - k_2 - \omega_2 p_F) \\ F_\alpha &= \sum_\omega \int dk_1 dk_2 e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1) \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^- \delta(k_1 + \omega_1 p_F - k_2 - \omega_2 p_F) \\ F_\zeta &= \sum_\omega \int dk_1 dk_2 (-ik_{1,0}) \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^- \delta(k_1 + \omega_1 p_F - k_2 - \omega_2 p_F) \\ F_\lambda &= \sum_\omega \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^+ \psi_{k_3, \omega_3}^- \psi_{k_4, \omega_4}^- \delta(k_1 + \omega_1 p_F + k_2 + \omega_2 p_F - k_3 - \omega_3 p_F - k_4 - \omega_4 p_F) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Osservazioni.

(1) Dal Teorema 5.1 segue che i nuclei integrali a 2 gambe esterne, che qui abbiamo chiamato $f_h^2(\underline{k}_2; \underline{\omega}_2)$, sono in effetti funzioni solo di $(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|)$. Quindi le costanti correnti ν_h, α_h, ζ_h non dipendono da ω (sono effettivamente delle costanti e non delle funzioni di ω). La costante corrente λ_h e' invece effettivamente una funzione di $\underline{\omega}_2$.

(2) Il motivo per cui abbiamo scelto di definire la costante corrente ν_h con un fattore γ^h risultera' chiaro piu' avanti, quando eseguiremo le stime sui coefficienti della funzione beta di ordine n .

(3) Dalla (5.27) vediamo che il vettore \mathbf{v}_h delle costanti correnti e' $\mathbf{v}_h \equiv (\nu_h, \alpha_h, \zeta_h, \lambda_h)$ e che l' operatore lineare Λ introdotto nella (5.22) e' tale che $\Lambda \mathbf{v}_h \equiv (\gamma \nu_h, \alpha_h, \zeta_h, \lambda_h)$.

(4) Tra i termini della parte locale compare un nuovo campo della forma $ik_0 \psi$. Per le stime successive conviene quindi ridefinire: $\tilde{n}_{1,v}$ come il numero di propagatori di tipo $ik_0 g_\omega^{(h)}$ o di tipo $e_\omega(\mathbf{k}) g_\omega^{(h)}$ contenuti nell' ammasso v e non in nessun ammasso piu' piccolo; $n_{1,v}^e$ come il numero di campi $ik_0 \psi, e_\omega(\mathbf{k}) \psi$ che escono dall' ammasso v .

(5) Nell' hamiltoniana di interazione del problema originale, $H_I, \zeta_0 = 0$. Quindi, per conservare l' interpretazione fisica del problema, dovrebbe essere possibile fissare il controtermine $\zeta_0 = 0$.

Verifichiamo ora che con le definizioni date sopra ogni sottografico potenzialmente divergente riceve il giusto guadagno dimensionale dall' operazione di rinormalizzazione. Per "giusto" guadagno dimensionale si intende il guadagno dimensionale sufficiente per rendere negativa la dimensione ρ_v : piu' esattamente vogliamo verificare che la dimensione degli ammassi rinormalizzati sia $\tilde{\rho}_v + z_v$, dove

$$\tilde{\rho}_v = 2 - \frac{n_{0,v}^e + 3n_{1,v}}{2} \quad (5.28)$$

e

(1) $z_v = -1$ se $n_{0,v}^e = 4$ e $n_{1,v}^e = 0$,

- (2) $z_v = -2$ se $n_{0,v}^e = 2$ e $n_{1,v}^e = 0$,
 (3) $z_v = -1$ se $n_{0,v}^e = n_{1,v}^e = 1$,
 (4) $z_v = 0$ altrimenti.

In questo modo $\tilde{\rho}_v + z_v \leq -1$ per ogni v .

Si puo' subito notare che l' operazione di rinormalizzazione sul nucleo di un ammasso v a quattro gambe esterne corrisponde a sottrargli il primo termine del suo sviluppo in serie di Taylor. Possiamo scrivere il resto nella seguente forma:

$$\begin{aligned}
 f_h^{4,R}(\underline{k}_4; \underline{\omega}_4) &= f_h^4(k_1, k_2, k_3, k_4; \underline{\omega}_4) - f_h^4(0, 0, 0, 0; \underline{\omega}_4) = \\
 &= f_h^4(k_1, k_2, k_3, k_4; \underline{\omega}_4) - f_h^4(k_1, k_2, k_3, 0; \underline{\omega}_4) + f_h^4(k_1, k_2, k_3, 0; \underline{\omega}_4) - f_h^4(k_1, k_2, 0, 0; \underline{\omega}_4) + \\
 &+ f_h^4(k_1, k_2, 0, 0; \underline{\omega}_4) - f_h^4(k_1, 0, 0, 0; \underline{\omega}_4) + f_h^4(k_1, 0, 0, 0; \underline{\omega}_4) - f_h^4(0, 0, 0, 0; \underline{\omega}_4) = \\
 &= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} f_h^4(k_1, k_2, k_3, tk_4; \underline{\omega}_4) + \int_0^1 dt \frac{d}{dt} f_h^4(k_1, k_2, tk_3, 0; \underline{\omega}_4) + \\
 5.23 \quad &+ \int_0^1 dt \frac{d}{dt} f_h^4(k_1, tk_2, 0, 0; \underline{\omega}_4) + \int_0^1 dt \frac{d}{dt} f_h^4(tk_1, 0, 0, 0; \underline{\omega}_4) = \\
 &= \int_0^1 dt k_4 \partial_{k_4} f_h^4(k_1, k_2, k_3, tk_4; \underline{\omega}_4) + \int_0^1 dt k_3 \partial_{k_3} f_h^4(k_1, k_2, tk_3, 0; \underline{\omega}_4) + \\
 &+ \int_0^1 dt k_2 \partial_{k_2} f_h^4(k_1, tk_2, 0, 0; \underline{\omega}_4) + \int_0^1 dt k_1 \partial_{k_1} f_h^4(tk_1, 0, 0, 0; \underline{\omega}_4)'' ='' \\
 &'' ='' \int_0^1 dt \underline{k}_4 \partial_{\underline{k}_4} f_h^4(t\underline{k}_4; \underline{\omega}_4)
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

La scrittura definita nell' ultima riga di (5.29) e' solamente formale, ma ci tornera' utile poiche', ai fini delle stime successive, le due scritture sono equivalenti (infatti stimeremo dimensionalmente il k che moltiplica i nuclei f e la derivata che agisce su di essi); la scrittura formale pero' e' molto piu' compatta.

Possiamo ottenere un' espressione analoga alla (5.29) anche per $f_h^{2,R}$. L' azione di \mathcal{R} su f_h^2 infatti "as-somiglia molto" a sottrarre i primi due termini dello sviluppo di Taylor attorno a zero. In effetti possiamo scrivere $f_h^{2,R}$ come f_h^2 meno i primi due termini dello sviluppo di Taylor piu' un resto che sara' trascurabile ai fini delle stime successive:

$$\begin{aligned}
 f_h^{2,R}(\underline{k}_2; \underline{\omega}_2) &= \\
 &= \tilde{f}_h^2(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) - \tilde{f}_h^2(0, p_F) - k_{1,0} \partial_{k_0} \tilde{f}_h^2(0, p_F) - \\
 5.24 \quad &- (|\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F| - p_F) \partial_{|\mathbf{k}|} \tilde{f}_h^2(0, p_F) + R(\mathbf{k}_1) \partial_{|\mathbf{k}|} \tilde{f}_h^2(0, p_F) = \\
 &= R(\mathbf{k}_1) \partial_{|\mathbf{k}|} \tilde{f}_h^2(0, p_F) + \int_0^1 dt \underline{k}_2^2 \partial_{\underline{k}_2}^2 f_h^2(t\underline{k}_2; \underline{\omega}_2)
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Nella (5.30) abbiamo usato che il nucleo $f_h^{2,R}(\underline{k}_2; \underline{\omega}_2)$ si puo' scrivere, per il Teorema 5.1, nella forma $\tilde{f}_h^2(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|)$. Inoltre abbiamo scritto la formula di interpolazione solo formalmente, come nell' ultimo passaggio della (5.29); la formula esatta si puo' ricavare seguendo dei passaggi analoghi a quelli della

(5.29). Il resto $R(\mathbf{k})$ esplicitamente ha la seguente forma:

$$\begin{aligned}
 R(\mathbf{k}) &= |\mathbf{k} + \omega p_F| - p_F - e_\omega(\mathbf{k}) = \\
 &= |\mathbf{k} + \omega p_F| - p_F - k^\parallel - \frac{k^\parallel{}^2 + k^\perp{}^2}{2p_F} = \\
 &= \sqrt{(k^\parallel + p_F)^2 + k^\perp{}^2} - p_F - k^\parallel - \frac{k^\parallel{}^2 + k^\perp{}^2}{2p_F} = \\
 5.25 \quad &= \sqrt{p_F^2 \left(1 + \frac{2k^\parallel}{p_F} + \frac{k^\parallel{}^2 + k^\perp{}^2}{p_F^2} \right)} - p_F - k^\parallel - \frac{k^\parallel{}^2 + k^\perp{}^2}{2p_F} = \\
 &= p_F \left(1 + \frac{k^\parallel}{p_F} + \frac{k^\parallel{}^2 + k^\perp{}^2}{2p_F^2} - 1 \right) + o \left[\left(k^\parallel + \frac{k^\parallel{}^2 + k^\perp{}^2}{2p_F} \right)^2 \right] - k^\parallel - \frac{k^\parallel{}^2 + k^\perp{}^2}{2p_F} = \\
 &= o \left[\left(k^\parallel + \frac{k^\parallel{}^2 + k^\perp{}^2}{2p_F} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

dove abbiamo usato che la velocita' sulla superficie di Fermi e' uguale a 1, e che lo sviluppo in serie di Taylor di $\sqrt{1 + \varepsilon}$ e' della forma $1 + \frac{\varepsilon}{2} + o(\varepsilon^2)$. Come al solito $k^\parallel \equiv \mathbf{k}\omega$ e $k^\perp \equiv \mathbf{k}\omega^\perp$.

Va notato che, se il nucleo integrale \tilde{f}_h^2 e' moltiplicato per un fattore $e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1)$ o $ik_{1,0}$ (come nel caso in cui il nucleo integrale corrisponde ad un ammasso di tipo α o ζ), alcuni termini della (5.31) sono identicamente nulli, e l'espressione finale (ultima riga della (5.31)) va corretta. Consideriamo esplicitamente il caso di un nucleo integrale della forma $e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1)\tilde{f}_h^2(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|)$ (il caso in cui al posto di $e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1)$ c' e' $ik_{1,0}$ e' del tutto analogo):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} \left[e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1)\tilde{f}_h^2(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) \right] &= \\
 &= e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1)\tilde{f}_h^2(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) - \left[e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1)\tilde{f}_h^2(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) \right]_{k_1=0} - \\
 &- k_{1,0} \left\{ \partial_{k_0} \left[e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1)\tilde{f}_h^2(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) \right] \right\}_{k_1=0} - e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1) \left\{ \partial_{k^\parallel} \left[e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1)\tilde{f}_h^2(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) \right] \right\}_{k_1=0} = \\
 &= e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1) \left[\tilde{f}_h^2(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) - \tilde{f}_h^2(0, p_F) \right] = \\
 5.24a \quad &= e_{\omega_1}(\mathbf{k}_1) \int_0^1 dt \underline{k}_2 \partial_{\underline{k}_2} f_h^2(t\underline{k}_2; \underline{\omega}_2)
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato che, ovviamente, se calcoliamo in $k = 0$ k_0 o $e_\omega(\mathbf{k})$, otteniamo zero.

Dalle relazioni precedenti (5.29) (5.30) (5.32) vediamo che ogni ammasso rinormalizzato v da', in piu' rispetto ai termini considerati nelle stime non rinormalizzate, un $k^{-z_v} \partial_k^{-z_v}$, dove:

$$z_v = -1 \text{ se } n_{0,v}^e = 4 \text{ e } n_{1,v}^e = 0 \text{ oppure se } n_{0,v}^e = 1 \text{ e } n_{1,v}^e = 1;$$

$$z_v = -2 \text{ se } n_{0,v}^e = 2 \text{ e } n_{1,v}^e = 0.$$

Bisogna pensare che k abbia anche un indice che stabilisce a quale linea uscente dall' ammasso v corrisponde (infatti k e' uno dei vettori di $\underline{k}_{2,4}$ e quindi e' associato ad un indice 1, 2, 3 o 4). $k^{|z_v|}$ va poi integrato con il propagatore $g_\omega^{(h_{v_1})}(k)$ della linea a cui e' associato. Poiche' la linea con propagatore $g_\omega^{(h_{v_1})}(k)$ esce dall' ammasso v , necessariamente $h_{v_1} < h_v$; dimensionalmente $k^{|z_v|}$ fornisce un guadagno $\gamma^{h_{v_1}|z_v|}$ (se α fosse diverso da 1 darebbe un diverso contributo a seconda se stiamo considerando la componente di k parallela o ortogonale ad ω). La derivata $\partial_k^{|z_v|}$ va invece ad agire sugli ammassi piu' interni: se cade sul nucleo su qualche

propagatore su scala $h_{v_2} \geq h_v$, fornisce un fattore dimensionale $\gamma^{-h_{v_2}|z_v|}$. Qui entra in modo fondamentale l' ipotesi che $\alpha = 1$. Se α fosse diverso da 1 la derivata che cade su un propagatore interno darebbe diversi a seconda se stiamo considerando la componente parallela o ortogonale all' ω del propagatore su cui cade. Quindi e' possibile in questo caso che la perdita sia maggiore del guadagno (vedi il prossimo paragrafo per maggiori dettagli).

Tornando esclusivamente al caso $\alpha = 1$ e mettendo insieme i due contributi ricavati sopra, otteniamo il guadagno

$$5.26 \quad \gamma^{-(h_{v_2}-h_{v_1})|z_v|} = \prod_{\substack{\bar{v} \leq v_2 \\ \bar{v}' \geq v_1}} \gamma^{-(h_{\bar{v}}-h_{\bar{v}'})|z_v|} \quad (5.33)$$

che in particolare e' minore di $\gamma^{-(h_v-h_{v'})|z_v|}$ che e' il guadagno cercato.

Il resto $R(\mathbf{k})$ che compare nell' equazione (5.30) fornisce invece un guadagno dimensionale $\gamma^{2h_{v_1}}$. Ad esso e' associata una derivata prima, che corrisponde ad una perdita $\gamma^{-h_{v_2}}$. Quindi il termine $\sim R(\mathbf{k})$ fa guadagnare molto piu' di quanto non faccia perdere, e in questo senso e' trascurabile ai fini delle stime successive.

Prima di proseguire nella discussione dobbiamo notare una cosa importante. Anche se sopra abbiamo usato la possibilita' di scrivere un nucleo integrale $f_h^2(k_1, k_2; \omega_1, \omega_2)$ nella forma $\tilde{f}_h^2(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|)$ (usando il Teorema 5.1), i singoli termini $\sim k \partial_k$ provenienti dalle operazioni di interpolazione "rompono" la simmetria per rotazione dei nuclei integrali. Quindi, dato che piu' avanti vogliamo stimare uno per uno questi termini, abbiamo bisogno di una procedura per cui non si abbia bisogno di decomporre i propagatori $g_\omega^{(h)}$ nel prodotto $\tilde{g}^{(h)} \chi_\omega^{(h)}$, e di sfruttare l' ipotesi che i nuclei integrali interni siano funzioni solo delle variabili $(k_0, |\mathbf{k} + \omega p_F|)$. Riotteniamo allora le stime non rinormalizzate usando la seguente nuova procedura.

Consideriamo l' integrale (5.8), (5.9). Sommiamo prima di tutto sulle ω corrispondenti ai propagatori dell' albero ancorato. Per le proprieta' di supporto compatto dei propagatori e per la regola di conservazione degli impulsi questa somma da' un risultato $O(1)$, e le ω di questi propagatori vengono ad essere fissate come funzioni degli impulsi e degli ω esterni. Questa proprieta' e' vera anche prescindendo dal risultato del Teorema 5.1. Decidiamo poi di realizzare per ultima la somma sulle ω restanti. Stimiamo prima ogni propagatore con γ^{-h_v} (o con 1 se e' un propagatore uscente da un vertice di tipo α o ζ), e ogni integrazione in dk con $\gamma^{(2+\alpha)h_v}$. A questo punto, una volta ottenuta una stima uniforme rispetto agli ω , possiamo sommare sugli ω rimasti e ottenere, per ogni somma, un fattore $\gamma^{-\alpha h_v}$. Mettendo insieme tutti i fattori dimensionali otteniamo:

$$5.28a \quad \prod_{v \text{ non } p. f.} \gamma^{-h_v \tilde{n}_v} \gamma^{h_v \tilde{n}_{1,v}} \gamma^{h_v(2+\alpha)(\tilde{n}_v - s_v + 1)} \gamma^{-\alpha h_v(\tilde{n}_v - s_v + 1)} \quad (5.34)$$

che e' equivalente al risultato ottenuto nella (5.14). Avremmo potuto usare anche la' questa procedura ma abbiamo preferito introdurre da subito le proprieta' di invarianza per rotazioni riassunte nel Teorema 5.1 (che abbiamo usato anche piu' sopra per scrivere in modo conveniente le operazioni di rinormalizzazione). Inoltre abbiamo preferito usare un procedimento che rendesse palese il fatto che le stime perturbative non rinormalizzate si possono ottenere anche senza introdurre le quasi-particelle.

Nel seguito bisognera' pensare di usare il procedimento qui introdotto per realizzare le stime (non lo ripeteremo in dettaglio poiche' sara' del tutto analogo anche applicato ai grafici rinormalizzati).

Torniamo all' equazione (5.33). La (5.33) fornisce, come abbiamo detto sopra, il guadagno dimensionale voluto. Il problema pero', facendo le stime in modo cosi' ingenuo, e' che, nel caso di rinormalizzazioni contenute una dentro l' altra, potrebbe accadere che le derivate di cui sopra si accumulino tutte su uno stesso propagatore di un qualche ammasso interno, e quindi che appaia qualche derivata di ordine $m = O(n)$. Ma $|\partial^m g_\omega^h(k)|$ puo' essere maggiorato solo da $C \gamma^{-(m+1)h} (m!)^\delta$, con $\delta > 1$ poiche' abbiamo scelto dei propagatori non analitici (li abbiamo scelti a supporto compatto); quindi rispetto al fattore che ci serve otteniamo in piu' un pericoloso fattore $(m!)^\alpha$ che ci fa saltare le stime n!.

Il modo in cui si risolve questo problema e' notando che in effetti non puo' mai succedere che si accumulino piu' di due derivate su uno stesso propagatore: a proposito studiamo in dettaglio l' effetto della rinormalizzazione su un ammasso gia' rinormalizzato.

Procediamo nel seguente modo: scriviamo tutto l' integrale corrispondente al grafico che stiamo studiando con le rinormalizzazioni nella forma di sottrazioni (cioe' scriviamo l' integrale totale senza effettuare nessuna operazione di interpolazione). A questo punto iniziamo a sostituire solo negli ammassi piu' esterni le espressioni originali con quelle interpolate. Come spiegato sopra queste rinormalizzazioni forniscono un fattore aggiuntivo (rispetto al valore dell' ammasso non rinormalizzato) $k^{|z_v|} \partial_k^{|z_v|}$, se v e' l' ammasso in cui abbiamo iniziato a sostituire la formula interpolata. Il $k^{|z_v|}$ si comporta esattamente come descritto sopra (fornendo un guadagno $\gamma^{h_{v_1}|z_v|}$). La derivata $\partial_k^{|z_v|}$ invece puo' andare a cadere o direttamente su un propagatore contenuto (solo) nel ammassi v (e che quindi si trova su scala h_v) o su un ammasso rinormalizzato $v_1 > v$. Nel primo caso otteniamo senz' altra pena il fattore dimensionale voluto. Nel secondo abbiamo due sottocasi: (a) l' ammasso rinormalizzato v_1 e' un sottografico a quattro gambe: in questo caso

$$5.27 \quad \partial_k [\mathcal{R}f_{h_{v_1}}^4(k)] = \partial_k [f_{h_{v_1}}^4(k) - f_{h_{v_1}}^4(0)] = \partial_k f_{h_{v_1}}^4(k) \quad (5.35)$$

e quindi la derivata cancella completamente la rinormalizzazione interna; una derivata seconda fornirebbe semplicemente $\partial_k^2 f_{h_{v_1}}^4(k)$;

(b) l' ammasso rinormalizzato v_1 e' un sottografico a due gambe: in questo caso

$$5.28 \quad \partial_k [\mathcal{R}f_{h_{v_1}}^2(k)] = \partial_k [f_{h_{v_1}}^2(k) - f_{h_{v_1}}^2(0) - k \partial_k f_{h_{v_1}}^2(0)] = \partial_k f_{h_{v_1}}^2(k) - \partial_k f_{h_{v_1}}^2(0) \quad (5.36)$$

e quindi , interpolando, otterremmo un k da far risalire lungo il propagatore corrispondente, mentre la derivata prima diventerebbe una derivata seconda. Se su v_1 agisse direttamente una derivata seconda, otterremmo semplicemente $\partial_k^2 f_{h_{v_1}}^2(k)$ e la rinormalizzazione interna sarebbe del tutto cancellata.

Notiamo che nei due casi descritti sopra (con una notazione formale che puo' essere facilmente tradotta in formule esatte) abbiamo trascurato l' eventualita' che gli argomenti delle funzioni $f_{h_{v_1}}(k)$ su cui i ∂_k agiscono siano, invece che proprio k , funzioni di k e delle variabili di interpolazione t ; il motivo e' che per la regola di conservazione degli impulsi lungo le linee del grafico, gli argomenti delle funzioni $f_{h_{v_1}}(k)$ possono essere solo funzioni lineari degli impulsi in gioco e delle variabili di interpolazione t : quindi la discussione sopra rimane inalterata (tutto quello che potrebbe accadere sarebbe l' apparizione di un segno - oppure di qualche t a moltiplicare tutta l' espressione, il che non cambia le stime, anzi nel secondo caso le migliora).

Induttivamente vedo che non si producono mai derivate di ordine superiore a due.

In ogni caso le derivate che cadono sempre piu' all' interno nel grafico (provenienti dalla rinormalizzazione dell' ammasso v) ad un certo punto finiscono su un propagatore su scala $h_{v_2} > h_v$ e danno una perdita $\gamma^{-h_{v_2}}$; ad ognuna di queste derivate e' associato per costruzione uno dei k che abbiamo fatto risalire lungo i propagatori e quindi i fattori aggiuntivi forniti dalla rinormalizzazione possono essere tutti scritti nella forma (5.33).

Nel procedimento di rinormalizzazione descritto sopra si generano vari contributi: infatti ogni volta che si genera una derivata si ha la liberta' di scegliere su quale propagatore interno andarla a far cadere; per ogni scelta si ottiene un diverso addendo, che e' uno dei contributi al valore del grafico. Dato che l' oggetto che dobbiamo stimare e' la somma di tutti questi contributi, dobbiamo anche stimare il numero di termini della somma. Dalla discussione precedente sappiamo che su ogni propagatore possono cadere o nessuna o una o due derivate, quindi abbiamo al massimo 3^{2n} modi di scegliere quante derivate agiscono su ogni propagatore (dove $2n$ e' una stima sul numero di propagatori di un grafico di ordine n).

Ma per ognuna di queste scelte rimane un' ambiguita': la derivata che agisce su un dato propagatore contenuto (solo) nell' ammasso \bar{v} puo' provenire da una qualsiasi delle rinormalizzazioni degli ammassi $v < \bar{v}$. L'

ambiguita' nasce quando una derivata dovuta alla rinormalizzazione dell' ammasso v cade, invece che direttamente su un propagatore su scala h_v , su uno dei nuclei integrali corrispondenti ai sottoammassi v_1, \dots, v_{s_v} , diciamo su v_1 . Ogni volta che questo succede una delle derivate corrispondenti alla rinormalizzazione dell' ammasso v_1 viene sostituita dalla derivata proveniente dalla rinormalizzazione dell' ammasso v (vedi (5.35), (5.36)).

E' possibile allora che, scegliendo di far cadere la derivata proveniente dalla rinormalizzazione di v alternativamente sul sottoammasso v_1 o sul sottoammasso v_2 (ad esempio), si generino due configurazioni che hanno lo stesso numero di derivate che agiscono sugli stessi propagatori, ma con le derivate provenienti dalle rinormalizzazioni di diversi ammassi. Per eliminare l' ambiguita' allora, per ogni fissata scelta del numero di derivate che agiscono sui propagatori del grafico, scegliamo in ogni ammasso v i due nuclei integrali (degli s_v possibili) su cui andare a far cadere le (al massimo) due derivate provenienti dalla rinormalizzazione di v . A questo punto ogni ammasso "possiede" un dato numero (0, 1 o 2) di derivate la cui origine e' assegnata (ossia per le quali e' noto dalla rinormalizzazione di quale ammasso esterno sono state generate). Alcuni ammassi (diciamo ad esempio l' ammasso \bar{v}) possiedono due derivate provenienti da due rinormalizzazioni piu' esterne diverse: quindi se abbiamo scelto di far cadere una di queste derivate su un propagatore su scala $h_{\bar{v}}$ dobbiamo ancora decidere quale delle due usare sul dato propagatore.

In definitiva il numero di termini generati dalle operazioni di rinormalizzazione sono stimati da

$$5.28b \quad 3^{2n} 2^{2n} \prod_{\substack{v \text{ non p. f.} \\ v \text{ non banali}}} s_v^2 \quad (5.37)$$

Sappiamo (vedi Appendice A3, (A3.3)) che il numero di vertici non banali diversi dai punti finali ($|V_{nt}(\tau)| - |V_f(\tau)|$) che ha l' albero τ che stiamo considerando e' minore di $n - 1$ e che gli s_v soddisfano al vincolo $\sum_{\substack{v \text{ non p. f.} \\ v \text{ non banali}}} s_v = |V_{nt}(\tau)| - 1$ (vedi sempre Appendice A3). Quindi $\sum_{\substack{v \text{ non p. f.} \\ v \text{ non banali}}} s_v \leq n - 1 + n - 1 < 2n$.

Usando l' ultima disuguaglianza ed il fatto che il massimo del prodotto di $|V_{nt}(\tau)| - |V_f(\tau)|$ termini con la somma fissata si ottiene quando tutti i fattori sono uguali tra loro, troviamo:

$$5.29 \quad \prod_{\substack{v \text{ non p. f.} \\ v \text{ non banali}}} s_v^2 \leq \left(\frac{2n}{|V_{nt}(\tau)| - |V_f(\tau)|} \right)^{2(|V_{nt}(\tau)| - |V_f(\tau)|)} \quad (5.38)$$

Massimizzando il secondo membro della (5.38) rispetto a $|V_{nt}(\tau)| - |V_f(\tau)|$ con il vincolo che $|V_{nt}(\tau)| - |V_f(\tau)| \leq n - 1$ si ottiene:

$$5.30 \quad \prod_{\substack{v \text{ non p. f.} \\ v \text{ non banali}}} s_v^2 \leq e^{\frac{4n}{e}} \quad (5.39)$$

Ma allora il numero di termini generati dalle operazioni di rinormalizzazione si puo' stimare, come voluto, con C^n .

A questo punto abbiamo ottenuto tutti i guadagni dimensionali giusti senza i pericolosi fattori $(m!)^\delta$. Nella discussione sopra abbiamo solo trascurato il fatto che alcuni dei k che risalgono il grafico possano andare a cadere su una delle linee esterne. In questo caso non bisognerebbe eseguire nessuna integrazione su k e quindi non si otterrebbe il giusto guadagno $\gamma^{h_{v_1}}$. Dalle definizioni (5.23) delle operazioni di rinormalizzazione risulta pero' chiaro che abbiamo liberta' di scegliere su quale delle linee esterne far cadere il k proveniente dalla rinormalizzazione. Possiamo allora decidere di far cadere i k provenienti dalla rinormalizzazione dell' ammasso v sempre su una linea contenuta nell' ammasso v' (che e' quello che precede immediatamente v nell' ordinamento indotto da τ). Questo e' possibile poiche' il grafico in considerazione e' connesso. Scegliendo ogni volta in modo conveniente la linea su cui far cadere k possiamo far si' che le linee esterne non siano associate a nessuno di questi fattori.

Riassumiamo qui tutti i fattori dimensionali che abbiamo ottenuto fino ad adesso (bisogna pensare di averli ottenuti con una procedura analoga a quella descritta prima della (5.34)). I fattori dimensionali associati ad un grafico di Feynman (compatibile con un albero τ) che contribuisce a $\mathcal{L}^{(h)}$ sono i seguenti:

$$5.31 \quad \gamma^{h\tilde{\rho}_{v_0}} \gamma^{-hm_{2,v_0}} \prod_{v \notin V_f(\tau)} \gamma^{(h_v-h_{v'})\tilde{\rho}_v} \gamma^{-(h_v-h_{v'})m_{2,v}} \gamma^{(h_v-h_{v'})z_v} \prod_{v \in V_f(\tau)} \gamma^{h_{v'}\chi(v \text{ e' di tipo } \nu)} \quad (5.40)$$

dove.

- (1) $v \notin V_f(\tau)$ equivale a v non p. f.,
- (2) i fattori $\gamma^{(h_v-h_{v'})\tilde{\rho}_v} \gamma^{-(h_v-h_{v'})m_{2,v}}$ sono quelli gia' presenti nelle stime non rinormalizzate (abbiamo solo usato la definizione (5.28) per riscrivere $\rho_v = \tilde{\rho}_v - m_{2,v}$),
- (3) i fattori $\gamma^{(h_v-h_{v'})z_v}$ sono i guadagni dimensionali provenienti dalle rinormalizzazioni,
- (4) la funzione $\chi(\text{condizione})$ e' la funzione = 1 quando la condizione e' verificata e = 0 quando la condizione non e' verificata,
- (5) i fattori $\gamma^{h_{v'}\chi(v \text{ e' di tipo } \nu)}$ tengono conto della definizione della costante corrente ν_h (che e' appunto definita con un fattore γ^h davanti).

E' facile convincersi che

$$5.32 \quad \gamma^{-hm_{2,v_0}} \prod_{v \notin V_f(\tau)} \gamma^{-(h_v-h_{v'})m_{2,v}} \prod_{v \in V_f(\tau)} \gamma^{h_{v'}\chi(v \text{ e' di tipo } \nu)} = 1 \quad (5.41)$$

da cui risulta evidente il vantaggio di definire come sopra la costante corrente ν_h . Va notato che il fattore globale γ^h che sopravvive nel caso il grafico in questione abbia due gambe esterne, viene riassorbito nella definizione di ν_h .

Una volta verificato che i fattori dimensionali forniscono la giusta stima, va ancora controllato che gli integrali che abbiamo (in modo sottinteso) eseguito per ottenere i fattori dimensionali non portino degli ulteriori fattori "cattivi" che rovinino le stime $n!$. Infatti non e' garantito a priori che questo non succeda, visto che adesso gli integrali da stimare sono un po' diversi da quelli trattati nel precedente paragrafo: adesso ci sono in piu' i fattori k provenienti dalle rinormalizzazioni e gli argomenti dei propagatori sono calcolati in impulsi "interpolati". Basta pero' notare due cose:

(a) ogni integrale in dk che bisogna eseguire contiene almeno un propagatore calcolato esattamente in k , cioe' in ogni integrale ho un propagatore, nel cui argomento non compaiono ne' le variabili di interpolazione t , ne' il valore di altri impulsi k' (vedi (5.8), (5.9) e nota che per ogni impulso di ciclo \tilde{k}_i compare il corrispondente propagatore $g_{\omega_i}^{(h_v)}(\tilde{k}_i)$).

(b) ognuno dei k che estraggo dalle operazioni di rinormalizzazione e e' associato per costruzione ad un propagatore, il cui argomento e' proprio quel k (vedi discussione precedente la (5.33)). Quindi ogni k puo' essere stimato, una volta estratto il fattore dimensionale, con γ (per la proprieta' di supporto compatto del propagatore a cui e' associato).

Le osservazioni (a) e (b) implicano che possiamo stimare ogni propagatore dell' albero ancorato con C , e quelli associati con le integrazioni in dk con $Cf^{(h_v)}(k_0^2 + e_\omega(k)^2)\chi_\omega^{(h)}$ (dove f e χ sono le funzioni a supporto compatto contenute in $g^{(h_v)}(k)$).

In definitiva ogni k che viene fuori dalle operazioni di rinormalizzazione, ogni propagatore e ogni integrazione in dk si possono stimare con una costante $O(1)$. Il numero delle costanti che appare e' $O(n)$, poiche' sia il numero di linee del grafico (e quindi il numero di integrazioni e di propagatori) che il numero di operazioni di rinormalizzazione (e quindi il numero di K associati alle operazioni di rinormalizzazione) e' $O(n)$.

Infine l' integrazione in dt (che eseguiamo per ultima) da' 1 (poiche' le stime sopra sono tutte uniformi in t).

Ragionando come nel paragrafo precedente e supponendo che le costanti correnti possano essere tutte stimate da una costante ε , otteniamo le stime $n!$ per i coefficienti di ordine n della funzione beta.

Riassumiamo la discussione di questo paragrafo nel seguente Teorema.

TEOREMA 5.2 Consideriamo la quantita' in (5.6),

$$5.1y \quad \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v}^e, n_{1,v}^e \text{ fissati}}} \left| \mathcal{W} \left(\tau, P_{v_0}, \underline{\omega}_{P_{v_0}}, \underline{k}_{P_{v_0}} \right) \right| \quad (5.42)$$

in cui l' albero τ sia un albero rinormalizzato, con un indice \mathcal{L} associato al primo vertice seguente la radice. La (5.6) e' una stima per il coefficiente di ordine n della funzione beta. L'operatore \mathcal{L} e' definito nella (5.23). Supponiamo che il flusso delle costanti correnti sia limitato, ossia che

$$5.34 \quad \sup_{\substack{h \in \mathbb{Z} \\ h \leq 0}} \max\{|\nu_h|, |\alpha_h|, |\zeta_h|, |\lambda_h|\} \leq \varepsilon \quad (5.43)$$

per qualche costante ε .

Allora la (5.6) si puo' stimare con

$$5.35 \quad C^n \varepsilon^n n! \quad (5.44)$$

per qualche costante C .

Osservazione.

Andrebbe a posteriori verificata l' ipotesi che effettivamente esistono dei dati iniziali \mathbf{v}_0 per cui il flusso generato dalla funzione beta rimanga limitato. Dato che dal Teorema 5.2 non segue l' esistenza in senso non perturbativo della funzione beta, la discussione del problema sarebbe priva di senso e preferiamo allora non entrarvi affatto. Nei capitoli seguenti, in cui si discuterà l' esistenza in senso non perturbativo della funzione beta, affronteremo (e risolveremo) il problema di dimostrare che il flusso di ν_h rimane limitato fino ad una certa scala h_β (vedremo che questo sarà sufficiente agli scopi di questo lavoro). In ogni caso, anche supponendo che la funzione beta sia ben definita in senso non perturbativo, il problema di controllare il flusso da essa generato sulle costanti correnti \mathbf{v}_h fino ad $h = -\infty$ e' tutt' altro che banale; e' anzi un problema aperto (non si riesce a controllare, neanche qualitativamente, se e a quale punto fisso converge).

p.5.3 5.3. Stime perturbative per il funzionale beta nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$.

Abbiamo già accennato nel paragrafo alle difficoltà che possono nascere nel caso in cui $\alpha \neq 1$. In questo paragrafo vogliamo entrare più in dettaglio nella questione, specializzandoci al caso $\alpha = \frac{1}{2}$, che e' quello che ci interessera' per le stime non perturbative sulla funzione beta.

Proviamo a definire le operazioni di localizzazione come nel paragrafo precedente, (5.23). Possiamo, come nel paragrafo precedente, scrivere i nuclei rinormalizzati, piuttosto che sotto forma di sottrazioni, sotto forma di interpolazioni. Varranno le stesse formule del paragrafo precedente. Per comodità di riferimento riportiamole qui:

$$5.36 \quad f_h^{4,R}(\underline{k}_4; \underline{\omega}_4) = \int_0^1 dt \underline{k}_4 \partial_{\underline{k}_4} f_h^4(t \underline{k}_4; \underline{\omega}_4) \quad (5.45)$$

$$f_h^{2,R}(\underline{k}_2; \underline{\omega}_2) = \int_0^1 dt \underline{k}_2^2 \partial_{\underline{k}_2}^2 f_h^2(t \underline{k}_2; \underline{\omega}_2)$$

dove abbiamo usato una scrittura formale (che va interpretata come nel paragrafo precedente) e dove nella seconda riga abbiamo trascurato di riportare il termine $\sim R(\mathbf{k})$.

Purtroppo in questo caso le formule di interpolazione non forniscono il guadagno dimensionale giusto. Per capire quale e' il problema limitiamoci alla sottrazione di ordine uno; l' espressione:

$$5.37 \quad f_h^{A,R}(\underline{k}_A; \underline{\omega}_A) = \int_0^1 dt \underline{k}_A \partial_{\underline{k}_A} f_h^A(t \underline{k}_A; \underline{\omega}_A) \quad (5.46)$$

contiene un termine $\sim k^\parallel \partial_{k^\parallel}$, che fornisce il guadagno dimensionale giusto (fa guadagnare $\gamma^{h_{v_1}}$ e fa perdere $\gamma^{-h_{v_2}}$, con $h_{v_1} < h_{v_2}$); inoltre contiene un termine $\sim k^\perp \partial_{k^\perp}$, che fa guadagnare $\gamma^{\frac{h_{v_1}}{2}}$, come giusto, ma in generale fa perdere $\gamma^{-h_{v_2}}$!!! (infatti la derivata puo' cadere su una linea interna con una ω circa perpendicolare a quella corrispondente alla derivata ∂_{k^\perp}).

In effetti questo problema non nasce per la rinormalizzazione della funzione a due punti. Infatti in questo caso la sottrazione e' definita in modo di tenere conto delle proprieta' di invarianza per rotazioni riassunte nel Teorema 5.1. Riportiamo esplicitamente (senza usare la scrittura formale) la definizione (come nella (5.30)):

$$5.38 \quad \begin{aligned} f_h^{2,R}(\underline{k}_2; \underline{\omega}_2) &= \tilde{f}_h^2(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) - \tilde{f}_h^2(0, p_F) - k_{1,0} \partial_{k_0} \tilde{f}_h^2(0, p_F) - \\ &- (|\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F| - p_F) \partial_{|k|} \tilde{f}_h^2(0, p_F) + o\left(\mathbf{k}^2 \partial_{|k|} \tilde{f}_h^2\right) \end{aligned} \quad (5.47)$$

dove abbiamo scritto il resto nella forma $o\left(\mathbf{k}^2 \partial_{|k|} \tilde{f}_h^2\right)$ e dove abbiamo usato il fatto che $\omega \partial_{\mathbf{k}} \tilde{f}_h^2(0, p_F) = \partial_{|k|} \tilde{f}_h^2(0, p_F)$. Verifichiamo questa semplice proprieta':

$$5.39 \quad \begin{aligned} \omega \partial_{\mathbf{k}} \tilde{f}_h^2(0, p_F) &= \left. \frac{\partial |\mathbf{k}|}{\partial k^\parallel} \partial_{|k|} \tilde{f}_h^2(k_0, |\mathbf{k}|) \right|_{\substack{k_0=0 \\ |\mathbf{k}|=p_F}} = \\ &= \left. \frac{k^\parallel + p_F}{\sqrt{(k^\parallel + p_F)^2 + k^\perp{}^2}} \partial_{|k|} \tilde{f}_h^2(k_0, |\mathbf{k}|) \right|_{\substack{k_0=0 \\ |\mathbf{k}|=p_F}} = \partial_{|k|} \tilde{f}_h^2(0, p_F) \end{aligned} \quad (5.48)$$

A questo punto scriviamo esplicitamente le operazioni di interpolazione partendo dalla (5.47):

$$5.40 \quad \begin{aligned} (5.47) &= \int_0^1 dt_1 \frac{d}{dt_1} \tilde{f}_h^2(t_1 k_{1,0}, |t_1 \mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) - k_{1,0} \partial_{k_0} \tilde{f}_h^2(0, p_F) - \\ &- (|\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F| - p_F) \partial_{|k|} \tilde{f}_h^2(0, p_F) + o\left(\mathbf{k}^2 \partial_{|k|} \tilde{f}_h^2\right) = \\ &= \int_0^1 dt_1 k_{1,0} \left[\partial_{k_0} \tilde{f}_h^2(t_1 k_{1,0}, |t_1 \mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) - \partial_{k_0} \tilde{f}_h^2(0, p_F) \right] + \\ &+ \int_0^1 dt_1 (|\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F| - p_F) \left[\partial_{|k|} \tilde{f}_h^2(t_1 k_{1,0}, |t_1 \mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) - \partial_{|k|} \tilde{f}_h^2(0, p_F) \right] + o\left(\mathbf{k}^2 \partial_{|k|} \tilde{f}_h^2\right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Nell' ultimo passaggio abbiamo usato la possibilita' di scrivere $\frac{\partial |t_1 \mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|}{\partial t_1}$ nella forma $(|\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F| - p_F) + o(\mathbf{k}^2)$. Questa riscrittura e' possibile perche'

$$5.41 \quad \frac{\partial |t_1 \mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|}{\partial t_1} = \frac{k_1^\parallel (t k_1^\parallel + p_F) + t k_1^\perp{}^2}{|t \mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|} = k^\parallel + o(\mathbf{k}^2) \quad (5.50)$$

e perche' gia' sappiamo che

$$5.42 \quad |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F| - p_F = e_{\omega_1} + o(\mathbf{k}^2) = k^\parallel + o(\mathbf{k}^2) \quad (5.51)$$

Introducendo nella (5.49) una nuova variabile di interpolazione otteniamo:

$$\begin{aligned}
(5.49) &= \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 k_{1,0} \left[\frac{d}{dt_2} \partial_{k_0} \tilde{f}_h^2(t_1 t_2 k_{1,0}, |t_1 t_2 \mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) \right] + \\
&+ \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 (|\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F| - p_F) \left[\frac{d}{dt_2} \partial_{|\mathbf{k}|} \tilde{f}_h^2(t_1 t_2 k_{1,0}, |t_1 t_2 \mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) \right] + o\left(\mathbf{k}^2 \partial_{|\mathbf{k}|} \tilde{f}_h^2\right) = \\
5.43 \quad &= \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 t_1 \left\{ k_{1,0}^2 \partial_{k_0}^2 + 2k_{1,0} (|\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F| - p_F) \partial_{k_0} \partial_{|\mathbf{k}|} + (|\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F| - p_F)^2 \partial_{|\mathbf{k}|}^2 \right\} \cdot \\
&\cdot \tilde{f}_h^2(t_1 t_2 k_{1,0}, |t_1 t_2 \mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) + o\left(\mathbf{k}^2 \partial_{|\mathbf{k}|} \tilde{f}_h^2\right)
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Quindi, osservando la forma della (5.52) e ripetendo il ragionamento del paragrafo precedente per stabilire quali sono i guadagni dimensionali, troviamo che ogni $k_{1,0}$ e ogni $(|\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F| - p_F)$ forniscono un fattore $\gamma^{h_{v_1}}$, per qualche $v_1 < v$ (se v e' l' ammasso di partenza). Le derivate, invece, forniscono un fattore $\gamma^{-h_{v_2}}$ o $\gamma^{-\frac{1}{2}h_{v_2}}$ a seconda della direzione del vettore ω corrispondente alla linea su cui la derivata e' caduta. In ogni caso si guadagna piu' di quanto non si perda, e quindi la rinormalizzazione degli ammassi a due gambe funziona (e' facile verificare che anche il resto da' contributi "buoni", ossia tali che il fattore di guadagno ha esponente piu' grande di quello di perdita). E' evidente che questo e' possibile soltanto perche' abbiamo sfruttato esplicitamente la forma invariante per rotazioni dei nuclei a due gambe esterne (vedi Teorema 5.1); in questo modo abbiamo visto che il termine pericoloso $\sim k^\perp \partial_{k^\perp}$ in effetti da' contributo nullo al grafico.

Purtroppo nel caso delle funzioni a quattro punti non si puo' ripetere banalmente un ragionamento analogo, poiche' in questo caso il Teorema 5.1 ci dice che i nuclei integrali dipendono, oltre che dai $k_{i,0}$ e dai moduli dei vettori $\mathbf{k}_i + \omega_i p_F$, $i = 1, \dots, 4$, anche dagli angoli relativi che tre di questi vettori formano tra loro. La dipendenza angolare fa si' che i termini della forma $\sim k^\perp \partial_{k^\perp}$ non diano, come sperato, contributo nullo.

Il tentativo naturale e' allora quello di definire la sottrazione in direzione puramente radiale, in modo che, proprio per definizione, ogni termine rinormalizzato contribuisca solamente con dei termini della forma $\sim (|\mathbf{k} + \omega p_F| - p_F) \partial_{|\mathbf{k}|}$, che sono quelli che danno i giusti guadagni dimensionali. Sostituiamo allora la definizione di \mathcal{R} sui nuclei integrali data sopra (prime righe delle equazioni (5.23) e (5.26)) con la seguente:

$$\begin{aligned}
5.44 \quad \mathcal{R} f_h^4(k_1, k_2, k_3, k_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) &= \mathcal{R} \tilde{f}_h^4(k_{1,0}, \mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F; k_{2,0}, \mathbf{k}_2 + \omega_2 p_F; k_{3,0}, \mathbf{k}_3 + \omega_3 p_F) = \\
&= \tilde{f}_h^4(k_{1,0}, \mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F; k_{2,0}, \mathbf{k}_2 + \omega_2 p_F; k_{3,0}, \mathbf{k}_3 + \omega_3 p_F) - \\
&- \tilde{f}_h^4\left(0, \frac{\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F}{|\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|}; 0, \frac{\mathbf{k}_2 + \omega_2 p_F}{|\mathbf{k}_2 + \omega_2 p_F|}; 0, \frac{\mathbf{k}_3 + \omega_3 p_F}{|\mathbf{k}_3 + \omega_3 p_F|}\right)
\end{aligned} \tag{5.53}$$

dove abbiamo scelto arbitrariamente di eliminare, nell' argomento di \tilde{f} , la dipendenza da k_4, ω_4 (piuttosto che da k_1, ω_1 o da k_2, ω_2 o da k_3, ω_3). Volendo possiamo simmetrizzare la definizione (5.53) rispetto alle quattro scelte, per non dover fare nessuna scelta arbitraria. La discussione che segue e' in ogni caso identica.

Con la definizione (5.53) si ottengono, come spiegato sopra, i contributi dimensionali giusti. C' e' pero' il problema che il controtermine e' ancora una funzione di k (che dipende dagli angoli relativi tra i vettori). Questo fa si' che quando una derivata proveniente da una rinormalizzazione esterna cade su un nucleo rinormalizzato della forma (5.53) il controtermine non si annulla (poiche' non e', come negli altri casi trattati fino ad adesso, una costante). Puo' allora capitare che si accumulino molte derivate (nel caso peggiore $O(n)$) su uno stesso propagatore di qualche ammasso interno. Come discusso nel paragrafo precedente questo farebbe nascere dei fattori $(n!)^\delta$, $\delta > 1$ che impedirebbero di ricavare le stime $n!$.

In definitiva, non siamo riusciti a rinormalizzare le funzioni a quattro punti.

Forse sara' possibile rinormalizzarle usando una forma diversa delle funzioni f e χ contenute nel propagatore, che noi abbiamo scelto come generiche funzioni C^∞ a supporto compatto. Infatti, ad esempio, nei lavori [DR1][DR2] si scelgono le funzioni f e χ nella classe di Gevray; le funzioni della classe di Gevray sono

non analitiche e a supporto compatto, con pero' una trasformata di Fourier limitata da $e^{-s\mu|k|^\frac{1}{s}}$ per qualche $s \in \mathbb{R}$. Il decadimento esponenziale del propagatore all' infinito permetterebbe di trascurare il problema delle derivate che si accumulano (come in [BG1], in cui si studia una decomposizione continua in quasi-particelle e in cui si sceglie un propagatore analitico). Tutto questo per dire che probabilmente il problema della nascita dei fattori $(n!)^\delta$ non e' un problema concettuale, ma e' solo un problema tecnico, che forse puo' essere superato con un po' di lavoro in piu'. Se si riuscisse a eliminare questo problema si riuscirebbero a migliorare quantitativamente tutti i risultati di questo lavoro (vedi prossimi capitoli). Non vogliamo pero' qua entrare oltre nella questione.

Visto che le funzioni a due punti si riescono a rinormalizzare, possiamo accontentarci di eliminare le divergenze lineari della teoria rinormalizzando al primo ordine le funzioni a due punti. Chiaramente in questo modo nella teoria sopravvivono le divergenze logaritmiche, che pero' possono essere eliminate fissato un opportuno cutoff infrarosso. Come discusso gia' nel Capitolo 4, fissare una temperatura finita equivale a mettere un taglio infrarosso a una frequenza $h_\beta = -O(\log \beta)$ (vedi discussione precedente la (4.21)).

Decideremo allora che nel seguito del lavoro, quando tratteremo esplicitamente il caso $\alpha = \frac{1}{2}$, fisseremo sempre un β finito, scelto opportunamente come funzione di ε (vedi Teorema 5.2).

Vediamo qual e' l' analogo del risultato Teorema 5.2 nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ in cui si rinormalizzano al prim' ordine le funzioni a due punti e si fissa β finito.

Ragionando come nei paragrafi precedenti troviamo che, se supponiamo

$$5.45 \quad \sup_{\substack{h \in \mathbb{Z} \\ h_\beta \leq h \leq 0}} \max\{|\nu_h|, |\alpha_0|, |\zeta_0|, |\lambda_0|\} \leq \varepsilon \quad (5.54)$$

per qualche costante finita ε , il coefficiente di ordine n della funzione beta e' stimato da:

$$5.46 \quad \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v}^e, n_{1,v}^e \text{ fissati}}} \sum_{\{P_v\}} \sum_{\substack{\Gamma \in \mathcal{G}(P_{v_0}) \\ \{P_v\} \text{ fissati}}} C^m \varepsilon^n \prod_{v \text{ non p. f.}} \frac{1}{s_v!} \gamma^{(h_v - h_{v'})} (\tilde{\rho}_v + \tilde{z}_v) \quad (5.55)$$

dove $\tilde{\rho}_v = 2 - \frac{n_{0,v}^e + 3n_{1,v}^e}{2}$, mentre $\tilde{z}_v = -1$ se $n_{0,v}^e = 2$ e $n_{1,v}^e = 0$ e zero altrimenti. Il motivo per cui abbiamo supposto che solo ν_h abbia il flusso limitato (vedi (5.54)) e' che, rinormalizzando solo la funzione a due punti, ν_h e' l' unica costante corrente.

Riscrivendo $(h_v - h_{v'}) (\tilde{\rho}_v + \tilde{z}_v)$ in un modo analogo a quello usato nella (5.18) e eseguendo la somma sui grafici di Feynman, possiamo ancora stimare la (5.55) con

$$5.47 \quad \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v}^e, n_{1,v}^e \text{ fissati}}} \sum_{\{P_v\}} C^m \varepsilon^n n! \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{-\frac{1}{2}(h_v - h_{v'}) \chi(z_v=0)} \gamma^{-\frac{n_v^e}{8} \chi(z_v=0)} \quad (5.56)$$

dove z_v e' quello definito nel paragrafo precedente per il caso $\alpha = 1$. Il motivo per cui compaiono le funzioni χ ad esponente nella (5.56) e' che adesso i grafici che nel paragrafo precedente venivano rinormalizzati (ossia quelli per cui $z_v = -1, -2$) adesso sono tutti *marginali* (hanno tutti dimensione nulla) per quanto discusso sopra (abbiamo deciso di rinormalizzare al prim' ordine la funzione a due punti e di non rinormalizzare la funzione a quattro).

Usando il Lemma A6.3 possiamo stimare la somma $\sum_{\{P_v\}} \prod_{v \notin V_f(\tau)} \gamma^{-\frac{|P_v|}{8} \chi(z_v=0)}$ con C^m . Una stima drastica (ma sufficiente ai nostri scopi) della somma sulle frequenze degli alberi di $\mathcal{T}_{h,n}$ e' $|h_\beta|^{n-1}$. Il motivo (semplicissimo) per cui vale questa stima e' che, se β e' finito, il flusso si interrompe ad h_β e quindi in particolare la scala del potenziale efficace e' necessariamente $> h_\beta$; quindi ognuno dei vertici non banali puo' distare al massimo di $|h_\beta|$ dal vertice non banale precedente. Tenendo conto che i vertici non banali sono al

massimo $n - 1$ (vedi Appendice A3) e scomponendo, come nella dimostrazione del Lemma A3.2, la somma su $\tau \in \mathcal{T}_{h,n}$ in una somma sugli alberi non decorati piu' una somma sulle decorazioni, si trova subito

$$5.48 \quad \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \gamma^{-\frac{1}{2}(h_v - h_{v'})\chi(z_v=0)} \leq \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} 1 \leq C^n |h_\beta|^{n-1} \quad (5.57)$$

dove abbiamo anche usato il Lemma A3.1 per stimare con C^n il numero di alberi non decorati con n punti finali. Sostituendo la (5.57) nella (5.56) e tenendo conto che $h_\beta = O(\log \beta)$ otteniamo

$$5.49 \quad C^n \varepsilon^n (\log \beta)^{n-1} n! \quad (5.58)$$

Se si riuscisse (come riusciremo effettivamente a fare nei prossimi capitoli) ad eliminare l' $n!$ dalla (5.58) e a controllare l' ipotesi sul flusso di ν_h , troveremmo che la funzione beta sarebbe sommabile per $C\varepsilon \log \beta < 1$. Quest' ultima condizione corrisponde ad un vincolo sulla temperatura del sistema: $k_B T > e^{-\frac{1}{C\varepsilon}}$ (k_B e' la costante di Boltzmann) e quindi ad una stima dall' alto sulla temperatura critica al di sotto della quale il sistema diventa bosonico (oppure, eventualmente, un liquido di Luttinger). Va notato che la stima sulla temperatura critica e' esponenziale nella costante di accoppiamento ε del sistema, quindi e' una stima che, se e' vera (per adesso stiamo facendo solo una congettura), e' non perturbativa. Inoltre e' una stima molto migliore di quella che si otterrebbe senza rinormalizzazione (o, equivalentemente, senza decomposizione in scale): se non si rinormalizzassero le funzioni a due punti sopravviverebbero divergenze lineari, e si otterrebbe una stima polinomiale sulla temperatura critica.

Riassumiamo adesso in un Teorema la discussione di questo paragrafo.

TEOREMA 5.3 *Consideriamo la quantita' in (5.59),*

$$5.1yz \quad \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v}^e, n_{1,v}^e \text{ fissati}}} \left| \mathcal{W}(\tau, P_{v_0}, \underline{\omega}_{P_{v_0}}, \underline{k}_{P_{v_0}}) \right| \quad (5.59)$$

in cui l' albero τ sia un albero rinormalizzato, con un indice \mathcal{L} associato al primo vertice seguente la radice. La (5.59) e' una stima per il coefficiente di ordine n della funzione beta. L'operatore \mathcal{L} e' definito come segue:

$$5.51 \quad \mathcal{L} f_h^2(k_1, k_2; \omega_1, \omega_2) \equiv \mathcal{L} \tilde{f}_h^2(k_{1,0}, |\mathbf{k}_1 + \omega_1 p_F|) \equiv \tilde{f}_h^2(0, p_F) \quad (5.60)$$

ed e' identicamente nullo se agisce su nuclei con piu' di due gambe esterne.

Supponiamo che β sia finito e che il flusso di ν_h sia limitato, ossia che

$$5.52 \quad \sup_{\substack{h \in \mathbb{Z} \\ h_\beta \leq h \leq 0}} \max\{|\nu_h|, |\alpha_0|, |\zeta_0|, |\lambda_0|\} \leq \varepsilon \quad (5.61)$$

per qualche costante ε .

Allora

$$5.53 \quad C^n \varepsilon^n (\log \beta)^{n-1} n! \quad (5.62)$$

per qualche costante C .

Si possono ripetere le osservazioni che seguono il Teorema 5.2.

sec.6

6. Stime non perturbative per la funzione beta.

p.6.1

6.1. Stime non perturbative per l' espansione non rinormalizzata

In questo paragrafo vogliamo studiare le stime non perturbative per i potenziali efficaci non rinormalizzati. Useremo lo sviluppo in determinanti per i valori di aspettazione troncata (vedi Capitolo 4 e Appendici A4 A5) ed eseguiremo tutte le stime in spazio x (vedremo chiaramente piu' avanti perche' non e' possibile ottenere le stime in spazio k).

Come prima cosa allora conviene introdurre l' oggetto che vogliamo stimare in spazio x . Sara' ancora una norma del nucleo integrale di $\mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)})$, ma definita in modo un po' diverso dalla (5.2), che e' una norma nello spazio degli impulsi.

Ricordiamo ancora una volta che

$$\mathcal{V}^{(h)}(\psi^{(\leq h)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)})$$

$$\begin{aligned} 6.1 \quad \mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)}) &= \int dx(I_{v_0}) \sum_{P_{v_0} \subset I_{v_0}} \tilde{\psi}^{(\leq h)}(P_{v_0}) \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(I_{v_0})) = \\ &= \sum_{P_{v_0} \subset I_{v_0}} \int dx(P_{v_0}) \tilde{\psi}^{(\leq h)}(P_{v_0}) \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(P_{v_0})) \end{aligned} \quad (6.1)$$

e che per i nuclei \mathcal{W} vale lo sviluppo (4.52):

$$\begin{aligned} 4.41a \quad &\mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(I_{v_0})) \\ &= \sum_{\{P_v\}_{v \in V(\tau)}} \left(\prod_{v \notin V_f(\tau)} \frac{1}{s_v!} \mathcal{E}_{h_v}^T \left(\tilde{\psi}^{(h_v)}(P_{v_1} \setminus Q_{v_1}), \dots, \tilde{\psi}^{(h_v)}(P_{v_{s_v}} \setminus Q_{v_{s_v}}) \right) \right) \left(\prod_{v \in V_f(\tau)} r_v \right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Decomponendo i campi ψ in quasi-particelle si riottengono delle relazioni della forma (6.1) e (4.52), in cui pero' sia i monomi $\tilde{\psi}$, sia i nuclei integrali \mathcal{W} assumono una dipendenza dagli indici ω , e in cui inoltre e' necessario sommare su tutti gli indici ω . Con una notazione autoesplicativa, possiamo ad esempio riscrivere la (6.1) nella forma:

$$\begin{aligned} 6.1a \quad \mathcal{V}^{(h)}(\tau, \psi^{(\leq h)}) &= \sum_{\underline{\omega}(I_{v_0})} \int dx(I_{v_0}) \sum_{P_{v_0} \subset I_{v_0}} \tilde{\psi}_{\underline{\omega}(P_{v_0})}^{(\leq h)}(P_{v_0}) \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(I_{v_0}, \underline{\omega}(I_{v_0}))) = \\ &= \sum_{P_{v_0} \subset I_{v_0}} \sum_{\underline{\omega}(P_{v_0})} \int dx(P_{v_0}) \tilde{\psi}_{\underline{\omega}(P_{v_0})}^{(\leq h)}(P_{v_0}) \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(P_{v_0}, \underline{\omega}(P_{v_0}))) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Stabiliamo che la norma che vogliamo stimare sia la seguente:

$$6.2 \quad \frac{1}{\beta L^2} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e \text{ fissati}}} \int dx(P_{v_0}) \left| \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(P_{v_0}, \underline{\omega}(I_{v_0}))) \right| \quad (6.4)$$

Il vincolo n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e fissati che compare nella somma sulle scelte dell' insieme P_{v_0} seleziona un contributo al potenziale efficace corrispondente a tutti i grafici con numero e tipo di linee esterne fissate (ad esempio se $n_{0,v_0} = n_{1,v_0} = 1$ seleziona il contributo $\sim F_\alpha$, vedi (5.27), e cosi' via).

La forma della norma (6.4) e' stata scelta pensando alle stime sui coefficienti di ordine n della funzione beta: e' facile verificare che, se l' albero τ e' un albero rinormalizzato con un indice \mathcal{L} associato al vertice immediatamente seguente la radice, la norma (6.4) fornisce una stima sul coefficiente di ordine n della funzione beta, in particolare sulla sua componente selezionata dalla scelta del numero e tipo di gambe uscenti. Anche se in questo paragrafo non introduciamo ancora la funzione beta, decidiamo di usare comunque la norma (6.4), e diremo che il potenziale efficace e' ben definito se e' ben definita la norma (6.4) del suo nucleo integrale.

Usando lo sviluppo in determinanti (4.60) per i valori di aspettazione troncata troviamo che i nuclei integrali $\mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(P_{v_0}))$ si possono scrivere esplicitamente nel modo seguente:

$$6.3 \quad \sum_{\{P_v\}} \sum_T \sum_{\omega} \prod_{\ell \in T} g_{\ell} e^{-ip_F \omega_{\ell} x_{\ell}} \prod_{v \text{ non p. f.}} \frac{1}{s_v!} (-1)^{s_v+1} \int dP_{T_v}(\mathbf{t}) \det G_{T_v}(\mathbf{t}) \prod_{v \text{ p. f.}} r_v \quad (6.5)$$

dove:

- (1) T_v e' un albero ancorato ai sottoammassi massimali v_1, \dots, v_{s_v} dell' ammasso v ;
- (2) $T \equiv \bigcup_{v \in V(\tau)} T_v$;
- (3) r_v e' la costante di accoppiamento associata al punto finale v (puo' essere uguale a ν_0, α_0, ζ_0 o a $\lambda_0 \int dx v_0(x)$);
- (4) sia i propagatori g_{ℓ} sia i propagatori contenuti negli elementi di matrice di $G_{T_v}(\mathbf{t})$ sono della forma $g_{\omega}^{(h_v)}(x)$. In particolare gli elementi di matrice di G_{T_v} sono della forma:

$$6.3a \quad G_{(j,i)(j',i')}^{T_v} = t_{n'(jj')} \dots t_{n(jj')} \delta_{\omega(j,i), \omega(j',i')} g_{\omega(j,i)}^{(h_v)}(\mathbf{x}(j,i) - \mathbf{x}(j',i')) \quad (6.6)$$

dove la δ e' una delta di Kronecher.

Iniziamo a stimare ogni fattore $\int dP_{T_v}(\mathbf{t}) \det G_{T_v}(\mathbf{t})$ come nel Lemma A5.2 (vedi (A5.18)). Abbiamo bisogno di stabilire un po' piu' esplicitamente la forma della costante C che compare nella (A5.18). Scegliamo i vettori $A(x)$ e $B(x)$ come in (A5.23). Procedendo come nell' Appendice A2 per la dimostrazione del Lemma 4.1, si puo' verificare che

$$6.4 \quad \begin{aligned} |(A(x - \cdot), A(y - \cdot))| &\leq \gamma^{(-2+\alpha)h_v} \frac{C_N}{1 + \left[(\gamma_v^h(x-y)_0)^2 + (\gamma_v^h(x-y)x\omega)^2 + (\gamma^{\alpha h_v}(x-y)\omega^{\perp})^2 \right]^N} \\ |(B(x - \cdot), B(y - \cdot))| &\leq \gamma^{(4+\alpha)h_v} \frac{C_N}{1 + \left[(\gamma_v^h(x-y)_0)^2 + (\gamma_v^h(x-y)x\omega)^2 + (\gamma^{\alpha h_v}(x-y)\omega^{\perp})^2 \right]^N} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Se β e L sono finiti, vanno considerate le correzioni discusse in Appendice A2.

Usando la (6.7) si trova, ponendo $N = 0$, che la costante C che compare nella stima (A5.18) puo' essere scelta uguale a $C_0 \gamma^{(1+\alpha)h_v}$.

Una volta eseguita la stima sui fattori $\int dP_{T_v}(\mathbf{t}) \det G_{T_v}(\mathbf{t})$, possiamo stimare:

- (1) $\prod_{v \text{ p. f.}} r_v$ con ε^n , dove abbiamo usato l' ipotesi che

$$6.5 \quad \max\{|\nu_0|, |\alpha_0|, |\zeta_0|, |\lambda_0|\} \leq \varepsilon \quad (6.8)$$

e che l' albero τ abbia n punti finali;

- (2) i propagatori dell' albero ancorato T_v con

$$6.6 \quad |g_{\ell}| \leq \gamma^{(1+\alpha)h_v} \frac{C_2}{1 + \left[(\gamma_v^h(x-y)_0)^2 + (\gamma_v^h(x-y)x\omega)^2 + (\gamma^{\alpha h_v}(x-y)\omega^{\perp})^2 \right]^2}; \quad (6.9)$$

- (3) l' integrale in $dx(I_{v_0})$ (vedi (6.4)) sui fattori $|g_\ell|$ con $\beta L^2 \tilde{C}_2 \gamma^{-(2+\alpha)h_v} \gamma^{(1+\alpha)h_v}$ dove abbiamo usato la proprieta' secondo cui il determinante jacobiano della trasformazione $x(I_{v_0}) \rightarrow \{x_\ell\}_{\ell \in T}$ e' uguale a 1;
 (4) la somma sugli alberi T_v con $C^{\tilde{n}_v} s_v!$ (vedi Lemma A5.1).

Mettendo insieme la stima sui determinanti con le stime (1)-(4) troviamo

$$6.7 \quad (6.4) \leq C^n \varepsilon^n \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e \text{ fissati}}} \sum_{\{P_v\}} \sum_{\omega} \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{h_v(1+\alpha)\tilde{n}_v} \gamma^{h_v \tilde{n}_{1,v}} \gamma^{-h_v(2+\alpha)(s_v-1)} \quad (6.10)$$

dove abbiamo anche tenuto conto del fatto che i propagatori di tipo α o ζ hanno un fattore dimensionale γ^{h_v} rispetto al propagatore $g_\omega^{(h_v)}$ (sopra non ne avevamo tenuto esplicitamente conto).

Purtroppo, una volta stimati i determinanti con delle costanti (dimensionali), non rimangono piu' le informazioni riguardo il fatto che gli indici ω relativi alle linee da contrarre sono, in ogni grafico in cui si puo' sviluppare il determinante, uguali a due a due (anche se le coppie di ω uguali sono diverse grafico per grafico). In altre parole abbiamo dovuto stimare con 1 tutte le delta di Kronecher $\delta_{\omega_{(j,i)}, \omega_{(j',i')}}^*$ che compaiono nella (6.6) In questo modo ci ritroviamo a dover sommare su un numero di indici ω enormemente maggiore di quello realmente necessario. Se nella (6.10) eseguiamo la somma sulle ω troviamo

$$6.8 \quad (6.10) \leq C^n \varepsilon^n \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e \text{ fissati}}} \sum_{\{P_v\}} \cdot \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{h_v(1+\alpha)\tilde{n}_v} \gamma^{h_v \tilde{n}_{1,v}} \gamma^{-h_v(2+\alpha)(s_v-1)} \gamma^{-\alpha h_v 2(\tilde{n}_v - s_v + 1)} \gamma^{-\alpha h_v (s_v - 1)} \quad (6.11)$$

poiche' devo eseguire una somma per ogni linea da contrarre nel determinante, e per ogni propagatore dell' albero ancorato. Mettendo insieme i fattori dimensionali nella (6.10) troviamo

$$6.9 \quad (6.11) \leq C^n \varepsilon^n \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e \text{ fissati}}} \sum_{\{P_v\}} \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{h_v[\tilde{n}_v(1-\alpha) + \tilde{n}_{1,v} - 2(s_v-1)]} = \\ = C^n \varepsilon^n \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e \text{ fissati}}} \sum_{\{P_v\}} \gamma^{h \delta_{v_0}^*} \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{(h_v - h_{v'}) \delta_v^*} \quad (6.12)$$

dove $h \equiv h_{v_0}$ e

$$6.10 \quad \delta_v^* = 2 - 2\alpha m_{4,v} - (1 + \alpha) m_{2,v} - \alpha m_{2',v} - \frac{1 - \alpha}{2} n_{0,v}^e - \frac{3 - \alpha}{2} n_{1,v}^e \quad (6.13)$$

Nell' ultimo passaggio della (6.12) abbiamo usato le relazioni (5.15).

Dall' espressione di δ^* (6.13) e' chiaro che non possiamo in alcun caso aspettarci che la teoria finale sia rinormalizzabile, poiche' le dimensioni dei sottografici vengono a dipendere da $m_{4,v}$, $m_{2,v}$ e da $m_{2',v}$. E' pero' possibile migliorare le stime dimensionali fatte sopra usando una regola di conservazione per le ω .

Notiamo che in tutti i grafici in cui possiamo sviluppare i determinanti nella (6.5) le ω delle linee uscenti dall' ammasso v devono soddisfare il seguente vincolo.

Chiamiamo $\omega_1^{(h_1)}, \dots, \omega_{n_v^e}^{(h_{n_v^e})}$ gli indici ω associati alle linee uscenti dal cluster v , dove il sovra indice h_i sta a significare che la linea i -esima e' contratta su scala h_i . Se trasformiamo il valore del grafico secondo Fourier ci accorgiamo che, per la regola di conservazione degli impulsi, devono esistere n_v^e impulsi $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{n_v^e}$ a somma nulla tali che \mathbf{k}_i appartenga al settore indicizzato con $\omega_i^{(h_i)}$ (adesso stiamo pensando che gli impulsi \mathbf{k} non siano calcolati dalla superficie di Fermi, ma dall' origine degli assi coordinati).

Quindi, prima di eseguire qualsiasi stima, possiamo aggiungere all' espressione (6.5) il fattore

$$6.11 \quad \prod_{v \in V(\tau)} \chi_v(\underline{\omega}_v) \quad (6.14)$$

dove le funzioni $\chi_v(\underline{\omega}_v)$ sono definite come segue:

$$6.12 \quad \chi_v(\underline{\omega}_v) \equiv \chi \left(\exists \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{n_v^e} : k_i \in \omega_i^{(h_i)}, i = 1, \dots, n_v^e; \sum_{i=1}^{n_v^e} \mathbf{k}_i = 0 \right) \quad (6.15)$$

La condizione contenuta nell' argomento della funzione χ a secondo membro e' la stesse descritta a parole piu' sopra. Il motivo per cui possiamo aggiungere il fattore in (6.14) alla (6.5) e' che, quando dallo spazio k antitrasformiamo secondo Fourier per tornare in spazio x , il fattore in (6.14) appare come un numero rispetto all' operazione di antitrasformazione, e quindi continua a sopravvivere nella stessa forma scritta sopra. In altre parole il ragionamento che abbiamo fatto e' stato il seguente: abbiamo trasformato secondo Fourier il valore di tutti i grafici contenuti nei determinanti di (6.5); in spazio k ci siamo accorti della presenza di un vincolo sulle ω che non riuscivamo a vedere direttamente in spazio x ; siamo tornati indietro in spazio x mantenendo il vincolo sulle ω , che deve essere valido comunque.

L' interesse di scrivere esplicitamente i vincoli a cui devono soddisfare le ω uscenti da un dato ammasso e' che vale il seguente Teorema, valido esclusivamente nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$:

TEOREMA 6.1 *Sia $\chi_v(\underline{\omega}_v)$ la funzione definita in (6.15). Supponiamo che tutte le frequenze h_i , $i = 1, \dots, n_v^e$ contenute nella definizione (6.15) siano uguali ad $h < 0$. Supponiamo che ogni settore angolare $\omega_i^{(h)}$ sia vincolato ad appartenere ad un settore $\omega_i^{(\bar{h})}$ su scala $h < \bar{h} \leq 0$. Allora, se $\alpha = \frac{1}{2}$,*

$$6.13 \quad \sum_{\omega_2^{(h)}, \dots, \omega_{n_v^e}^{(h)}} \chi_v \leq C^{n_v^e} \left(\gamma^{\alpha(\frac{\bar{h}-h}{2})} \right)^{n_v^e-3} \quad (6.16)$$

per qualche costante C .

Osservazioni.

(1) Il Teorema 6.1 e' dovuto a Feldman-Magnen-Rivasseau-Trubowitz [FMRT]. Una dimostrazione del Teorema e' riportata nell' Appendice A7, in una versione leggermente diversa da quella enunciata qua sopra, ma equivalente per tutti gli scopi successivi. La dimostrazione in A7 si basa sulla quella riportata nel lavoro [FMRT], ma contiene molti piu' i dettagli (in effetti quella di [FMRT] e' solo una traccia di dimostrazione).

(2) Il motivo per cui e' necessario che $\alpha = \frac{1}{2}$ risultera' chiaro dalla dimostrazione del Teorema.

(3) Poiche' il vincolo indotto dalla funzione χ_v coinvolge solo le ω delle linee uscenti dall' ammasso v indipendentemente da come queste si contraggano con altre linee, il prodotto $\prod_v \chi_v$ sopravvive alla stima sui determinanti. Quindi, dopo avere eseguito le stime sui determinanti e le stime (1)-(4) discusse piu' sopra, potremo eseguire le somme su ω del prodotto delle funzioni χ_v e, sfruttando il Teorema 6.1, otterremo una stima migliore di quella ottenuta nella (6.11), (6.12). In particolare troveremo delle dimensioni $\tilde{\delta}_v$ che non dipenderanno da $m_{4,v}$ e $m_{2',v}$, ma solo da $m_{2,v}$ (nella forma $\tilde{\delta}_v = \delta_v - m_{2,v}$ in modo che, come abbiamo gia' visto nel Capitolo precedente, una volta che al posto di ν_0 si consideri la costante efficace $\gamma^h \nu_h$, la dipendenza da $m_{2,v}$ scompare).

(4) Se si ponesse $\alpha \neq \frac{1}{2}$ si troverebbe al posto della (6.16) una stima che contiene in piu' un fattore divergente per $h \rightarrow -\infty$; in particolare, quando $\alpha \leq 1$ e $\bar{h} = 0$, si trova in piu' rispetto alla stima (6.16) un fattore logaritmico $|h|$, vedi Lemma A7.1.

(5) Poiche' abbiamo deciso, come spiegato nel precedente Capitolo, di ammettere divergenze logaritmiche nella teoria, potremmo decidere di usare un analogo del Teorema 6.1 anche per $\alpha \neq \frac{1}{2}$, come spiegato nel

punto (4) sopra. Inizieremo allora ad eseguire le somme sulle ω con α generico (pensando in particolare al caso $\alpha = 1$, che e' quello interessante perche' permette di definire in modo consistente le operazioni di rinormalizzazione anche nel caso dei sottografici a quattro gambe esterne, vedi Capitolo 5); supporremo in un primo momento che il Teorema 6.1 valga per α qualsiasi. Vedremo in realta' che se non scegliamo $\alpha = \frac{1}{2}$ i termini $\sim m_{4,v}, m_{2,v}, m_{2',v}$ non si cancellano opportunamente nelle dimensioni $\tilde{\delta}_v$, e quindi $\alpha = \frac{1}{2}$ sara' in ogni caso la scelta migliore.

(6) Nel seguito del Capitolo chiameremo "regola del parallelogramma" la regola secondo cui, in due dimensioni, per fissare $2l$ versori a somma nulla, basta fissare i primi $2l - 2$; gli ultimi due poi sono fissati automaticamente dalla scelta dei primi $2l - 2$ (il nome "regola del parallelogramma" e' naturale se si considera il caso speciale $l = 2$). Il Teorema 6.1 ci dice essenzialmente che, se $\alpha = \frac{1}{2}$, la regola del parallelogramma vale anche se i $2l$ versori hanno la liberta' di muoversi $O(\gamma^{\alpha h})$; piu' precisamente che, fissati i settori angolari di ampiezza $\gamma^{\alpha h}$ a cui devono appartenere i primi $2l - 2$ vettori \mathbf{k} , gli ultimi due vettori devono appartenere a due settori fissati a meno di costante (dove la costante pero' dipende da l).

(7) E' chiaro che la regola del parallelogramma e' piu' forte della regola di conservazione dell' impulso (che elimina solo una delle a priori $2l$ somme da fare). Per i settori vale anche una regola di conservazione dell' impulso "a meno di costante", che e' un risultato analogo al Teorema 6.1, anche se piu' debole. In particolare per gli ammassi a due gambe esterne, ai quali non si puo' applicare il Teorema 6.1, useremo la regola di conservazione dell' impulso a meno di costante (il motivo per cui non vale una regola di conservazione esatta per i settori uscenti da un ammasso a due gambe esterne e' che abbiamo scelto dei settori angolari che si sovrappongono l' un l' altro, vedi scelta della funzione $\chi_\omega^{(h)}$ nel Capitolo 4).

Iniziamo a stimare la somma $\sum_\omega \prod_v \chi_v$. Avendo scelto la norma come in (6.4) dovremmo eseguire le somme fissando gli indici di settore esterni. Decidiamo pero' di maggiorare la somma fissando solo uno dei settori esterni e sommando sugli altri $n_{v_0}^e - 1$ (il motivo per cui decidiamo di "allentare" i vincoli e' che, come risultera' chiaro nel corso della discussione seguente, con il procedimento che seguiremo non saremo in grado di controllare il vincolo sulla scelta delle ω esterne). Supponiamo inoltre per semplicita che la regola del parallelogramma valga in modo esatto (e non a meno di costante, vedi punto (6) sopra). Dopo aver eseguito le stime con questa semplificazione (e aver quindi capito le idee su cui la dimostrazione si basa) riusciremo con poco sforzo in piu' a tenere conto precisamente del risultato fornito dal Teorema 6.1.

Stabiliamo in ogni ammasso v un ordinamento parziale degli s_v sottoammassi assegnando ad ogni albero ancorato T_v una radice. Decidiamo che la radice di T_{v_0} sia il sottoammasso in cui entra l' unica linea esterna che ha il settore fissato. A questo punto risulta assegnato un ordinamento parziale dei sottoammassi contenuti nell' ammasso v_0 . Consideriamo un sottoammasso massimale di v_0 ad esempio v_i , $i = 1, \dots, s_{v_0}$. Supponiamo che v_i abbia una struttura interna (ossia che non sia un punto finale) e siano $v_{i,j}$, $j = 1, \dots, s_{v_i}$ i suoi sottoammassi massimali. Se v_i e' la radice di T_{v_0} , stabiliamo che la radice di T_{v_i} sia $v_{i,\bar{j}}$, se la linea esterna con il settore fissato entra in $v_{i,\bar{j}}$. Se invece v_i non e' la radice di T_{v_0} , stabiliamo che la radice di T_{v_i} sia $v_{i,j'}$, se la linea dell' albero T_{v_0} che entra in v_i e proviene dall' ammasso $v_{i'} < v_i$, $i' = 1, \dots, s_v$, entra anche nell' ammasso $v_{i,j'}$. Induttivamente possiamo assegnare le radici di tutti gli alberi T_v .

Sia $\omega^{(h)}$ un settore su scala h assegnato ad una data linea; fissato $\omega^{(h)}$, chiamiamo $\omega^{(h_1)}$ ($h_1 > h$) il settore su scala h_1 che contiene il settore piu' "raffinato" $\omega^{(h)}$. Supponiamo che una data linea ℓ attraversi gli ammassi su scala h_1, h_2, \dots, h_r e si contragga su scala h_0 , dove $h_0 < h_1 < \dots < h_r$ sono tutte scale contigue. Allora possiamo decidere di espandere la somma sui settori "raffinatissimi" $\omega_\ell^{(h_0)}$ in una successione di somme su settori sempre meno raffinati:

$$6.14 \quad \sum_{\omega_\ell^{(h_0)}} = \sum_{\omega_\ell^{(h_r)}} \sum_{\omega_\ell^{(h_{r-1})} \subset \omega_\ell^{(h_r)}} \cdots \sum_{\omega_\ell^{(h_0)} \subset \omega_\ell^{(h_1)}} \quad (6.17)$$

Notiamo che per le linee di T_v rimane un' ambiguita', poiche' potremmo decidere di espanderle secondo due serie di frequenze (quella indotta dall' ammasso da cui la linea di T_v "esce" e quella indotta dall' ammasso

in cui la linea di T_v “entra”, dove diciamo che una linea di T_v “esce” dall’ ammasso v_1 ed “entra” in v_2 se $v_1 < v_2$). Decideremo di espandere queste linee secondo la serie di frequenze indotte dall’ ammasso da cui la linea di T_v esce.

A questo punto scegliamo una foglia dell’ albero T_{v_0} , diciamo v_1 , e riordiniamo la somma che dobbiamo fare nel seguente modo:

$$6.15 \quad \sum_{\omega} \prod_v \chi_v = \sum'_{\omega} \prod_{v \not\subseteq v_1} \chi_v \sum''_{\omega} \sum_{\underline{\omega}_1^{(h_{v_1})}} \sum_{\underline{\omega}_1^{(h_{v_0})} \subset \underline{\omega}_1^{(h_{v_1})}} \chi_{v_1}(\underline{\omega}_1^{(h_{v_0})}) \prod_{v \subset v_1} \chi_v \quad (6.18)$$

dove:

- (1) \sum'_{ω} e’ la somma sui settori relativi ai vertici v tali che $v \not\subseteq v_1$;
- (2) \sum''_{ω} e’ la somma sui settori relativi ai vertici v tali che $v \subset v_1$;
- (3) $\underline{\omega}_1^{(h_{v_0})}$ e’ l’ insieme dei settori relativi alle linee uscenti da v_1 meno il settore relativo alla linea di T_{v_0} entrante in v_1 ;
- (4) abbiamo espanso “al prim’ ordine” la somma su $\underline{\omega}_1^{(h_{v_0})}$.

Se il vertice v_1 e’ un punto finale la somma $\sum_{\underline{\omega}_1^{(h_{v_0})}}$ non va espansa affatto. In questo caso possiamo subito eseguire la stima sull’ ultima somma nella (6.18). Se il punto finale ha quattro gambe esterne otteniamo un fattore $\gamma^{-\alpha h_{v_0}}$ (poiche’, usando la regola del parallelogramma, vediamo che, una volta fissata il settore della linea entrante, ci rimane solo una somma da eseguire); se ha due gambe esterne otteniamo un fattore 1 (poiche’, usando la regola di conservazione dell’ impulso, vediamo che, una volta fissato il settore della linea entrante, il settore della linea uscente e’ fissato automaticamente).

Se invece v_1 ha una struttura interna possiamo iniziare a stimare il prodotto $\prod_{v \subset v_1} \chi_v$ con un prodotto di funzioni χ che fissano vincoli piu’ deboli; piu’ esattamente, ogni volta che nell’ argomento delle funzioni χ compare un settore $\omega_i^{(h_{v_0})}$, possiamo sostituirlo con il settore meno raffinato $\omega_i^{(h_{v_1})}$. In questo modo indeboliamo il vincolo sugli impulsi k_i che, invece che doversi muovere in una regione $\sim \gamma^{\alpha h_{v_0}}$, possono in questo modo muoversi in una regione $\sim \gamma^{\alpha h_{v_1}}$. Indebolendo i vincoli e’ chiaro che maggioriamo la somma (6.18). Una volta fatta questa stima le funzioni che compaiono nel prodotto $\prod_{v \subset v_1} \chi_v$ non dipendono piu’ da $\underline{\omega}_1^{(h_{v_0})}$. Possiamo allora permutare l’ ordine dei fattori nel seguente modo:

$$6.16 \quad \sum_{\underline{\omega}_1^{(h_{v_1})}} \sum_{\underline{\omega}_1^{(h_{v_0})} \subset \underline{\omega}_1^{(h_{v_1})}} \chi_{v_1}(\underline{\omega}_1^{(h_{v_0})}) \prod_{v \subset v_1} \chi_v = \sum_{\underline{\omega}_1^{(h_{v_1})}} \prod_{v \subset v_1} \chi_v \sum_{\underline{\omega}_1^{(h_{v_0})} \subset \underline{\omega}_1^{(h_{v_1})}} \chi_{v_1}(\underline{\omega}_1^{(h_{v_0})}) \quad (6.19)$$

dove adesso le funzioni χ del prodotto $\prod_{v \subset v_1} \chi_v$ sono quelle con il vincolo indebolito. L’ ultima somma puo’ adesso essere stimata con $\gamma^{(h_{v_1} - h_{v_0})(\alpha(n_{v_1}^e - 3)\chi(n_{v_1}^e > 3))}$ dove abbiamo usato la regola del parallelogramma per $n_{v_1}^e > 3$ e la regola di conservazione dell’ impulso per $n_{v_1}^e = 2$.

Se il vertice v_1 e’ un punto finale possiamo passare a stimare nella (6.18) il contributo di un’ altra foglia dell’ albero T_{v_0} . Se invece il vertice v_1 ha una struttura interna riordiniamo la somma $\sum''_{\omega} \prod_{v \subset v_1} \chi_v$ con lo stesso criterio usato per riordinare la (6.18); stimiamo il contributo di una foglia dell’ albero T_{v_1} (diciamo v_2); se v_2 e’ un punto finale passiamo subito a stimare il contributo di un’ altra foglia di T_{v_1} , altrimenti entriamo dentro v_2 ed iniziamo a stimare le sue foglie... Prima o poi, continuando a stimare le foglie o di T_{v_1} o di un albero relativo ad un ammasso contenuto in v_1 , esauriremo le foglie di T_{v_n} (dove $v_n \subseteq v_1$); potremo quindi passare a stimare con lo stesso criterio i rami finali di T_{v_n} .

Induttivamente vediamo che riusciamo a stimare con il criterio descritto sopra tutti i vertici contenuti in v_1 e quindi, in definitiva, tutti i vertici contenuti in v_0 . Ogni vertice fornira’ una perdita $\gamma^{(h_v - h_{v'}) (\alpha(n_v^e - 3)\chi(n_v^e > 3))}$ dove, se v e’ un punto finale, va inteso $h_v = 0$ e dove $h_{v'}$ e’ la scala del piu’ piccolo ammasso che contiene l’ ammasso (o il vertice) v . Mettendo insieme i fattori raccolti durante questa “potatura” dell’ albero

otteniamo:

$$\begin{aligned}
 (6.18) &= \prod_{v \text{ p. f.}} \gamma^{-\alpha h_{v'} \chi(n_v^e=4)} \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{(h_v-h_{v'}) (\alpha(n_v^e-3) \chi(n_v^e>3))} = \\
 &= \gamma^{-\alpha h_{v_0} m_{4,v_0}} \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{(h_v-h_{v'}) (-\alpha m_{4,v} + \alpha(n_v^e-3) \chi(n_v^e>3))}
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Nella discussione fatta sopra abbiamo supposto che la regola del parallelogramma valesse esattamente, mentre in realta' per il vertice V vale a meno di $C n_v^e$ dove C e' indipendente da h e da n_v^e (vedi Teorema 6.1).

Ripetendo la dimostrazione precedente tenendo conto di questo fatto, riotterremmo la (6.20) con in piu' un fattore $\prod_{v \text{ non p. f.}} C n_v^e$; questo fattore sarebbe pericoloso al momento di eseguire la somma sulle scelte P_v .

Per evitare di avere una costante (in generale maggiore di 1) elevata alla potenza $\sum_{v \text{ non p. f.}} n_v^e$, possiamo decidere di usare la regola del parallelogramma solo per i vertici con "poche" gambe esterne (ad esempio minori o uguali a 10) e di non usare, per i vertici con piu' gambe, nessuna regola di conservazione (anche la piu' debole regola di conservazione dell' impulso varrebbe a meno di $C n_v^e$). Ripetendo passo passo la dimostrazione fatta sopra otteniamo un fattore di perdita dovuto alle somme su ω che, invece che essere uguale al fattore contenuto nella (6.20), e' uguale a:

$$C^n \gamma^{-\alpha h_{v_0} m_{4,v_0}} \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{(h_v-h_{v'}) (-\alpha m_{4,v} + \alpha(n_v^e-3) \chi(4 \leq n_v^e \leq 10) + \alpha(n_v^e-1) \chi(n_v^e > 10))} \tag{6.21}$$

dove C e' una costante indipendente da h e dagli indici P_v .

A questo punto possiamo mettere insieme i contributi che provengono dalla stima sui determinanti, dalle stime (1)-(4) discusse prima della (6.10) e dalla somma sulle ω . Si trova che la norma in (6.4) e' stimata da

$$\begin{aligned}
 (6.4) &\leq C^n \varepsilon^n \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e \text{ fissati}}} \sum_{\{P_v\}} \gamma^{-\alpha h m_{4,v_0}} \\
 &\prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{h_v (1+\alpha) \tilde{n}_v \gamma^{h_v \tilde{n}_{1,v}} \gamma^{-h_v (2+\alpha) (s_v-1)} \gamma^{(h_v-h_{v'}) (-\alpha m_{4,v} + \alpha(n_v^e-3) \chi(4 \leq n_v^e \leq 10) + \alpha(n_v^e-1) \chi(n_v^e > 10))}}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

dove abbiamo ancora una volta usato che le costanti di accoppiamento si possano stimare con ε e che $h \equiv h_{v_0}$. Usando le (5.15) possiamo riscrivere la (6.22) nella forma

$$\begin{aligned}
 (6.22) &\leq C^m \varepsilon^n \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e \text{ fissati}}} \sum_{\{P_v\}} \gamma^{h \left[-\alpha m_{4,v_0} + (1+\alpha)(2m_{4,v_0} + m_{2,v_0} + m_{2',v_0} - \frac{n_{v_0}^e}{2}) + m_{2',v_0} - n_{1,v_0}^e \right]} \\
 &\cdot \gamma^{h \left[-(2+\alpha)(m_{4,v_0} + m_{2,v_0} + m_{2',v_0} - 1) \right]} \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{(h_v-h_{v'}) \left[(1+\alpha)(2m_{4,v} + m_{2,v} + m_{2',v} - \frac{n_v^e}{2}) \right]} \\
 &\cdot \gamma^{(h_v-h_{v'}) \left[m_{2',v} - n_{1,v}^e - (2+\alpha)(m_{4,v} + m_{2,v} + m_{2',v} - 1) - \alpha m_{4,v} + \alpha(n_v^e-3) \chi(4 \leq n_v^e \leq 10) + \alpha(n_v^e-1) \chi(n_v^e > 10) \right]} = \\
 &= C^m \varepsilon^n \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e \text{ fissati}}} \sum_{\{P_v\}} \gamma^{h \left(2+\alpha - \frac{1+\alpha}{2} n_{v_0}^e - n_{1,v_0}^e - m_{2,v_0} \right)} \\
 &\cdot \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{(h_v-h_{v'}) \left[\chi(n_v^e=2) + (2-2\alpha + \frac{\alpha-1}{2} n_v^e) \chi(4 \leq n_v^e \leq 10) + (2 + \frac{\alpha-1}{2} n_v^e) \chi(n_v^e > 10) - m_{2,v} - n_{1,v}^e \right]} \equiv \\
 &\equiv C^m \varepsilon^n \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e \text{ fissati}}} \sum_{\{P_v\}} \gamma^{h(\delta_{ext} - m_{2,v_0})} \gamma^{(h_v-h_{v'}) (\delta_v - m_{2,v})}
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Come già visto nel precedente paragrafo, la dipendenza da $m_{2,v}$ scomparirà quando, dopo aver rinormalizzato, useremo al posto di ν_0 la costante corrente $\gamma^h \nu_h$; per comodità allora porremo nel seguito del paragrafo $m_{2,v} \equiv 0$.

Va notato che il conteggio di potenze in (6.23), pur essendo tale da cancellare opportunamente tutte dimensioni dipendenti da $m_{4,v}$, $m_{2,v}$ e $m_{2',v}$, e' "anomalo", nel senso che fornisce dimensioni diverse da quelle ottimali fornite dal conteggio di potenze in spazio k (vedi Capitolo precedente) e fornisce una dimensione esterna δ_{ext} diversa dalle dimensioni interne δ_v . Questo non e' stupefacente, poiche', pur tenendo conto della regola del parallelogramma ad ogni vertice v , nella somma sulle ω siamo stati costretti a buttare via molti vincoli sulle ω di cui invece si riusciva a tener conto facendo le stime grafico per grafico; piu' esattamente abbiamo dovuto sommare su tutte le ω delle linee che si contraggono nei determinanti $\det G_{T_v}$, mentre nelle stime grafico per grafico abbiamo sommato sulle ω di tutti i propagatori, quindi delle linee già contratte, che sono la meta' di quelle ancora da contrarre (o in altre parole, per stimare con costante i determinanti $\det G_{T_v}$, abbiamo dovuto stimare con 1 tutte le delta di Kronecher $\delta_{\omega(j,i),\omega(j',i')}$ che compaiono nella (6.6)). Quindi e' naturale che, buttando via delle informazioni, si ottenga un conteggio di potenze non ottimale. Piuttosto stupefacente e' invece il fatto che le dimensioni dipendenti da $m_{4,v}$, $m_{2,v}$ e $m_{2',v}$ si cancellino tutte tra loro nel modo giusto.

E' anche naturale che le dimensioni dipendano da α . Ad esempio ci aspettiamo che nel caso limite in cui $\alpha \rightarrow \infty$ (quasi-particelle continue) le stime precedenti non funzionino piu'. In questo caso infatti potremmo sostituire le somme sulle ω con delle medie sull' angolo ω (che danno un contributo $O(1)$) e le delta di Kronecher contenute nella (6.6) con delle delta di Dirac. Ma allora non potremmo stimare i determinanti con costante, poiche' i propagatori contenuti negli elementi di matrice non avrebbero modulo limitato. Questo e' anche il motivo per cui non si riescono a riprodurre le stime sui determinanti in spazio k : negli elementi di matrice dei determinanti comparirebbero necessariamente delle delta di Dirac che vincolino gli impulsi delle due mezze linee ad essere uguali.

Pur sapendo che il conteggio (6.23) vale esattamente solo se $\alpha = \frac{1}{2}$ (altrimenti comparirebbe un fattore logaritmicamente divergente) proviamo a ottimizzare le dimensioni rispetto ad α . Vediamo subito che piu' α e' piccolo piu' le dimensioni δ_v e δ_{ext} si avvicinano a quelle ottimali (ovvero a $\rho_v = 2 - \frac{n_v^e}{2} - n_{1,v}^e$); nel caso limite $\alpha = 0$, $\delta_v = \delta_{ext} = \rho_v$. D' altra parte sappiamo dalla discussione in Appendice A2 che le stime sul decadimento all' infinito di $g_\omega^{(h)}$ (che abbiamo usato in questo paragrafo per ricavare la (6.23)) valgono solo se $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Quindi $\alpha = \frac{1}{2}$ e' la scelta ottimale per la larghezza dei settori angolari (ai fini delle stime che stiamo facendo). Prima di specializzarci definitivamente al caso $\alpha = \frac{1}{2}$ vediamo solamente cosa otterremmo nella (6.23) ponendo $\alpha = 1$ (che e' un caso interessante, poiche', come visto nel Capitolo 4, si riesce a portare fino in fondo la rinormalizzazione).

Per $\alpha = 1$ si ha

$$\begin{aligned}
 \delta_v &= \chi(n_v^e = 2) + \left(2 - 2\alpha + \frac{\alpha - 1}{2} n_v^e\right) \chi(4 \leq n_v^e \leq 10) + \left(2 + \frac{\alpha - 1}{2} n_v^e\right) \chi(n_v^e > 10) - n_{1,v}^e = \\
 &= \chi(n_v^e = 2) + 2\chi(n_v^e > 10) - n_{1,v}^e \\
 \delta_{ext} &= 2 + \alpha - \frac{1 + \alpha}{2} n_v^e - n_{1,v}^e = 3 - n_v^e - n_{1,v}^e
 \end{aligned}
 \tag{6.24}$$

Quindi i grafici sarebbero tutti rilevanti o marginali (ossia avrebbero tutti dimensione positiva o nulla) ed e' chiaro che non si riuscirebbe a dar senso alla teoria (andrebbero rinormalizzati tutti gli ammassi!!!).

D' ora in poi specializziamoci al caso $\alpha = \frac{1}{2}$. Vediamo come vengono fuori le dimensioni in questo caso:

$$\begin{aligned}
 \delta_v &= \chi(n_v^e = 2) + \left(2 - 2\alpha + \frac{\alpha - 1}{2} n_v^e\right) \chi(4 \leq n_v^e \leq 10) + \left(2 + \frac{\alpha - 1}{2} n_v^e\right) \chi(n_v^e > 10) - n_{1,v}^e = \\
 6.21a \quad &= \chi(n_v^e = 2) + \left(1 - \frac{1}{2} n_v^e\right) \chi(4 \leq n_v^e \leq 10) + \left(2 - \frac{1}{2} n_v^e\right) \chi(n_v^e > 10) - n_{1,v}^e \quad (6.25) \\
 \delta_{ext} &= 2 + \alpha - \frac{1 + \alpha}{2} n_v^e - n_{1,v}^e = \frac{5}{2} - \frac{3n_v^e}{4} - n_{1,v}^e
 \end{aligned}$$

Quindi vediamo che la dimensione interna e' uguale a 1 se $n_v^e = 2$ e $n_{1,v}^e = 0$ ed e' uguale a 0 se $n_v^e = 2$ e $n_{1,v}^e = 1$ oppure se $n_v^e = 4$ e $n_{1,v}^e = 0$; le dimensioni degli ammassi con piu' gambe e' "sbagliata" (nel senso che e' diversa da $2 - \frac{n_v^e}{2} - n_{1,v}^e$ ma comunque e' del segno giusto (tutti i grafici con piu' di quattro gambe sono irrilevanti). La dimensione esterna invece e' uguale a 1 (come sperato!) se $n_v^e = 2$ e $n_{1,v}^e = 0$ ed e' negativa in tutti gli altri casi.

Tutte queste notevoli proprieta', che non sembravano prevedibili a priori, danno l' impressione di essere ancor piu' "miracolose" del fatto che tutte le dimensioni dipendenti da $m_{4,v}$, $m_{2,v}$ e $m_{2',v}$ si cancellino tutte tra loro nel modo giusto.

Consideriamo allora la (6.23) con $\alpha = \frac{1}{2}$ (e quindi con le dimensioni date dalla (6.24)). Supponiamo per il momento di togliere "a mano" i sottografici rilevanti, che poi nel prossimo paragrafo rinormalizzeremo esplicitamente. Supponiamo cioe' di trattare una teoria i cui grafici non abbiano mai ammassi a due gambe esterne. In questo caso, ripetendo la discussione riportata alla fine della §5.3 per stimare i risultati delle somme su $\tau \in \mathcal{T}_{h,n}$ e su $\{P_v\}$ a n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e fissati, troviamo il seguente Teorema, che riassume tutta la discussione di questo paragrafo.

TEOREMA 6.2 *Consideriamo la seguente quantita':*

$$\begin{aligned}
 6.22 \quad & \frac{1}{\beta L^2} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e \text{ fissati}}} \gamma^{-\delta_{ext}(n_0, v_0, n_0, v_0)} \left| \sum_{\substack{\{P_v\} \\ (n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e) \neq (2,0)}} \sum_T \sum_{\omega} \prod_{\ell \in T} g_{\ell} e^{-i p_F \omega_{\ell} x_{\ell}} \right. \\
 & \cdot \left. \prod_{v \text{ non p. f.}} \frac{1}{s_v!} (-1)^{s_v+1} \int dP_{T_v}(\mathbf{t}) \det G_{T_v}(\mathbf{t}) \prod_{v \text{ p. f.}} r_v \right| \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

nel caso in cui $\alpha = \frac{1}{2}$ e dove δ_{ext} e' data dalla (6.25).

La (6.26) e' una forma adimensionale della norma (6.4), nota il fattore $\gamma^{-\delta_{ext}}$; in piu' sono stati tolti tutti i contributi da grafici contenenti ammassi rilevanti.

Supponiamo che β sia finito, che $v_0 = 0$ e che le altre costanti di accoppiamento siano limitate, ossia che

$$6.23 \quad \max\{|\alpha_0|, |\zeta_0|, |\lambda_0|\} \leq \varepsilon \quad (6.27)$$

per qualche costante ε .

Allora la quantita' in (6.26) e' stimata da:

$$6.24 \quad C^m \varepsilon^n (\log \beta)^{n-1} \quad (6.28)$$

per qualche costante C .

Osservazioni.

(1) Si potrebbe enunciare anche un Teorema in cui si consideri la stima della grandezza (6.26) a cui sia pero' imposto anche il vincolo $\delta_v < 0$. In questo caso chiaramente si troverebbe che l' analogo della (6.26) sarebbe

stimato da $C^n \varepsilon^n \gamma^{h\delta_{ext}}$, senza nessun termine logaritmicamente divergente. E' chiaro pero' che questo caso sarebbe privo di interesse per il problema che stiamo trattando (sappiamo di non riuscire ad eliminare i grafici marginali con le operazioni di rinormalizzazione).

(2) La grandezza in (6.28) e' sommabile su n se $C\varepsilon \log \beta < 1$. In questo senso possiamo chiamare il risultato del Teorema 6.2 *stime non perturbative non rinormalizzate per i potenziali efficaci*.

(3) L' ipotesi $\nu_0 = 0$ serve a garantire che $m_{2,\nu} = 0$ e quindi che le dimensioni dei grafici non dipendano da $m_{2,\nu}$. Si potrebbe analogamente richiedere che un elemento di grafico di tipo ν contenuto nell' ammasso ν (e non in alcun ammasso piu' piccolo) abbia costante di accoppiamento uguale a $\nu_0 \gamma^{h_\nu}$.

p.6.2 6.2 .Stime non perturbative per la funzione beta

In questa sezione vogliamo riprodurre delle stime analoghe a quelle del paragrafo precedente, nel caso pero' in cui si decida di rinormalizzare gli ammassi a due gambe esterne, come discusso nel paragrafo §5.3 (gli ammassi a quattro gambe esterne non si riescono a rinormalizzare, per quanto spiegato nel Capitolo 5, §5.3). Riusciremo a mostrare l' esistenza in senso non perturbativo di una funzione beta, che controlla il flusso della costante corrente ν_h .

Dobbiamo introdurre le definizioni delle operazioni di rinormalizzazione in spazio x . Dobbiamo infatti discutere la rinormalizzazione consistentemente in spazio x , visto che vogliamo usare la stima di Gram-Hadamard per i determinanti (e questa stima, come spiegato nel paragrafo precedente, si riesce a realizzare solo in spazio x).

Sia

$$6.25 \quad \int dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \psi_{x_2, \omega_2}^- e^{ip_F(\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) \quad (6.29)$$

il valore di un generico grafico a due gambe esterne (per scrivere il nucleo integrale F_{ω_1, ω_2} come funzione della differenza $x_1 - x_2$ abbiamo usato l' invarianza per traslazioni della teoria). Anche se nella (6.29) non e' specificato esplicitamente, bisogna pensare che i campi esterni siano a frequenza h_0 , mentre il nucleo integrale F_{ω_1, ω_2} sia associato ad un ammasso a frequenza $h_1 > h_0$.

Vogliamo definire come agisce l' operatore \mathcal{L} sull' espressione (6.29), verificare che la definizione data e' equivalente a quella gia' data in spazio k e infine mostrare che si ottiene il guadagno dimensionale voluto, grazie alle proprieta' di invarianza per rotazione della teoria.

Definiamo:

$$6.26 \quad \begin{aligned} \mathcal{L} \int dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \psi_{x_2, \omega_2}^- e^{ip_F(\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) &\equiv \\ &\equiv \chi \left(|\omega_1 - \omega_2| \leq 2\pi\gamma^{\frac{h}{2}} \right) \int dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \psi_{x_1, \omega_2}^- e^{ip_F(\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (6.30)$$

Valgono tutte le osservazioni fatte riguardo le definizioni di \mathcal{L} in spazio k . In particolare bisogna ricordare che se β e L sono finiti (e nel nostro caso β e' necessariamente finito), l' espressione (6.30) e' solamente formale, non solo perche', come al solito, gli integrali vanno sostituiti con delle sommatorie, ma anche perche' la localizzazione non va realizzata sostituendo semplicemente il campo ψ_{x_2, ω_2}^- con ψ_{x_1, ω_2}^- ; piuttosto bisogna sostituire ψ_{x_2, ω_2}^- con

$$6.27 \quad \psi_{x_2, \omega_2}^- \rightarrow \psi_{x_1, \omega_2}^- e^{-i0_\beta(x_{2,0} - x_{1,0}) - i0_{L,\omega}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \quad (6.31)$$

vedi (5.24). Questo equivale a mettere il punto di sottrazione, invece che in zero, in $(0_\beta, 0_{L,\omega})$, come e' giusto fare. Pero', come nel caso delle stime $n!$, trascureremo questo fatto, che complicherebbe solo la discussione senza introdurre idee nuove. Ancora una volta rimandiamo a [BM] per una discussione piu' completa e coerente.

Ricordiamo anche il significato della funzione χ davanti al secondo membro della (6.30). Noi vogliamo che l' operazione di localizzazione selezioni da ogni sottografico pericoloso il contributo piu' divergente. D'

altra parte noi sappiamo dall' analisi in spazio k (e dalle considerazioni del precedente paragrafo) che un sottografico le cui linee esterne (ancora contratte nel grafico) abbiano indici ω_1, ω_2 tali che $|\omega_1 - \omega_2| \geq 2\pi\gamma^{\frac{h}{2}}$ e' identicamente nullo, per le proprieta' di supporto compatto dei propagatori associati alle sue linee esterne e per la regola di conservazione dell' impulso; allora sicuramente il suo contributo non e' pericoloso, e per questo decidiamo che non venga selezionato dall' operazione di localizzazione. Per comodita' di notazione nel seguito non scriveremo esplicitamente la funzione χ , ma supporremo sempre che gli indici ω delle linee esterne siano tali da rispettare il vincolo voluto.

Definiamo poi \mathcal{L} in modo che annulli tutti i nuclei integrali corrispondenti a sottografici con piu' di due gambe esterne (oppure con due gambe esterne ma con almeno uno dei due campi uscenti uguale a $\mathcal{D}\psi$).

Usando l' invarianza per rotazioni e' facile verificare che e' equivalente localizzare i campi nel punto x_1 o nel punto x_2 . Infatti dal Teorema 5.1 sappiamo che

$$6.28 \quad \int dy F_{\omega_1, \omega_2}(y) e^{iky} = \tilde{F}(k_0, |\mathbf{k}|) \quad (6.32)$$

Usando la (6.32) otteniamo:

$$6.29 \quad \begin{aligned} & \int dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \psi_{x_1, \omega_2}^- e^{ip_F(\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) = \\ & = \int dx_1 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \psi_{x_1, \omega_2}^- e^{ip_F x_1(\omega_1 - \omega_2)} \int d(x_1 - x_2) e^{ip_F \omega_2(x_1 - x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) = \\ & = \int dx_2 \psi_{x_2, \omega_1}^+ \psi_{x_2, \omega_2}^- e^{ip_F x_2(\omega_1 - \omega_2)} \int dt e^{ip_F \omega_1 t} F_{\omega_1, \omega_2}(t) = \\ & = \int dx_1 dx_2 \psi_{x_2, \omega_1}^+ \psi_{x_2, \omega_2}^- e^{ip_F(\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Usando le relazioni

$$6.30 \quad \begin{aligned} \psi_{x, \omega}^\pm & \equiv \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{\pm ikx} \psi_{k, \omega}^\pm \\ \psi_{k, \omega}^\pm & \equiv \int dx e^{\mp ikx} \psi_{x, \omega}^\mp \end{aligned} \quad (6.34)$$

possiamo studiare l' effetto dell' operatore $\mathcal{R} \equiv 1 - \mathcal{L}$ sulla (6.29):

$$6.31 \quad \begin{aligned} & \mathcal{R} \int dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \psi_{x_2, \omega_2}^- e^{ip_F(\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) = \\ & = \int dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ (\psi_{x_2, \omega_2}^- - \psi_{x_1, \omega_2}^-) e^{ip_F(\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) = \\ & = \int dx_1 dx_2 \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dk_2}{(2\pi)^3} e^{ik_1 x_1} (e^{-ik_2 x_2} - e^{-ik_2 x_1}) \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^- e^{ip_F(\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) = \\ & = \int dx_1 e^{ix_1(k_1 + \omega_1 p_F - k_2 - \omega_2 p_F)} \int \frac{dk_1}{(2\pi)^3} \frac{dk_2}{(2\pi)^3} \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^- \cdot \\ & \cdot \int d(x_1 - x_2) (e^{ik_2(x_1 - x_2)} - 1) e^{ip_F \omega_2(x_1 - x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) = \\ & = \int dk_1 \frac{dk_2}{(2\pi)^3} \delta(k_1 + \omega_1 p_F - k_2 - \omega_2 p_F) \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^- \left(\tilde{F}(k_2, 0, |\mathbf{k}_2 + p_F \omega_2|) - \tilde{F}(0, p_F) \right) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Nell' ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione (6.32); e' evidente dall' ultima riscrittura della (6.35) che la definizione di \mathcal{R} e di \mathcal{L} in spazio x e' equivalente a quella gia' usata nel Capitolo 4 per la discussione in spazio k (analogamente si puo' dimostrare che, usando la localizzazione (6.31), si ritrova la corrispondente definizione usata in spazio k).

Verifichiamo che la definizione di rinormalizzazione data sopra fornisce il guadagno dimensionale voluto:

$$\begin{aligned}
 (6.35) &= \int dk_1 \frac{dk_2}{(2\pi)^3} \delta(k_1 + \omega_1 p_F - k_2 - \omega_2 p_F) \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^- \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \tilde{F}(tk_{2,0}, |t\mathbf{k}_2 + p_F \omega_2|) = \\
 6.32 \quad &= \int dk_1 \frac{dk_2}{(2\pi)^3} \delta(k_1 + \omega_1 p_F - k_2 - \omega_2 p_F) \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^- \times \\
 &\times \int_0^1 dt \left\{ k_{2,0} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial k_0}(tk_{2,0}, \rho(t)) + \frac{(t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F)\mathbf{k}_2^\parallel + t(\mathbf{k}_2^\perp)^2}{\rho(t)} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \rho}(tk_{2,0}, \rho(t)) \right\}
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

dove $\mathbf{k}^\parallel \equiv \mathbf{k} \cdot \omega_2$, $\mathbf{k}^\perp \equiv \mathbf{k} \cdot \omega_2^\perp$ e $\rho(t) \equiv \sqrt{(t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F)^2 + (t\mathbf{k}_2^\perp)^2}$.

Il termine $\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \rho}\right)_\vartheta (tk_{2,0}, \rho(t))$ puo' essere riscritto, se $\vartheta(t)$ e' l' angolo tra ω_2 e $t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F$, nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \rho}\right)_\vartheta (tk_{2,0}, \rho(t)) &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{k}^\parallel} \cos \vartheta(t) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{k}^\perp} \sin \vartheta(t) = \\
 6.33 \quad &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{k}^\parallel} \frac{t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F}{\rho(t)} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{k}^\perp} \frac{t\mathbf{k}_2^\perp}{\rho(t)} = \\
 &= \frac{t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F}{\rho(t)} \int dy i y^\parallel F(y) e^{i(tk_2 + \omega_2 p_F)y} + \frac{t\mathbf{k}_2^\perp}{\rho(t)} \int dy i y^\perp F(y) e^{i(tk_2 + \omega_2 p_F)y}
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

dove abbiamo usato la (6.32) omettendo di riportare la dipendenza (fittizia) di F da ω_1, ω_2 .

Inserendo la (6.37) nella (6.36) otteniamo:

$$\begin{aligned}
 (6.36) &= \int_0^1 dt \int dk_1 \frac{dk_2}{(2\pi)^3} \delta(k_1 + \omega_1 p_F - k_2 - \omega_2 p_F) \psi_{k_1, \omega_1}^+ \psi_{k_2, \omega_2}^- \times \\
 6.34 \quad &\times \int dy F(y) e^{i(tk_2 + \omega_2 p_F)y} \left\{ k_{2,0} i y_0 + \frac{(t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F)\mathbf{k}_2^\parallel + t(\mathbf{k}_2^\perp)^2}{\rho(t)} \left(\frac{t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F}{\rho(t)} i y^\parallel + \frac{t\mathbf{k}_2^\perp}{\rho(t)} i y^\perp \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

Studiamo come prima cosa il contributo del termine $\sim k_{2,0} i y_0$, che e' il piu' semplice. Se antitrasformiamo secondo Fourier i campi ψ_k otteniamo:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 dt \int dk_1 \frac{dk_2}{(2\pi)^3} dx_1 dx_2 \delta(k_1 + \omega_1 p_F - k_2 - \omega_2 p_F) \psi_{x_1, \omega_1}^+ e^{-ik_1 x_1} \psi_{x_2, \omega_2}^- \partial_{x_2,0} e^{ik_2 x_2} \times \\
 6.35 \quad &\times \int dy y_0 F(y) e^{i(tk_2 + \omega_2 p_F)y} = \\
 &= \int_0^1 dt \frac{dk_2}{(2\pi)^3} dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ (-\partial_{x_2,0} \psi_{x_2, \omega_2}^-) e^{ik_2(x_2 - x_1)} e^{ip_F x_1(\omega_1 - \omega_2)} \int dy y_0 F(y) e^{i(tk_2 + \omega_2 p_F)y}
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

Nell' ultimo passaggio abbiamo usato la possibilita' di integrare per parti rispetto a dx_2 senza inserire nessun termine di bordo. Perche' questa operazione sia giustificata e' necessario pensare che il campo ψ_{x_2, ω_2}^- sia contratto con un altro campo. In questo modo il termine di bordo e' della forma $g_{\omega_2}(x_2 - x_3) e^{ik_2 x_2} \Big|_{-\infty}^{\infty}$ e quindi e' nullo (poiche' il propagatore $g_{\omega_2}(x_2 - x_3)$ decade all' infinito piu' veloce di ogni potenza); notiamo che se ci troviamo a volume finito il termine di bordo e' $g_{\omega_2}(x_2 - x_3) e^{ik_2 x_2} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$ ed e' ancora nullo poiche' sono supposte condizioni periodiche al bordo.

Eseguito nella (6.39) l' integrazione rispetto a k_2 otteniamo:

$$\begin{aligned}
 (6.39) &= \int_0^1 dt dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ (-\partial_{x_2,0} \psi_{x_2, \omega_2}^-) e^{ip_F x_1(\omega_1 - \omega_2)} \int dy \delta(x_2 - x_1 + ty) y_0 F(y) e^{i\omega_2 p_F y} = \\
 6.36 \quad &= \int_0^1 dt dx_1 dy \psi_{x_1, \omega_1}^+ (-\partial_{x_0} \psi_{x_1 - ty, \omega_2}^-) e^{ip_F x_1(\omega_1 - \omega_2)} y_0 F(y) e^{i\omega_2 p_F y}
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Se nella (6.40) pensiamo di eseguire l' integrazione in dy a x_1 fissato, possiamo liberamente eseguire il cambio di (nome di) variabile $y \rightarrow x_1 - x_2$ e troviamo l' espressione finale:

$$6.37 \quad \int_0^1 dt dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \left(-\partial_{x_0} \psi_{x_1+t(x_2-x_1), \omega_2}^- \right) e^{ip_F x_1 (\omega_1 - \omega_2)} (x_1 - x_2)_0 F(x_1 - x_2) e^{ip_F \omega_2 (x_1 - x_2)} \quad (6.41)$$

I termini $\sim iy^\parallel$ e $\sim iy^\perp$ si possono trattare analogamente, a meno della complicazione dovuta ai fattori

$$\frac{t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F}{\rho(t)} \frac{(t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F)\mathbf{k}_2^\parallel + t(\mathbf{k}_2^\perp)^2}{\rho(t)}$$

e

$$\frac{t\mathbf{k}_2^\perp}{\rho(t)} \frac{(t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F)\mathbf{k}_2^\parallel + t(\mathbf{k}_2^\perp)^2}{\rho(t)}$$

Possiamo pero' convenientemente definire degli operatori differenziali "paralleli" e "ortogonali", nel seguente modo:

$$6.38 \quad \begin{aligned} i \frac{t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F}{\rho(t)} \frac{(t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F)\mathbf{k}_2^\parallel + t(\mathbf{k}_2^\perp)^2}{\rho(t)} \psi_{k_2, \omega_2}^- &\equiv - \int dx_2 e^{ik_2 x_2} D^\parallel(t) \psi_{x_2, \omega_2}^- \\ i \frac{t\mathbf{k}_2^\perp}{\rho(t)} \frac{(t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F)\mathbf{k}_2^\parallel + t(\mathbf{k}_2^\perp)^2}{\rho(t)} \psi_{k_2, \omega_2}^- &\equiv - \int dx_2 e^{ik_2 x_2} D^\perp(t) \psi_{x_2, \omega_2}^- \end{aligned} \quad (6.42)$$

Se usiamo queste definizioni nella (6.38) e ragionando come abbiamo fatto per ricavare la (6.41) troviamo finalmente:

$$6.39 \quad \begin{aligned} \mathcal{R} \int dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \psi_{x_2, \omega_2}^- e^{ip_F (\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) &= \\ = \int_0^1 dt dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \left(-(x_1 - x_2)_0 \partial_{x_0} - (x_1 - x_2)^\parallel D^\parallel(t) - (x_1 - x_2)^\perp D^\perp(t) \right) \psi_{x_1+t(x_2-x_1), \omega_2}^- &\cdot \\ \cdot e^{ip_F x_1 (\omega_1 - \omega_2)} F(x_1 - x_2) e^{ip_F \omega_2 (x_1 - x_2)} &= \\ = \int_0^1 dt dx_1 dx_2 \left((x_1 - x_2)_0 \partial_{x_0} + (x_1 - x_2)^\parallel D^\parallel(t) + (x_1 - x_2)^\perp D^\perp(t) \right) \psi_{x_1, \omega_1}^+ \psi_{x_1+t(x_2-x_1), \omega_2}^- &\cdot \\ \cdot e^{ip_F x_1 (\omega_1 - \omega_2)} F(x_1 - x_2) e^{ip_F \omega_2 (x_1 - x_2)} & \end{aligned} \quad (6.43)$$

dove nell' ultima uguaglianza abbiamo usato la possibilita', discussa sopra, di localizzare in x_1 piuttosto che in x_2 (che, all' atto pratico, si e' tradotta nella possibilita' di integrare per parti l' operatore $(x_1 - x_2)_0 \partial_{x_0} + (x_1 - x_2)^\parallel \partial_{\mathbf{x}^\parallel} + (x_1 - x_2)^\perp \partial_{\mathbf{x}^\perp}$).

Per verificare che la definizione data sopra di rinormalizzazione fornisce il giusto guadagno dimensionale occorre trovare una stima per i propagatori

$$6.40 \quad \begin{aligned} D^\parallel(t) g_\omega^h(x) &\equiv \langle (D^\parallel(t) \psi_{0, \omega}^-) \psi_{x, \omega}^+ \rangle \\ D^\perp(t) g_\omega^h(x) &\equiv \langle (D^\perp(t) \psi_{0, \omega}^-) \psi_{x, \omega}^+ \rangle \end{aligned} \quad (6.44)$$

Dimostriamo al proposito il seguente:

LEMMA 6.1 *I propagatori $D^\parallel(t) g_\omega^h(x)$ e $D^\perp(t) g_\omega^h(x)$, definiti come nella (6.42), soddisfano le seguenti disuguaglianze:*

$$6.41 \quad \begin{aligned} |D^\parallel(t) g_\omega^h(x)| &\leq \gamma^h \gamma^{\frac{3}{2}h} \frac{C_N}{1 + [(\gamma^h t)^2 + (\gamma^h \mathbf{x} \cdot \omega)^2 + (\gamma^h \mathbf{x} \cdot \omega^\perp)^2]^N} \\ |D^\perp(t) g_\omega^h(x)| &\leq \gamma^{\frac{3}{2}h} \gamma^{\frac{3}{2}h} \frac{C'_N}{1 + [(\gamma^h t)^2 + (\gamma^h \mathbf{x} \cdot \omega)^2 + (\gamma^h \mathbf{x} \cdot \omega^\perp)^2]^N} \end{aligned} \quad (6.45)$$

Osservazioni.

(1) L' enunciato del lemma sopra e' esatto nel limite di volume infinito e temperatura nulla. Per β e L finiti bisogna sostituire t con $\frac{\sin(0_{\beta}t)}{0_{\beta}}$, $\mathbf{x} \cdot \omega$ con $\frac{\sin(0_{L,\omega}\mathbf{x} \cdot \omega)}{0_{L,\omega}}$ e $\mathbf{x} \cdot \omega^{\perp}$ con $\frac{\sin(0_{L,\omega}\mathbf{x} \cdot \omega^{\perp})}{0_{L,\omega}}$. Per il resto l' enunciato e la dimostrazione del teorema rimangono esattamente gli stessi (confronta questa dimostrazione con quella del Lemma 4.1 riportata in Appendice A2);

(2) Come e' messo esplicitamente in evidenza dalla scrittura della (6.45), la stima di $D^{\parallel}(t)g_{\omega}^h(x)$ ha un γ^h in piu' rispetto alla stima del propagatore $g_{\omega}^h(x)$, mentre la stima di $D^{\perp}(t)g_{\omega}^h(x)$ ha un $\gamma^{\frac{3}{2}h}$ in piu' rispetto alla stima del propagatore $g_{\omega}^h(x)$. Questi fattori aggiuntivi sono quelli necessari per ottenere il giusto guadagno dall' operazione di rinormalizzazione.

Dimostrazione. Iniziamo a stimare il valore di $-(\gamma^h \mathbf{x}^{\parallel})^2 D^{\parallel}(t)g_{\omega}^h(x)$:

$$\begin{aligned}
& -(\gamma^h \mathbf{x}^{\parallel})^2 D^{\parallel}(t)g_{\omega}^h(x) = \\
& = i(\gamma^h \mathbf{x}^{\parallel})^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{ikx} (t\mathbf{k}_2^{\parallel} + p_F) \frac{(t\mathbf{k}_2^{\parallel} + p_F)\mathbf{k}_2^{\parallel} + t(\mathbf{k}_2^{\perp})^2}{\rho(t)^2} \frac{f[\gamma^{-2h}(k_0^2 + e_{\omega}(\mathbf{k})^2)] \chi_{\omega}^h}{-ik_0 + e_{\omega}(\mathbf{k})} = \\
6.42 \quad & = -i \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \gamma^{2h} \partial_{\mathbf{k}^{\parallel}}^2 e^{ikx} (t\mathbf{k}_2^{\parallel} + p_F) \frac{(t\mathbf{k}_2^{\parallel} + p_F)\mathbf{k}_2^{\parallel} + t(\mathbf{k}_2^{\perp})^2}{\rho(t)^2} \frac{f[\gamma^{-2h}(k_0^2 + e_{\omega}(\mathbf{k})^2)] \chi_{\omega}^h}{-ik_0 + e_{\omega}(\mathbf{k})} = \\
& = -i \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \gamma^{2h} e^{ikx} \partial_{\mathbf{k}^{\parallel}}^2 \left\{ (t\mathbf{k}_2^{\parallel} + p_F) \frac{(t\mathbf{k}_2^{\parallel} + p_F)\mathbf{k}_2^{\parallel} + t(\mathbf{k}_2^{\perp})^2}{\rho(t)^2} \frac{f[\gamma^{-2h}(k_0^2 + e_{\omega}(\mathbf{k})^2)] \chi_{\omega}^h}{-ik_0 + e_{\omega}(\mathbf{k})} \right\} \quad (6.46)
\end{aligned}$$

dove $e_{\omega}(\mathbf{k}) = \beta \mathbf{k}^{\parallel} + \frac{\mathbf{k}^{\parallel 2} + \mathbf{k}^{\perp 2}}{2m}$ e dove f e χ sono le funzioni C^{∞} a supporto compatto che fanno si' che la regione di integrazione sia quella definita dal settore ω su scala h .

Quando la derivata agisce sull' espressione tra parentesi graffe si generano molti termini. I termini che, dimensionalmente, danno il contributo piu' grande sono quelli in cui la derivata non agisce sui fattori $(t\mathbf{k}_2^{\parallel} + p_F)$ o $\rho(t)$. Un termine tipico che gode di questa proprieta' e' il seguente (in cui entrambe le derivate cadono sulla funzione f):

$$\begin{aligned}
6.42a \quad & \left| -i \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \gamma^{2h} e^{ikx} \left\{ (t\mathbf{k}_2^{\parallel} + p_F) \frac{(t\mathbf{k}_2^{\parallel} + p_F)\mathbf{k}_2^{\parallel} + t(\mathbf{k}_2^{\perp})^2}{\rho(t)^2} \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{f''[\gamma^{-2h}(k_0^2 + e_{\omega}(\mathbf{k})^2)] \chi_{\omega}^h}{-ik_0 + e_{\omega}(\mathbf{k})} \left[\gamma^{-2h} 2e_{\omega}(\mathbf{k}) \left(\beta + \frac{\mathbf{k}^{\parallel}}{m} \right) \right]^2 \right\} \right| \leq \\
& \leq \gamma^{\frac{3}{2}h} \gamma^h \int d\frac{k}{(2\pi)^3} |G^{(h)}(k_0, \mathbf{k})| \leq \gamma^{\frac{3}{2}h} \gamma^h \tilde{C}_1 \quad (6.47)
\end{aligned}$$

Per mettere in evidenza i fattori dimensionali abbiamo usato le proprieta' di supporto compatto delle funzioni f e χ . Piu' esattamente la funzione $G^{(h)}(k_0, \mathbf{k})$ e' la seguente:

$$6.42b \quad G^{(h)}(k_0, \mathbf{k}) = (t\gamma^h \mathbf{k}_2^{\parallel} + p_F) \frac{(t\gamma^h \mathbf{k}_2^{\parallel} + p_F)\mathbf{k}_2^{\parallel} + t(\mathbf{k}_2^{\perp})^2}{\rho(t)^2} \frac{f''[(k_0^2 + \tilde{e}_{\omega}(\mathbf{k})^2)] \chi_{\omega}^h}{-ik_0 + \tilde{e}_{\omega}(\mathbf{k})} \left[2\tilde{e}_{\omega}(\mathbf{k}) \left(\beta + \gamma^h \frac{\mathbf{k}^{\parallel}}{m} \right) \right]^2 \quad (6.48)$$

dove $\tilde{e}_{\omega}(\mathbf{k}) \equiv \beta \mathbf{k}^{\parallel} + \frac{\gamma^h \mathbf{k}^{\parallel 2} + \mathbf{k}^{\perp 2}}{2m}$. La funzione $G^{(h)}(k_0, \mathbf{k})$ ha una debole dipendenza da h , nel senso che, quando h tende a $-\infty$, $G^{(h)}(k_0, \mathbf{k})$ tende ad una funzione adimensionale $G(k_0, \mathbf{k})$, ed il limite e' raggiunto esponenzialmente.

Gli altri termini che si generano quando si fanno agire le due derivate sull' espressione tra parentesi graffe nella (6.46) si stimano tutti allo stesso modo. Anzi, quei termini che si generano quando una delle derivate

(o tutte e due) cadono sui fattori $(t\mathbf{k}_2^\parallel + p_F)$ o $\rho(t)$, hanno un γ^h (o un γ^{2h}) in piu' nella stima. Mettendo insieme tutti i contributi dei diversi termini otteniamo:

$$6.43 \quad |(\gamma^h \mathbf{x}^\parallel)^2 \mathbb{D}^\parallel(t) g_\omega^h(x)| \leq \gamma^{\frac{3}{2}h} \gamma^h \tilde{C}_2 \quad (6.49)$$

Del tutto analogamente si stimano i contributi di

$$\begin{aligned} & (\gamma^h \mathbf{x}^\parallel)^{2N} \mathbb{D}^\parallel(t) g_\omega^h(x) \\ & (\gamma^{\frac{h}{2}} \mathbf{x}^\perp)^{2N} \mathbb{D}^\parallel(t) g_\omega^h(x) \\ & (\gamma^h t)^{2N} \mathbb{D}^\parallel(t) g_\omega^h(x) \end{aligned}$$

Si trova che tutti e tre i contributi sono stimati da una formula analoga alla (6.49), ovvero da $\gamma^{\frac{3}{2}h} \gamma^h \tilde{C}_N$, per N qualsiasi (in particolare per $N = 0$).

Sommando i tre contributi con N generico e quello con $N = 0$ si trova:

$$6.44 \quad \left| \left[1 + \left((\gamma^h \mathbf{x}^\parallel)^2 + (\gamma^{\frac{h}{2}} \mathbf{x}^\perp)^2 + (\gamma^h t)^2 \right)^N \right] \mathbb{D}^\parallel(t) g_\omega^h(x) \right| \leq \gamma^{\frac{3}{2}h} \gamma^h C_N \quad (6.50)$$

come volevasi dimostrare.

Con una dimostrazione analoga si ottiene la stima per il propagatore su cui agisce l' operatore differenziale perpendicolare.

Osservazione.

La dimostrazione precedente si puo' ripetere passo passo nel caso si voglia stimare il modulo di un propagatore su cui agisce piu' di una derivata covariante (o anche non covariante). Si trova, come ovvio, che i guadagni dimensionali si accumulano: per ogni operatore differenziale parallelo (come per ogni derivata rispetto a k_0 o rispetto a k^\parallel) si ottiene un γ^h in piu' rispetto alla stima del propagatore "nudo"; per ogni operatore differenziale perpendicolare si ottiene un $\gamma^{\frac{3}{2}h}$ in piu'.

Consideriamo adesso l' oggetto che vogliamo stimare:

$$6.44a \quad \frac{1}{\beta L^2} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e, n_{1,v_0}^e \\ \text{fissati}}} \int dx(P_{v_0}) \left| \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(P_{v_0}), \underline{\omega}(P_{v_0})) \right| \quad (6.51)$$

con

$$6.44b \quad \begin{aligned} \mathcal{W}^{(h)}(\tau, P_{v_0}, x(P_{v_0}), \underline{\omega}(P_{v_0})) &= \sum_{\{P_v\}} \sum_T \sum_\omega \prod_{\ell \in T} g_\ell e^{-ip_F \omega_\ell x_\ell} \\ &\cdot \prod_{v \text{ non p. f.}} \frac{1}{s_v!} (-1)^{s_v+1} \int dP_{T_v}(\mathbf{t}) \det G_{T_v}(\mathbf{t}) \prod_{v \text{ p. f.}} r_v \end{aligned} \quad (6.52)$$

dove la somma sulle ω in (6.52) va eseguita a priori solo sulle ω interne (abbiamo visto in realta' nel paragrafo precedente che siamo in grado di eseguire le stime fissando solo uno dei settori esterni).

L' oggetto che vogliamo stimare e' il coefficiente di ordine n della funzione beta. E' facile verificare che, se nella (6.51) supponiamo che l' albero τ sia un albero rinormalizzato "decorato" da un operatore \mathcal{L} che agisce sul primo vertice non banale che segue la radice, allora effettivamente la norma (6.51) e' una stima per il coefficiente di ordine n della funzione beta. Come tutti gli alberi rinormalizzati i punti finali di τ possono rappresentare, rispettivamente, $\alpha_0, \zeta_0, \int dx \lambda_0(x)$ o $\gamma^h \nu_h$. Come gia' osservato dopo la (6.4), la norma (6.52) fornisce una stima per il coefficiente di ordine n della funzione beta; piu' precisamente per la sua componente corrispondente al contributo selezionato dalla scelta del numero e del tipo di linee esterne.

Iniziamo a scrivere per esteso tutto l' integrale a cui siamo interessati. Dicendo "per esteso" intendiamo dire che non eseguiamo ancora nessuna operazione di interpolazione sui propagatori (ossia non usiamo la

scrittura ricavata nel paragrafo precedente per ottenere i fattori della forma $(x_1 - x_2)\partial_{x_1-x_2}$; piuttosto usiamo semplicemente la definizione dell'operazione \mathcal{R} :

$$\begin{aligned}
 6.46 \quad \mathcal{R} \int dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \psi_{x_2, \omega_2}^- e^{ip_F(\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) &= \\
 &= \int dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ (\psi_{x_2, \omega_2}^- - \psi_{x_1, \omega_2}^-) e^{ip_F(\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2)
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

e quindi scriviamo tutti gli effetti delle operazioni di rinormalizzazione come differenze tra propagatori.

Notiamo, poiche' sara' utile tra poco, che il secondo membro della (6.53) si puo' riscrivere nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 6.47 \quad (6.53) &= \int dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \psi_{x_2, \omega_2}^- e^{ip_F(\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) - \\
 &- \int dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \psi_{x_1, \omega_2}^- e^{ip_F x_1(\omega_1 - \omega_2)} e^{ip_F \omega_2(x_1 - x_2)} F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) = \\
 &= \int dx_1 dx_2 \psi_{x_1, \omega_1}^+ \psi_{x_2, \omega_2}^- e^{ip_F(\omega_1 x_1 - \omega_2 x_2)} \left(F_{\omega_1, \omega_2}(x_1 - x_2) - \delta(x_1 - x_2) \int dy e^{ip_F \omega_2 y} F_{\omega_1, \omega_2}(y) \right)
 \end{aligned} \tag{6.54}$$

Iniziamo a sostituire negli ammassi rinormalizzati piu' esterni (ossia in quelli contenuti solo in v_0 oppure, se non ce ne sono, nei primi che si incontrano risalendo l'albero τ) le espressioni sotto forma di sottrazioni con quelle interpolate (ossia sotto forma di derivate calcolate in un punto intermedio).

Facciamo sempre in modo che il propagatore uscente dall'ammasso rinormalizzato su cui cade la derivata appartenga all'albero ancorato T .

La derivata che agisce sul propagatore esterno all'ammasso fornisce un guadagno dimensionale γ^{h_1} ($h_1 \geq h_{v_0}$), come risulta dal lemma del precedente paragrafo.

Lo "zero" $(x_1 - x_2)$ puo' essere spezzato in una somma del tipo:

$$6.48 \quad (x_1 - x_2) = \sum_i (x_i - x_{i+1}) \tag{6.55}$$

dove i segmenti $(x_i - x_{i+1})$ appartengono tutti alla porzione dell'albero ancorato T contenuto nell'ammasso che stiamo considerando (diciamo che sia v_1). Per "zero" intendiamo un oggetto che, se integrato, puo' essere stimato dimensionalmente con un fattore γ^{hd} , con $h < 0$ e $d > 0$.

Dalla riscrittura (6.54) del valore dell'ammasso rinormalizzato, vediamo subito che se uno zero cade su un ammasso a due gambe rinormalizzato v_2 contenuto in v_1 , il controtermine dovuto alla rinormalizzazione (proporzionale a $\delta(x_i - x_j)$) si annulla identicamente. Quindi uno zero prodotto da una rinormalizzazione esterna che cade su un ammasso rinormalizzato piu' interno cancella la rinormalizzazione interna.

Prima o poi ogni zero $(x_i - x_{i+1})$ va a finire su un propagatore dell'albero ancorato T e, per quanto detto, ci puo' essere al massimo uno zero associato ad ogni propagatore (ovvero e' impossibile che si accumulino molti zeri su uno stesso propagatore).

Quando, dopo aver stimato i determinanti dello sviluppo delle aspettative troncate, eseguiremo l'integrazione sugli argomenti dei propagatori dell'albero T , otterremo da ogni zero $(x_i - x_{i+1})$ una perdita γ^{h_2} , per qualche $h_2 > h_1$.

Vediamo allora che globalmente una operazione di rinormalizzazione fornisce un guadagno dimensionale $\gamma^{h_1 - h_2}$; se riscriviamo $h_2 - h_1$ come una somma telescopica di differenze tra frequenze "contigue", vediamo che ogni ammasso a due gambe rinormalizzato riceve il desiderato fattore $\gamma^{h_v - h_{v'}}$.

Supponiamo ora di assegnare i propagatori su cui si fanno cadere gli zeri prodotti nelle rinormalizzazioni degli ammassi piu' esterni. Come gia' discusso per le stime $n!$, il numero delle possibili scelte che si possono fare e' stimato da C^n , dove n e' l'ordine dell'albero τ che stiamo considerando.

Iniziamo a stimare il contributo corrispondente ad ognuna di queste scelte (eseguimo le stime senza troppi dettagli, poiche' abbiamo gia' fatto la discussione in tutti i dettagli nei paragrafi precedenti).

Il prodotto dei moduli dei determinanti ci da' un fattore

$$6.49 \quad \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{\frac{3}{2}h_v(\tilde{n}_v - s_v + 1)} C_0^{\tilde{n}_v - s_v + 1} \quad (6.56)$$

dove abbiamo usato la stima sui propagatori

$$6.50 \quad |g_\omega^h(x)| \leq \gamma^{\frac{3}{2}h} \frac{C_N}{1 + \left(\gamma^h |t| + \gamma^h |\mathbf{x} \cdot \omega| + \gamma^{\frac{h}{2}} |\mathbf{x} \cdot \omega^\perp| \right)^N} \quad (6.57)$$

Stimando i propagatori dell' albero T ed eseguendo l' integrale sulle coordinate otteniamo

$$6.51 \quad \prod_{v \in v_0 \mid n_v^e = 2} \gamma^{-(h_v - h_{v'})} \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{\frac{3}{2}h_v(s_v - 1)} \gamma^{-\frac{5}{2}h_v(s_v - 1)} \tilde{C}_1^{s_v - 1} \quad (6.58)$$

dove la prima produttoria e' dovuta alle operazioni di rinormalizzazione, come spiegato sopra (abbiamo cioe' tenuto conto delle derivate e degli zeri associati ai propagatori dell' albero T). Per ottenere la (6.58) abbiamo usato l' ipotesi, cruciale, che su ogni propagatore dell' albero T agiscano al piu' due derivate (o operatori differenziali). Se infatti fosse possibile che si accumulassero m derivate (con $m = O(n)$) su un dato propagatore, dalla stima di $|\partial^m g_\omega^h(x)|$ otterremmo, rispetto alla solita stima, un indesiderato fattore $m!^\alpha$ ($\alpha > 1$) in piu', a causa del fatto che si sono scelti dei propagatori non analitici (vedi §5.2).

Il motivo per cui possiamo fare in modo che su ogni propagatore agiscano al piu' due derivate e' che abbiamo la liberta' di scegliere su quale punto localizzare i campi uscenti da un ammasso v su cui \mathcal{R} agisce in modo non banale. In altre parole possiamo decidere su quale dei due propagatori uscenti da v far cadere la derivata prodotta da \mathcal{R} . In particolare possiamo decidere di far agire le derivate sempre su propagatori interamente contenuti nell' ammasso v' , dove v' e' il primo ammasso che contiene l' ammasso v . Con questa scelta e' immediato verificare che su ogni propagatore dell' albero T possono cadere al massimo due derivate (chiaramente bisogna usare il fatto che stiamo rinormalizzando soltanto gli ammassi a due gambe esterne).

La somma sulle ω da' un fattore

$$6.52 \quad C^n \gamma^{-\frac{h_{v_0}}{2} m_{4,v_0}} \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{(h_v - h_{v'})} \left(-\frac{1}{2} m_{4,v} + \frac{n_v^e - 3}{2} \chi(4 \leq n_v^e \leq 10) + \frac{n_v^e - 1}{2} \chi(n_v^e > 10) \right) \quad (6.59)$$

vedi anche (6.20).

Collezionando insieme tutti i fattori otteniamo:

$$6.53 \quad C^n \varepsilon^n \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e = 2, n_{1,v_0}^e = 0}} \sum_{\{P_v\}} \sum_T \gamma^h \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{(h_v - h_{v'})} \left[\left(1 - \frac{n_v^e}{4} \right) \chi(4 \leq n_v^e \leq 10) + \left(2 - \frac{n_v^e}{4} \right) \chi(n_v^e > 10) + n_{1,v}^e \right] \quad (6.60)$$

dove abbiamo supposto che il flusso di ν_h rimanga limitato. Notiamo che il fattore globale γ^h viene assorbito dalla definizione di ν_h .

Ripetendo la discussione del paragrafo §5.3 possiamo stimare anche le somme su P_v e sugli alberi. In definitiva otteniamo il risultato riassunto nel seguente Teorema.

TEOREMA 6.3 *Consideriamo la seguente quantita':*

$$6.54 \quad \frac{1}{\beta L^2} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \sum_{\substack{\{P_{v_0}\} \\ n_{0,v_0}^e = 2, n_{1,v_0}^e = 0}} \left| \sum_{\{P_v\}} \sum_T \sum_\omega \prod_{\ell \in T} g_\ell e^{-ip_F \omega_\ell x_\ell} \right. \\ \cdot \left. \prod_{v \text{ non p. f.}} \frac{1}{s_v!} (-1)^{s_v + 1} \int dP_{T_v}(\mathbf{t}) \det G_{T_v}(\mathbf{t}) \prod_{v \text{ p. f.}} r_v \right| \quad (6.61)$$

nel caso in cui $\alpha = \frac{1}{2}$. La grandezza in (6.61) e' una stima del coefficiente di ordine n della funzione beta. Supponiamo che β sia finito e che il flusso di $\nu_h = 0$ sia limitato, ossia che

$$6.55 \quad \sup_{\substack{h \in \mathbb{Z} \\ h_\beta \leq h \leq 0}} \max\{|\nu_h|, |\alpha_0|, |\zeta_0|, |\lambda_0|\} \leq \varepsilon \quad (6.62)$$

per qualche costante ε .

Allora la quantita' in (6.61) e' stimata da:

$$6.56 \quad C^m \varepsilon^n (\log \beta)^{n-1} \quad (6.63)$$

per qualche costante C .

Osservazione.

Il Teorema 6.3 implica che, se $C\varepsilon \log \beta < 1$, la funzione beta per la costante corrente ν_h e' analitica (ossia la serie che la definisce e' sommabile). La condizione precedente si puo' invertire nel seguente modo:

$$6.57 \quad T > C_1 e^{-\frac{1}{C\varepsilon}} \quad (6.64)$$

dove T e' la temperatura assoluta e C_1 e' una costante dell' ordine di una energia tipica del problema iniziale (ad es. l' energia di Fermi) diviso la costante di Boltzmann. Se prendiamo l' energia di Fermi $\sim 1ev$ (che e' un valore tipico dell' energia di Fermi per un materiale metallico) si ottiene che $C_1 \sim 3000K$. Quindi, a meno di non riuscire a stimare in modo efficiente C (cosa che nelle discussioni precedenti non ci siamo affatto preoccupati di fare) si ottiene una sovrastima altissima della temperatura al di sopra della quale ci si aspetta fisicamente che il sistema sia stabile (che e' la temperatura $T_{BCS} < 200K$).

Nonostante questo la (6.64) ha proprio l' andamento aspettato della temperatura critica BCS. Il problema diventa allora quello di ottimizzare la costante C . Sicuramente con la tecnica da noi usata non si puo' riuscire ad ottenere una costante C fisicamente soddisfacente. La speranza sarebbe quella di riuscire a rinormalizzare anche gli ammassi a quattro gambe esterne. In questo modo la temperatura critica sarebbe stabilita non da una condizione sul raggio di convergenza della serie generata dai termini (6.63), bensì dalla condizione che il flusso di λ_h rimanga limitato fino ad h_β . Ragionando in modo euristico, possiamo ipotizzare che l' evoluzione di λ_h sia controllata dalla funzione beta troncata al second' ordine (il che e' ragionevole se la funzione beta e' analitica); in piu' possiamo congetturare [BG1] che almeno qualitativamente il flusso delle diverse armoniche sferiche di λ_h (che, va ricordato, e' una funzione di $\omega - 1, \dots, \omega_4$) sia disaccoppiato. In questo caso il flusso di λ_h sarebbe dato (qualitativamente) da:

$$6.58 \quad \lambda_h^{(s)} \simeq \lambda_{h+1}^{(s)} - A\lambda_{h+1}^{(s)2} \quad (6.65)$$

dove l' indice s e' l' indice di armonica sferica, e A e' una costante il cui ordine di grandezza e' lo stesso del valore dei grafici per la funzione beta al secondo ordine. Vedi Fig. 15.

Iterando la (6.65) e trascurando sistematicamente gli ordini superiori al secondo si trova:

$$6.59 \quad \lambda_h^{(s)} = \frac{\lambda_0^{(s)}}{1 - A\lambda_0|h|} \quad (6.66)$$

Se la costante A e' > 0 (come accade nel caso in cui lo stato fondamentale del sistema non sia un liquido normale di Fermi) il flusso di λ_h , per $A\lambda_0|h| \sim 1$, esce dalla regione in cui la funzione beta e' perturbativamente ben definita. Ci si aspetta allora di poter controllare il flusso di λ_h fino ad una scala h_β tale che $A\lambda_0|h_\beta| \sim 1$. Questa scelta corrisponde ad una temperatura critica della forma (6.64), in cui pero' la costante C che accompagna ε ad esponente e' dell' ordine dei valori dei grafici di Fig. 15.

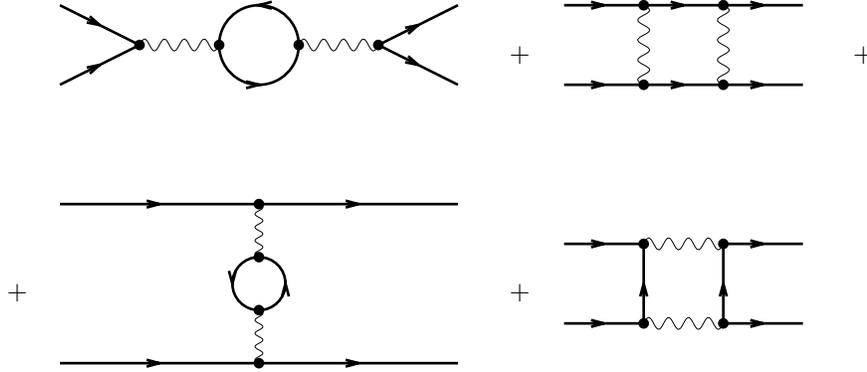


FIG. 15. I quattro possibili grafici la cui somma fornisce il coefficiente di ordine 2 della componente della funzione beta che controlla il flusso di λ_h . La costante A contenuta nella (6.65) e' dello stesso ordine di grandezza del valore di uno di questi grafici.

p.6.3 **6.3.Flusso di ν_h**

Per dare senso al Teorema 6.3 dimostrato nel precedente paragrafo occorre controllare l' ipotesi (6.62) secondo cui il flusso di ν_h rimane limitato, almeno per qualche scelta speciale del dato iniziale ν_0 .

In questo paragrafo seguiremo essenzialmente la discussione del capitolo 4 di [BM].

Scriviamo ricorsivamente l' equazione per ν_h , estraendo esplicitamente i termini del primo ordine:

$$6.61 \quad \gamma^h \nu_h = \gamma^{h+1} \nu_{h+1} + \gamma^h \varepsilon_1 C^{(h)} + \gamma^h \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} n_h(\tau) \quad (6.67)$$

Nella (6.67) ε_1 e' un numero che magiora le costanti di accoppiamento α_0, ν_0 e $|\lambda_0|$.

Il termine di primo ordine $\gamma^h \varepsilon_1 C^{(h)}$ e' dovuto ai due grafici con un punto finale di tipo λ . Piu' esplicitamente si ha:

$$6.62 \quad \gamma^h \varepsilon_1 C^{(h)} = \int d\mathbf{x} (\lambda(\mathbf{x}) g^h(0) + g^h(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{x}) e^{ip_F \omega x}) \quad (6.68)$$

dove e' facile verificare che, per l' invarianza per rotazioni della teoria, l' integrale non dipende dalla direzione di ω . Inoltre la costante $C^{(h)}$ ha una debole dipendenza da h , nel senso che tende, per $h \rightarrow -\infty$, ad una costante finita indipendente da h , ed il limite e' raggiunto esponenzialmente.

I termini n_h sono i contributi di ordine superiore al primo. Dalla discussione del paragrafo precedente segue che, se $\sup_{k \geq h} \max\{|\nu_h|, |\alpha|, |\int d\mathbf{x} \lambda(\mathbf{x})|\} < \varepsilon_0$, e se β e' finito, per ε_0 abbastanza piccolo, vale la seguente stima per la somma dei termini di ordine superiore:

$$6.63 \quad \left| \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} n_h(\tau) \right| \leq c_2 \varepsilon_0^2 \quad (6.69)$$

Anzi, e' immediato verificare che vale anche la seguente stima:

$$6.63a \quad \left| \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} n_h(\tau) \right| \leq c_2 \varepsilon_0 \varepsilon_1 \quad (6.70)$$

Il motivo per cui vale la stima (6.70) e' che nel grafico a due gambe esterne che definisce l' espressione di ν_h deve comparire almeno un vertice finale λ . In caso contrario infatti il grafico in questione sarebbe una catena lineare di propagatori che connettono vertici di tipo ν_{h+1} o di tipo α , il cui valore sarebbe dato da un' espressione che, nel caso piu' semplice, e' del seguente tipo:

$$6.64 \quad \int dx \psi_x^+ \psi_x^- (\gamma^{h+1} \nu_{h+1})^{n_1} \alpha^{n_2} \prod_{i=1}^{n_1+n_2-1} \int dy g_i^h(y) \quad (6.71)$$

Il valore dell' integrale (6.71) corrisponde ad un grafico in cui gli $n_1 + n_2$ punti finali sono tutti contenuti solo nell' ammasso v_0 e non in alcun ammasso piu' piccolo; in questo caso semplice i propagatori $g_i^h(y)$ hanno tutti la stessa frequenza e non bisogna fare nessuna operazione di rinormalizzazione. Comunque la caratteristica che a noi interessa dell' integrale nella (6.71) e' che tutti le integrazioni interne si fattorizzano; ognuno degli integrali $\int dy g_i^h(y)$ e' uguale semplicemente alla trasformata di Fourier di g_i^h calcolata in $k = 0$, ossia, grazie alle proprieta' di supporto compatto di $\tilde{g}_i^h(k)$, e' uguale a zero.

Una volta scritta l'equazione che controlla l' evoluzione di ν_h possiamo passare a dimostrare il risultato principale, nella forma chiarita dal seguente Lemma 6.2.

LEMMA 6.2 *Supponiamo che:*

$$6.64b \quad |\lambda_0| \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 \quad (6.72)$$

e che

$$6.64c \quad \max\{|\alpha_0|, |\zeta_0|\} \leq \varepsilon_0 \quad (6.73)$$

dove ε_0 ed ε_1 vanno scelti nel corso della dimostrazione del Lemma. Supponiamo che β sia finito e che h_β sia la scala piu' bassa per cui il propagatore $g_\omega^{(h_\beta)}$ e' diverso da zero. Allora e' possibile scegliere ν_0 in modo tale che

$$6.65 \quad |\nu_h| \leq \varepsilon_0, \quad h_\beta \leq \bar{h} \leq h \leq 0 \quad (6.74)$$

Dimostrazione. Consideriamo l' equazione (6.67) nella forma:

$$6.66 \quad \nu_h = \gamma \nu_{h+1} + b_{h+1} + r_{h+1} \quad (6.75)$$

dove $b_h \equiv \varepsilon_1 C^{(h)}$ e r_h e' il contributo dei termini di ordine ≥ 2 . Se supponiamo che $|\nu_h| \leq \varepsilon_0$, $h_\beta \leq \bar{h} \leq h \leq 0$ abbiamo gia' visto che $|r_h| \leq c_2 \varepsilon_0 \varepsilon_1$.

Se iteriamo la (6.75) otteniamo

$$6.67 \quad \nu_h = \gamma^{-h} \left[\nu_0 + \sum_{k=1}^{|h|} \gamma^{k-1} (b_{h+k} + r_{h+k}) \right] \quad (6.76)$$

dove $b_h + r_h \equiv \beta_h^\nu$ e' pensata come funzione di ν_h, \dots, ν_0 .

Se poniamo nella (6.76) $h = \bar{h}$ per qualche $h_\beta \leq \bar{h} \leq 0$ ed invertiamo l' equazione otteniamo

$$6.68 \quad \nu_0 = \gamma^{\bar{h}} \nu_{\bar{h}} - \sum_{k=\bar{h}+1}^0 \gamma^{k-1} (b_k + r_k) \quad (6.77)$$

Risostituendo la (6.77) nella (6.76) troviamo

$$6.69 \quad \nu_h = \gamma^{-h+\bar{h}} \nu_{\bar{h}} - \gamma^{-h} \sum_{k=\bar{h}+1}^h \gamma^{k-1} \beta_k^\nu (\nu_k, \dots, \nu_0) \quad (6.78)$$

Adesso possiamo osservare che la sequenza ν_h $\bar{h} < h \leq 0$ che risolve l' equazione di evoluzione (6.75) si puo' ottenere come limite della sequenza $\nu_h^{(n)}$ parametrizzata da $\nu_{\bar{h}}$ e definita ricorsivamente nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \nu_h^{(0)} &= 0 \\ \nu_h^{(n)} &= \gamma^{-h+\bar{h}} \nu_{\bar{h}} - \gamma^{-h} \sum_{k=\bar{h}+1}^h \gamma^{k-1} \beta_k^\nu \left(\nu_k^{(n)}, \dots, \nu_0^{(n)} \right) \end{aligned} \quad (6.79)$$

Supporremo che $\nu_{\bar{h}}$ appartenga a qualche intervallo $J^{(\bar{h})} \subset [-C\varepsilon_1, C\varepsilon_1]$, dove C e' definita tra poco.

Possiamo mostrare induttivamente che, se ε_1 e' abbastanza piccolo,

$$\max_{\bar{h} < h \leq 0} |\nu_h^{(n)} - \nu_h^{(n-1)}| \leq \left(\frac{\gamma C \varepsilon_1}{\gamma - 1} \right)^n \quad (6.80)$$

dove la costante C che compare nella (6.80) e' tale che $|\beta_h^\nu| \leq C\varepsilon_1\varepsilon_0$ (ed e' la stessa dell' intervallo $[-C\varepsilon_1, C\varepsilon_1]$ considerato sopra).

La (6.80) e' vera per $n = 0$, poiche' $\nu_h^{(0)} = 0$, $|\beta_h^\nu| \leq C\varepsilon_1$, $|\nu_{\bar{h}}| < C\varepsilon_1$ e $\gamma^{-h} \sum_{k=\bar{h}+1}^h \gamma^{k-1} < \frac{1}{\gamma-1}$.

Se poi si suppone vera per $n < 0$, la proprieta' (6.80) per $n - 1$ segue banalmente dal fatto che

$$\beta_k^\nu \left(\nu_k^{(n-1)}, \dots, \nu_0^{(n-1)} \right) - \beta_k^\nu \left(\nu_k^{(n-2)}, \dots, \nu_0^{(n-2)} \right) \quad (6.81)$$

puo' essere scritto come una somma di termini che sono gli stessi della somma che definisce $\beta_k^\nu \left(\nu_k^{(n-1)}, \dots, \nu_0^{(n-1)} \right)$, con l' unica differenza che ad ogni costante di accoppiamento $\nu_{h'}^{(n-1)}$ va sostituita la differenza $\nu_{h'}^{(n-1)} - \nu_{h'}^{(n-2)}$.

Da questa osservazione segue che la (6.81) puo' essere stimata con $C\varepsilon_1 \left(\frac{C\varepsilon_1}{\gamma-1} \right)^n$.

Dalla proprieta' (6.80) segue anche che

$$|\nu_h^{(n)}| < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma C \varepsilon_1}{\gamma - 1} \right)^n = \tilde{C} \varepsilon_1 \quad (6.82)$$

e quindi, se ε_1 e' scelto abbastanza piccolo, tenendo presente che la soluzione dell' equazione (6.82) e' unica, segue la tesi. ■

In aggiunta al risultato espresso dal Lemma 6.2, si puo' ottenere un risultato piu' preciso, si puo' cioe' determinare qual e' la liberta' che abbiamo nella scelta del dato iniziale ν_0 affinche' tutto il flusso fino a ν_{h_β} rimanga limitato da ε_0 . Al proposito dimostriamo il seguente Lemma 6.3.

LEMMA 6.3 *Supponiamo che:*

$$|\lambda_0| \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 \quad (6.83)$$

e che

$$\max\{|\alpha_0|, |\zeta_0|\} \leq \varepsilon_0 \quad (6.84)$$

dove ε_0 ed ε_1 vanno scelti nel corso della dimostrazione del Lemma. Supponiamo che β sia finito e che h_β sia la scala piu' bassa per cui il propagatore $g_\omega^{(h_\beta)}$ e' diverso da zero. Allora, se ε_0 e' scelto abbastanza piccolo, esistono delle costanti c_1, γ' e una famiglia di intervalli $I^{(\bar{h})}$, $h_\beta \leq \bar{h} \leq 0$ tali che $1 < \gamma' < \gamma$, $I^{(\bar{h})} \subset I^{(\bar{h}+1)}$, $|I^{(\bar{h})}| \leq c_1 \varepsilon_1 (\gamma')^{\bar{h}}$ e, se $\nu_0 \in I^{(\bar{h})}$,

$$|\nu_h| \leq \varepsilon_0, \quad h_\beta \leq \bar{h} \leq h \leq 0 \quad (6.85)$$

Osservazione.

Il Lemma 6.3 fornisce una stima sull' ampiezza dell' intervallo in cui possiamo fissare il dato iniziale ν_0 affinché il flusso ν_h rimanga limitato fino a scala h . Vediamo che questa ampiezza e' esponenzialmente piccola in h . Questo vuol dire, in particolare, che, se fosse possibile eseguire il limite $\eta \rightarrow -\infty$, in questo limite la scelta dello ν_0 appropriato sarebbe unica. Queste proprieta' suggeriscono che l' evoluzione di ν_h sia essenzialmente quella di un sistema dinamico iperbolico: esiste una direzione stabile ed una instabile; la direzione stabile e' selezionata da una appropriata scelta del dato iniziale; l' allontanamento dalla superficie su cui il moto e' stabile avviene, quando il dato iniziale e' "un po'" sbagliato, esponenzialmente veloce.

Dimostrazione. Supponiamo che, per $h_\beta \leq \bar{h} \leq 0$, $|\nu_h| \leq \varepsilon_0$. Consideriamo l' equazione (6.67) nella forma (6.75).

Fissiamo una costante positiva c , consideriamo gli intervalli

$$6.76 \quad J^{(h)} = \left[-\frac{b_h}{\gamma-1} - c\varepsilon_1, -\frac{b_h}{\gamma-1} + c\varepsilon_1 \right] \quad (6.86)$$

e supponiamo che esista un intervallo $I^{(\bar{h})}$ tale che, quando ν_0 spazza $I^{(\bar{h})}$, allora $\nu_{\bar{h}}$ spazza l' intervallo $J^{(\bar{h}+1)}$. Chiamiamo $\tilde{J}^{(\bar{h})}$ l' intervallo spazzato da $\nu_{\bar{h}-1}$ quando ν_0 spazza l' intervallo $I^{(\bar{h})}$.

L' equazione (6.75) puo' essere scritta nella forma

$$6.77 \quad \nu_{\bar{h}-1} + \frac{b_{\bar{h}}}{\gamma-1} = \gamma \left(\nu_{\bar{h}} + \frac{b_{\bar{h}}}{\gamma-1} \right) + r_{\bar{h}} \quad (6.87)$$

Quindi otteniamo

$$6.78 \quad \begin{aligned} & \min_{\nu_0 \in I^{(\bar{h})}} \left[\nu_{\bar{h}-1} + \frac{b_{\bar{h}}}{\gamma-1} \right] = \\ & = \min_{\nu_{\bar{h}} \in J^{(\bar{h}+1)}} \left[\nu_{\bar{h}} + \frac{b_{\bar{h}+1}}{\gamma-1} \right] + \min_{\nu_0 \in I^{(\bar{h})}} \left[r_{\bar{h}} + \frac{\gamma}{\gamma-1} (b_{\bar{h}} - b_{\bar{h}+1}) \right] \leq \\ & \leq -\gamma c\varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_0 \varepsilon_1 + c_3 \gamma^{\bar{h}} \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (6.88)$$

per qualche costante c_3 . Per ottenere la (6.88) abbiamo usato il fatto che le costanti $C^{(h)}$ contenute in b_h convergono esponenzialmente ad una costante finita.

Analogamente si trova che

$$6.79 \quad \max_{\nu_0 \in I^{(\bar{h})}} \left[\nu_{\bar{h}-1} + \frac{b_{\bar{h}}}{\gamma-1} \right] \leq \gamma c\varepsilon_1 - c_2 \varepsilon_0 \varepsilon_1 - c_3 \gamma^{\bar{h}} \varepsilon_1 \quad (6.89)$$

Otteniamo quindi che, se c e' scelta abbastanza grossa, $J^{(\bar{h})}$ e' strettamente contenuta in $\tilde{J}^{(\bar{h})}$.

Dalla dimostrazione del precedente Lemma 6.2 abbiamo visto che, se $\nu_{\bar{h}} \in [-C\varepsilon_1, C\varepsilon_1]$, ad ogni $\nu_{\bar{h}}$ corrisponde una determinata sequenza ν_h $\bar{h} \leq h \leq 0$. Quindi se scegliamo la C del precedente Lemma abbastanza grossa (in modo che $J^{(\bar{h})} \subset [-C\varepsilon_1, C\varepsilon_1]$) otteniamo che ad ogni $\nu_{\bar{h}-1} \in J^{(\bar{h})}$ corrisponde un ben determinato $\nu_0 \in I^{(\bar{h})}$.

Una diretta conseguenza dell' ultima osservazione e' che esiste un intervallo $I^{(\bar{h}-1)} \subset I^{(\bar{h})}$ tale che, quando ν_0 spazza $I^{(\bar{h}-1)}$, allora $\nu_{\bar{h}-1}$ spazza $J^{(\bar{h})}$ (abbiamo usato la continuita' del flusso generato dall' equazione (6.67))

Al passo 0 l' ipotesi induttiva e' valida con $I^{(0)} \equiv J^{(1)}$ ed ε_1 abbastanza piccola.

Abbiamo quindi dimostrato che esiste una successione di intervalli $I^{(\bar{h})}$, $h_\beta \leq \bar{h} \leq 0$ contenuti l' uno nell' altro tali che, se $\nu_0 \in I^{(\bar{h})}$,

$$|\nu_h| \leq \varepsilon_0, \quad h_\beta \leq \bar{h} \leq h \leq 0$$

94 GRUPPO DI RINORMALIZZAZIONE PER UN SISTEMA DI FERMIONI INTERAGENTI IN DUE DIMENSIONI

Per completare la dimostrazione del Lemma 6.3, rimane da stimare la grandezza degli intervalli $I^{(\bar{h})}$.

Consideriamo le sequenze ν_h, ν'_h $\bar{h} \leq h \leq 0$ generate da due dati iniziali $\nu_0, \nu'_0 \in I^{(bar{h})}$.

Dalla (6.75) segue che

$$6.80 \quad \nu_h - \nu'_h = \gamma (\nu_{h+1} - \nu'_{h+1}) + (r_{h+1} - r'_{h+1}) \quad (6.90)$$

dove r'_{h+1} e' il termine di ordine superiore della funzione beta calcolata sulla sequenza ν'_h .

Osserviamo adesso che la differenza $r_{h+1} - r'_{h+1}$ e' data da una somma di termini corrispondenti a grafici a due gambe esterne con almeno un vertice finale di tipo λ e almeno un vertice finale di tipo ν ; la costante di accoppiamento associata ad un vertice ν adesso bisogna pensare che sia $\nu_k - \nu'_k$ invece che ν_k .

Se $|\nu_k - \nu'_k| \leq |\nu_h - \nu'_h|$ $k \geq h$ allora

$$6.81 \quad |\nu_h - \nu'_h| \leq \frac{|\nu_{h-1} - \nu'_{h-1}|}{\gamma} + C\varepsilon_1 |\nu_h - \nu'_h| \quad (6.91)$$

D' altra parte, per $h = 0$, l' osservazione precedente implica che, se ε_1 e' abbastanza piccola, $|\nu_0 - \nu'_0| \leq |\nu_{-1} - \nu'_{-1}|$. Quindi, ragionando ancora per induzione, troviamo che

$$6.82 \quad |\nu_k - \nu'_k| \leq |\nu_h - \nu'_h| \quad k \geq h \quad (6.92)$$

ed inoltre che, dato un qualsiasi γ' tale che $1 < \gamma' < \gamma$, se ε_1 e' scelto abbastanza piccolo:

$$6.83 \quad |\nu_0 - \nu'_0| \leq \gamma'^{(\bar{h}-1)} |\nu_{\bar{h}} - \nu'_{\bar{h}}| \quad (6.93)$$

Dato che, per definizione, quando ν_0 spazza l' intervallo $I^{(\bar{h})}$ $\nu_{\bar{h}}$ spazza l' intervallo $J^{(\bar{h}+1)}$, che e' di ampiezza $2c\varepsilon_1$, allora l' ampiezza di $I^{(\bar{h})}$ e' limitata da $2c\varepsilon_1 \gamma'^{(\bar{h}-1)}$. ■

sec.7

7. La funzione di Schwinger a due punti. Commenti e risultati.

p.7.1

7.1. La funzione di Schwinger a due punti.

Dopo aver discusso l'esistenza, in senso non perturbativo, della funzione beta a temperatura finita, rimane da discutere l'esistenza e il comportamento asintotico delle funzioni di correlazione, che sono l'oggetto fisico a cui, sin dall'inizio, siamo interessati.

Quando avevamo introdotto la nozione di potenziale efficace avevamo sottolineato che c' e' una facile relazione che lo lega al funzionale generatore delle funzioni di Schwinger (ed anzi era stato questo il motivo per cui avevamo deciso di studiare il potenziale efficace piuttosto che direttamente le funzioni di Schwinger).

Da questa relazione e' possibile ricavare, una volta noto il contributo dei grafici a $2n$ gambe esterne al potenziale efficace, la funzione di Schwinger a $2n$ punti. Ad esempio la relazione tra la funzione di Schwinger a due punti ed il potenziale efficace a due gambe esterne e' la seguente:

$$S(k) = g(k) + g(k)V_2(k)g(k) \quad (7.1)$$

La (7.1) ha senso in una teoria perturbativa "ingenua", in cui non sia stata introdotta la decomposizione in scale.

Nel nostro caso, poiche' abbiamo introdotto la decomposizione in scale e stimato, nel precedente Capitolo, la parte rilevante del potenziale efficace su scala h , vogliamo stabilire se esiste una relazione analoga alla (7.1) che leghi la funzione di correlazione a due punti su scala h , $S^{(\leq h)}(k)$, con il potenziale efficace su scala h a due gambe esterne, $V_2^{(\leq h)}(k)$.

Purtroppo il legame tra i due oggetti non e' cosi' banale come quello stabilito dalla (7.1). La difficolta' e' dovuta al fatto che $V_2^{(\leq h)}(k)$ fornisce tutti i contributi in cui la scala delle due gambe esterne e' minore o uguale alla scala dei propagatori del grafico. In generale invece i contributi a $S^{(\leq h)}(k)$ sono tali che le gambe esterne hanno una scala qualsiasi minore o uguale ad h .

E' necessario allora considerare uno sviluppo in alberi leggermente modificato rispetto a quello che abbiamo studiato per i potenziali efficaci ed eseguire poi sui termini dello sviluppo una stima analoga a quella studiata nei capitoli precedenti.

Decidiamo di studiare esplicitamente solo la stima della funzione di Schwinger a due punti, che e' la piu' semplice da trattare.

Passiamo dunque ad introdurre lo sviluppo necessario alla stima della funzione di correlazione a due punti.

Se ϕ_x^\pm , ϕ_y^\pm sono variabili grassmaniane e definiamo il funzionale $\mathcal{S}(\phi)$ nel seguente modo:

$$e^{\mathcal{S}(\phi)} \equiv \int P(d\psi) e^{-H_I(\psi) + \int dx [\phi_x^+ \psi_x^- + \psi_x^+ \phi_x^-]} \quad (7.2)$$

e' immediato verificare che

$$S(x-y) = \frac{\delta^2}{\delta\phi_x^+ \delta\phi_y^-} \mathcal{S}(\phi) \Big|_{\phi^+ = \phi^- = 0} \quad (7.3)$$

L'idea adesso e' quella di usare per ψ lo stesso sviluppo in multiscale usato nel resto del lavoro e per $\mathcal{S}(\phi)$ lo stesso sviluppo in alberi usato per i potenziali efficaci.

Scriviamo allora:

$$\psi = \sum_{h=-\infty}^0 \psi^{(h)} \quad (7.4)$$

dove la somma si interrompe a 0 perche', come al solito, trascuriamo la componente ultravioletta del campo.

Consideriamo per chiarezza il primo passo di integrazione, sulla scala $h = 0$:

$$7.5 \quad e^{\mathcal{S}^{(-1)}(\phi, \psi^{(\leq -1)})} \equiv \int P(d\psi^{(0)}) e^{-H_I(\psi^{(\leq -1)} + \psi^{(0)}) + \int dx [\psi_x^{+(\leq -1)} \phi_x^- + \psi_x^{+(0)} \phi_x^- + \phi_x^+ \psi_x^{-(\leq -1)} + \phi_x^+ \psi_x^{-(0)}]} \quad (7.5)$$

oppure, usando le aspettative troncate:

$$7.6 \quad \begin{aligned} \mathcal{S}^{(-1)}(\phi, \psi^{(\leq -1)}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{E}^T \left(-H_I(\psi^{(\leq -1)} + \cdot) + \int dx \left[\psi_x^{+(\leq -1)} \phi_x^- + \phi_x^+ \psi_x^{-(\leq -1)} + \cdot \phi_x^- + \phi_x^+ \cdot \right], n \right) = \\ &= \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=n} \frac{1}{n_1!n_2!n_3!n_4!} \mathcal{E}^T \left(-H_I(\psi^{(\leq -1)} + \cdot), \int dx \left[\psi_x^{+(\leq -1)} \phi_x^- + \phi_x^+ \psi_x^{-(\leq -1)} \right], \right. \\ &\quad \left. \int dx \cdot \phi_x^-, \int dx \phi_x^+ \cdot; n_1, n_2, n_3, n_4 \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Tenendo conto della definizione del potenziale efficace $\mathcal{V}^{(-1)}(\psi^{(\leq -1)})$ e del fatto che ogni aspettazione troncata corrisponde ad una somma di grafici connessi (rispetto al campo integrato, ossia, in questo caso, connessi dai propagatori su scala $h = 0$) si ottiene che la (7.6) si puo' riscrivere nella seguente forma:

$$7.7 \quad \begin{aligned} (7.6) &= -\mathcal{V}^{(-1)}(\psi^{(\leq -1)}) + \int dx \left[\psi_x^{+(\leq -1)} \phi_x^- + \phi_x^+ \psi_x^{-(\leq -1)} \right] + \\ &+ \sum_{\substack{n_1 \ n_2 \ n_3 \\ n_2+n_3 > 0}} \frac{1}{n_1!n_2!n_3!} \mathcal{E}^T \left(-H_I(\psi^{(\leq -1)} + \cdot), \int dx \cdot \phi_x^-, \int dx \phi_x^+ \cdot; n_1, n_2, n_3 \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

A parte il termine $\int dx \left[\psi_x^{+(\leq -1)} \phi_x^- + \phi_x^+ \psi_x^{-(\leq -1)} \right]$, tutto il secondo membro della (7.7) puo' essere rappresentato come una somma su alberi. Come al solito ogni vertice dell' albero rappresenta un' operazione di aspettazione troncata; gli alberi corrispondenti alla (7.7) sono quelli con un solo vertice non banale da cui si dipartono n rami, n_1 dei quali terminano con un vertice di tipo v , α o λ , mentre n_2 terminano con un vertice di tipo ϕ^- ed n_3 con un vertice di tipo ϕ^+ ; un possibile albero di questo tipo (con $n_1 = 2$, $n_2 = 2$ e $n_3 = 1$) e' quello in Fig. 16.

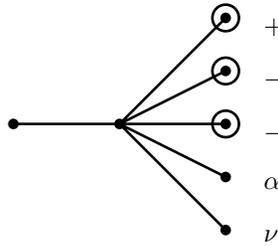


FIG. 16. Un possibile albero dell' espansione di $\mathcal{S}^{(-1)}(\phi, \psi^{(\leq -1)})$. Bisogna pensare che alla radice dell' albero sia assegnato un indice di scala $h=-1$, che al vertice non banale sia assegnato un indice $h=0$ e che ai punti finali sia assegnato un indice $h=1$.

Di tutti gli alberi dello sviluppo di $\mathcal{S}^{(-1)}(\phi, \psi^{(\leq -1)})$, gli unici che contribuiscono alla funzione di Schwinger a due punti sono quelli che hanno uno e un solo vertice di tipo ϕ^+ ed uno e un solo vertice di tipo ϕ^- .

L' espansione descritta sopra si puo' facilmente iterare per ottenere uno sviluppo in alberi del funzionale $\mathcal{S}^{(h)}(\phi, \psi^{(\leq h)})$. In particolare la somma dei termini che contribuiscono alla funzione di correlazione a due

punti, $\mathcal{S}_2^{(h)}$, corrisponde alla somma sugli alberi che hanno uno e un solo vertice di tipo ϕ^+ ed uno e un solo vertice di tipo ϕ^- .

I grafici corrispondenti a questi alberi devono avere due gambe esterne e le gambe esterne devono essere proprio i due campi ϕ^+ e ϕ^- .

L' albero di ordine piu' basso possibile e' quello descritto in Fig. 17.

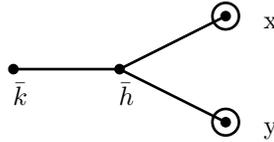


FIG. 17. L' albero dello sviluppo di $\mathcal{S}^{(\bar{k})}(\phi, \psi^{(\leq \bar{k})})$ di ordine piu' basso possibile.

In Fig. 17 abbiamo stabilito di chiamare \bar{h} la frequenza corrispondente al primo ammasso che contiene sia v_x che v_y , dove v_x e v_y sono i due vertici di tipo ϕ^+ e ϕ^- localizzati nei punti x ed y ; continueremo ad usare nel seguito la stessa convenzione.

Possiamo definire le operazioni di rinormalizzazione sui valori di questi alberi esattamente nello stesso modo in cui abbiamo definito le operazioni di rinormalizzazione sui grafici dello sviluppo dei potenziali efficaci.

Possiamo anche eseguire le stime discusse nei capitoli precedenti in modo analogo, anche se non esattamente uguale. Mettiamo in evidenza le principali differenze tra quel caso e quello che vogliamo discutere adesso.

- (a) I vertici v_x e v_y si comportano, a tutti gli effetti, come due vertici di tipo ν , con l' unica differenza che il valore della costante di accoppiamento associata e' 1, invece che $\gamma^h \nu_h$.
- (b) Non bisogna integrare sulle coordinate di tutti i vertici, ma solo su quelle dei vertici diversi da v_x e v_y .
- (c) Alle linee esterne non e' associato nessun indice ω . Possiamo pero', allo scopo di riportarci ad un caso gia' trattato, assegnare alle linee esterne di tipo ϕ uscenti dai punti x ed y un indice ω che sia per definizione lo stesso delle linee ψ uscenti da x e y , con scala $h \equiv \bar{k}$. In questo modo possiamo associare ai vertici x ed y due funzioni χ_{v_x} e χ_{v_y} che facciano rispettare il vincolo tra gli ω delle linee uscenti dal rispettivo vertice. Dovremo poi sommare su tutte le scelte degli ω esterni.

L' osservazione (a) ha come unica conseguenza il fatto che nelle stime compare un fattore $\gamma^{-h_{v_x}} \gamma^{-h_{v_y}} \varepsilon_0^{-2}$ in piu' rispetto alla stima del potenziale efficace a due gambe esterne.

Dall' osservazione (b) segue che l' integrazione sulle coordinate ha un effetto diverso da quello che aveva nel caso del potenziale efficace a due gambe esterne. In quel caso infatti l' integrale sui propagatori dell' albero ancorato si fattorizzava e si otteneva semplicemente $\beta L^d \prod_{v \text{ non p. f.}} \gamma^{h_v(s_v-1)} C^{s_v-1}$. Nel nostro caso invece, una volta eseguita l' integrazione sulle coordinate libere del grafico, rimane un oggetto che dipende da x e y .

Per ottenere una stima della funzione di x e y che rimane come risultato dell' integrazione usiamo il seguente Lemma.

LEMMA 7.1 *Consideriamo il seguente integrale:*

$$7.9a \quad \int d^3x_1 \dots d^3x_k |g_{\omega_0}^{(h_0)}(x-x_1)| |g_{\omega_1}^{(h_1)}(x_1-x_2)| \dots |g_{\omega_k}^{(h_k)}(x_k-y)| \quad (7.8)$$

dove tutte le frequenze h_0, \dots, h_k sono minori o uguali a 0. Se $\bar{h} \equiv \min\{h_0, \dots, h_k\}$ la (7.8) puo' essere stimata da

$$7.9b \quad k^N C_N C^k \frac{\gamma^{\frac{5}{2}\bar{h}}}{(\gamma^{\bar{h}}|x-y|)^N} \prod_{j=1}^k \gamma^{\frac{3}{2}h_j} \gamma^{-\frac{5}{2}h_j} \quad (7.9)$$

dove C_N e' una costante indipendente da k e C e' una costante indipendente da N e k .

Osservazione.

(1) Il Lemma 7.1 ci dice che, selezionando un albero ancorato che connette x con y ed integrando i propagatori di quest' albero rispetto alle coordinate libere, otteniamo una funzione di x e y che decade all' infinito piu' veloce di ogni potenza di $x-y$, su scala \bar{h} .

(2) I fattori dimensionali che si ottengono sono i soliti, con una sola differenza: si ottiene un fattore $\beta L^d \gamma^{-\frac{5}{2}\bar{h}}$ in meno rispetto all' usuale conteggio di potenze, e questo naturalmente e' dovuto al fatto che non bisogna integrare sulle coordinate x ed y .

Dimostrazione. Moltiplichiamo e dividiamo la (7.8) per $|x-y|^N$. Stimando il modulo della somma con la somma dei moduli troviamo:

$$7.9c \quad (7.8) \leq \frac{1}{|x-y|^N} \int d^3x_1 \dots d^3x_k |g_{\omega_0}^{(h_0)}(x-x_1)| |g_{\omega_1}^{(h_1)}(x_1-x_2)| \dots |g_{\omega_k}^{(h_k)}(x_k-y)| (|x-x_1| + \dots + |x_k-y|)^N \quad (7.10)$$

Ora si ha

$$7.9d \quad (|x-x_1| + \dots + |x_k-y|)^N \leq k^N (|x-x_1|^N + \dots + |x_k-y|^N) \quad (7.11)$$

Infatti, se $a \equiv \max\{|x-x_1|, \dots, |x_k-y|\}$,

$$7.9e \quad \frac{(|x-x_1| + \dots + |x_k-y|)^N}{|x-x_1|^N + \dots + |x_k-y|^N} \leq \frac{(ka)^N}{a^N} \quad (7.12)$$

da cui segue la (7.11). Quindi

$$7.9f \quad (7.10) \leq \frac{k^N}{|x-y|^N} \sum_{i=0}^k \int d^3x_1 \dots d^3x_k |g_{\omega_0}^{(h_0)}(x-x_1)| \dots |x_i-x_{i+1}|^N |g_{\omega_i}^{(h_i)}(x_i-x_{i+1})| \dots |g_{\omega_k}^{(h_k)}(x_k-y)| \quad (7.13)$$

dove abbiamo scelto $x_0 \equiv x$. Vogliamo adesso usare nella (7.13) la stima (6.57), scegliendo $N = 3$ per tutti i propagatori diversi dall' i -esimo. Otteniamo che la (7.13) e' stimata da:

$$7.10 \quad \frac{k^N}{|x-y|^N} \sum_{i=0}^k \int d^3x_1 \dots d^3x_k \frac{\gamma^{\frac{3}{2}h_0} C_3}{1 + (\gamma^{h_0} \|x-x_0\|_{h_0, \omega_0})^3} \dots \frac{\gamma^{\frac{3}{2}h_i} C_N |x_i-x_{i+1}|^N}{1 + (\gamma^{h_i} |x_i-x_{i+1}|)^N} \dots \frac{\gamma^{\frac{3}{2}h_k} C_3}{1 + (\gamma^{h_k} \|x_k-y\|_{h_k, \omega_k})^3} \quad (7.14)$$

dove abbiamo definito:

$$7.11 \quad (\gamma^h \|x\|_{h, \omega})^2 \equiv (\gamma^h x_0)^2 + (\gamma^h x \omega)^2 + \left(\gamma^{\frac{h}{2}} x \omega^\perp\right)^2 \quad (7.15)$$

e dove abbiamo minorato $\gamma^{h_i} \|x_i-x_{i+1}\|_{h_i, \omega_i}$ con $\gamma^{h_i} \|x_i-x_{i+1}\|_{0, \omega_i} = \gamma^{h_i} |x_i-x_{i+1}|$. Eseguendo nella (7.14) tutte le integrazioni, con tutti i necessari cambi di variabile, troviamo:

$$7.11a \quad (7.14) \leq \frac{k^N}{|x-y|^N} C_N C^k \sum_{i=0}^k \int d^3x_1 \dots d^3x_k \gamma^{-h_i N} \gamma^{\frac{5}{2}h_i} \prod_{j=1}^k \gamma^{\frac{3}{2}h_j} \gamma^{-\frac{5}{2}h_j} \quad (7.16)$$

Per $N \geq 3$ possiamo maggiorare $\gamma^{-h_i N} \gamma^{\frac{5}{2}h_i}$ con $\gamma^{-\bar{h}N} \gamma^{\frac{5}{2}\bar{h}}$. E allora finalmente:

$$7.11b \quad (7.16) \leq k^N C_N C^k \frac{\gamma^{\frac{5}{2}\bar{h}}}{(\gamma^{\bar{h}}|x-y|)^N} \prod_{j=1}^k \gamma^{\frac{3}{2}h_j} \gamma^{-\frac{5}{2}h_j} \quad (7.17)$$

che e' la relazione voluta. ■

Una volta integrati via i propagatori dell' albero ancorato che connette x con y (e dopo aver quindi ottenuto i fattori della forma (7.9)), possiamo eseguire l' integrazione sui propagatori dell' albero ancorato T che ancora sono avanzati. Questa integrazione fornisce semplicemente, una volta estratti i soliti fattori dimensionali, un C per ognuno dei propagatori dell' albero ancorato che non si trovano sul percorso che connette x con y .

Infine, l' osservazione (c) implica che il conteggio sui settori fornisce, risultato del paragrafo §6.1, un fattore $\gamma^{-\frac{h}{2}}$ in piu', dato che questa volta, essendo necessario sommare su tutti gli ω esterni, dobbiamo eseguire la somma anche sull' indice di settore della linea esterna che, nella discussione del paragrafo §6.1, avevamo stabilito di fissare.

In definitiva la stima che otteniamo sul contributo a $S(x-y) - S_0(x-y)$ che viene dagli alberi a $\bar{k}, \bar{h}, h_x, h_y$ fissati e con n punti finali (diversi dai vertici ϕ^\pm) e' la seguente:

$$7.13 \quad \gamma^{\bar{k}} \gamma^{-h_x - h_y} \gamma^{\frac{\bar{h}}{2}} \gamma^{-\frac{\bar{k}}{2}} C_N n^N C^n \varepsilon^n (\log \beta)^{n-1} \frac{1}{1 + (\gamma^{\bar{h}} |x-y|)^N} \quad (7.18)$$

dove abbiamo minorato $\|x-y\|_{\bar{h}}$ con $\|x-y\|_0 = |x-y|$ (il che e' possibile semplicemente perche' $\bar{h} \leq 0$). Rispetto alla stima analoga sul coefficiente della funzione beta riportata nel Capitolo 6, abbiamo aggiunto i fattori $C_N n^N \gamma^{-h_x - h_y} \gamma^{\frac{\bar{h}}{2}} \gamma^{-\frac{\bar{k}}{2}}$, il cui significato e' stato spiegato nei punti (a), (b) e (c) riportati sopra; inoltre la costante ε maggiora le costanti di accoppiamento $\alpha_0, \zeta_0, \lambda_0$ e ν_h $h_\beta \leq h \leq 0$ (si puo' dimostrare in modo analogo a come discusso nel paragrafo §6.3 che il flusso di ν_h e' limitato).

Notiamo che la frequenza \bar{h} deve essere compresa tra h_β e 0, la frequenza \bar{k} tra h_β e \bar{h} , mentre le frequenze h_x ed h_y tra \bar{h} e 0.

Eseguiamo allora le somme su \bar{k}, h_x ed h_y ad \bar{h} fissato, otteniamo:

$$7.14 \quad \sum_{\bar{k}=h_\beta}^{\bar{h}} \sum_{h_x, h_y=\bar{h}}^0 (7.18) = C^n C_N n^N \varepsilon^n (\log \beta)^{n-1} \frac{\gamma^{\bar{h}}}{1 + (\gamma^{\bar{h}} |x-y|)^N} \quad (7.19)$$

In definitiva allora, se sommiamo la (7.19) su n e su \bar{h} , otteniamo la seguente stima per la funzione di correlazione a due punti:

$$7.15 \quad |S(x-y) - S_0(x-y)| \leq C_N \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=h_\beta}^0 n^N C^n \varepsilon^n (\log \beta)^{n-1} \frac{\gamma^h}{1 + (\gamma^h \|x-y\|_0)^N} \quad (7.20)$$

Eseguiamo adesso la somma sulla frequenza h :

Supponiamo che $|x-y| > 1$ e che $h_x \leq 0$ sia tale che

$$7.16 \quad \gamma^{-h_x} \leq |x-y| < \gamma^{-h_x+1} \quad (7.21)$$

Si ottiene allora facilmente la seguente stima.

$$7.17 \quad \begin{aligned} \sum_{h=h_\beta}^0 \frac{\gamma^h}{1 + (\gamma^h |x-y|)^N} &\leq \gamma^{h_x} \sum_{h=h_\beta}^0 \frac{\gamma^{h-h_x}}{1 + (\gamma^{h-h_x})^N} \leq \\ &\leq \gamma^{h_x} \sum_{k=h_\beta-h_x}^{-h_x} \gamma^{-k(N-1)} \leq \gamma^{h_x} \gamma^{-(h_\beta-h_x)(N-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^{-k(N-1)} \leq \frac{1}{|x-y|} \frac{C_N}{(\beta^{-1}|x-y|)^{N-1}} \end{aligned} \quad (7.22)$$

dove nell' ultimo passaggio abbiamo usato la (7.21) e la definizione della frequenza h_β (da cui segue che $|h_\beta| = O(\log \beta)$).

Sostituendo la (7.22) nella (7.20) (supponendo sempre che $|x - y| > 1$) e scegliendo β ed ε abbastanza piccoli (in modo che $C\varepsilon \log \beta < 1$) ricaviamo finalmente che

$$7.18 \quad S(x) = S_0(x) + \frac{A(\varepsilon, x)}{|x|} \quad (7.23)$$

dove $A(\varepsilon, x)$ gode della seguente proprietà: esiste una funzione $B(\varepsilon, \beta^{-1}|x|)$, limitata, $o(\varepsilon)$, che decade all'infinito nell'argomento $\beta^{-1}|x|$ più veloce di ogni potenza ed è tale che $|A(\varepsilon, x)| \leq B(\varepsilon, \beta^{-1}|x|)$. Ricordiamo che una funzione decade più veloce di ogni potenza nell'argomento x se, per ogni N e per $|x| > 1$, esiste C_N tale che

$$7.18z \quad |f(x)| \leq \frac{C_N}{|x|^N} \quad (7.24)$$

Riassumiamo il precedente risultato nel seguente Teorema 7.1.

TEOREMA 7.1 *Consideriamo il sistema descritto dall'hamiltoniana*

$$7.19 \quad H = (1 + \alpha_0)(T - \mu N) + \nu_0 N + V \equiv (1 + \alpha_0)H_0 + \nu_0 N + V \quad (7.25)$$

dove gli operatori T , N e V sono definiti in (2.3) (dove la costante di Planck \hbar è stata scelta uguale ad 1), α_0 e ν_0 sono due parametri liberi della teoria, e il potenziale chimico μ è fissato a qualche valore > 0 .

Supponiamo che l'intensità del potenziale a due corpi λ_0 contenuta nell'operatore V soddisfi alla proprietà

$$7.20 \quad |\lambda_0| \leq \varepsilon \quad (7.26)$$

per qualche costante ε . Siano: $v_0 \equiv \frac{v_F}{m}$ la velocità alla superficie di Fermi; p_0^{-1} la portata del potenziale λ_0 (vedi §2.1); $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$, dove k_B è la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta del sistema; T l'operatore di ordinamento temporale fermionico (vedi definizione nelle righe seguenti la (2.8)); $S(x - y)$ la funzione di Schwinger interagente

$$7.20a \quad S(x - y) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\text{Tre}^{-\beta H} \mathbf{T} \{ \psi_x^- \psi_y^+ \}}{\text{Tre}^{-\beta H}} ; \quad (7.27)$$

$S_0(x - y)$ la funzione di Schwinger libera

$$7.20b \quad S_0(x - y) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\text{Tre}^{-\beta H_0} \mathbf{T} \{ \psi_x^- \psi_y^+ \}}{\text{Tre}^{-\beta H_0}} . \quad (7.28)$$

Allora esistono una costante C e delle scelte di α_0, ν_0 tali che $\max\{|\alpha_0|, |\nu_0|\} \leq \varepsilon$, per cui, se la temperatura del sistema T è maggiore della temperatura critica

$$7.21 \quad T_c = \frac{v_0 p_0}{k_B} e^{-\frac{1}{C\varepsilon}} \quad (7.29)$$

allora la funzione di correlazione a due punti $S(x)$ è data da

$$7.22 \quad S(x) = S_0(x) + \frac{A(\varepsilon, x)}{1 + |x|} \quad (7.30)$$

dove la funzione $A(\varepsilon, x)$ gode della seguente proprietà: esiste una funzione $B(\varepsilon, \beta^{-1}|x|)$, limitata, $o(\varepsilon)$, che decade all'infinito nell'argomento $\beta^{-1}|x|$ più veloce di ogni potenza ed è tale che $|A(\varepsilon, x)| \leq B(\varepsilon, \beta^{-1}|x|)$.

Il risultato espresso dal Teorema 7.1 e' quello voluto: infatti il Teorema 7.1 ci dice che, a temperatura sufficientemente alta, il propagatore della teoria interagente, per $|x| < 1$ decade come $\frac{1}{|x|}$, mentre, per $|x| > 1$, decade piu' veloce di ogni potenza nell' argomento $\beta^{-1}x$; ci dice quindi che il comportamento della funzione di correlazione interagente e' qualitativamente lo stesso della funzione di correlazione libera (per la quale l' unica differenza e' che, al posto del decadimento piu' veloce di ogni potenza, si ha decadimento esponenziale). Inoltre fornisce una temperatura critica che e' esponenzialmente piccola nella costante di accoppiamento ε , come ci aspetta fisicamente.

Abbiamo gia' spiegato nel precedente Capitolo che in realta' ci si aspetta che le costanti che compaiono nella definizione della temperatura critica dovrebbero essere dello stesso ordine di grandezza dei grafici al second' ordine che contribuiscono alla funzione beta per λ_h . Purtroppo con il procedimento che abbiamo seguito in questo lavoro non abbiamo speranza di ottenere delle costanti ottimali, a meno di non riuscire a rinormalizzare i sottografici a quattro gambe esterne (vedi osservazione al Teorema 6.3), e quindi, come gia' sottolineato piu' volte, la temperatura critica T_c che compare nell' enunciato del Teorema 6.1 non e' la temperatura critica BCS.

E' interessante domandarsi se, dal risultato del Teorema 7.1, sia possibile distinguere tra un comportamento "tipo liquido di Fermi" da uno "tipo liquido di Luttinger".

Va innanzitutto chiarito cosa si intende per comportamento "tipo liquido di Fermi" o "tipo liquido di Luttinger" nel caso di un sistema di fermioni interagenti a temperatura finita. Infatti la nozione di liquido di Fermi o di Luttinger per un sistema di fermioni interagenti a rigore e' ben definita solo nel limite $\beta \rightarrow \infty$; solo in questo limite e' ben definita una superficie di Fermi ed e' possibile controllare che tipo di singolarita' ha la funzione numero di occupazione sulla superficie di Fermi stessa (a seconda dei due casi citati sopra puo' avere una discontinuita' di salto, oppure puo' essere continua ma con tangente verticale).

Le proprieta' della funzione numero di occupazione alla superficie di Fermi si possono anche tradurre in proprieta' di decadimento all' infinito della funzione di correlazione a due punti (poiche', come noto, il numero di occupazione e' banalmente legato alla trasformata di Fourier della funzione di correlazione a due punti). In particolare si possono dare le seguenti nozioni di liquido di Fermi o di Luttinger per un sistema di fermioni interagenti a temperatura nulla:

DEFINIZIONE 7.1. *Un sistema fermionico interagente con hamiltoniana (7.25) viene detto liquido normale di Fermi se, nei limiti $L \rightarrow \infty$ $\beta \rightarrow \infty$, e per $|x| > 1$, la funzione di Schwinger a due punti e' data da:*

$$7.24 \quad S(x) = S_0(x) + A(\varepsilon, x)|x|^{-1} \quad (7.31)$$

dove:

$S_0(x)$ e' la funzione di Schwinger a due punti libera;
 ε stima le costanti di accoppiamento $\alpha_0, \nu_0, \int dx |\lambda_0(x)|$;
 la funzione $A(\varepsilon, x)$ e' limitata ed e' $o(\varepsilon)$.

DEFINIZIONE 7.2. *Un sistema fermionico interagente con hamiltoniana (7.25) viene detto liquido di Luttinger se, nei limiti $L \rightarrow \infty$ $\beta \rightarrow \infty$, e per grandi valori delle coordinate, la funzione di Schwinger a due punti e' data da:*

$$7.25 \quad S(x) = \frac{S_0(x)}{|x|^\eta} + \frac{A(\varepsilon, x)}{|x|^{1+\eta}} \quad (7.32)$$

dove:

$S_0(x)$ e' la funzione di Scwinger a due punti libera;
 ε stima le costanti di accoppiamento $\alpha_0, \nu_0, \int dx |\lambda_0(x)|$;
 $\eta = o(\varepsilon^2)$;
 la funzione $A(\varepsilon, x)$ e' limitata ed e' $o(\varepsilon)$.

Nel caso in cui il sistema di fermioni sia a temperatura finita, la funzione di correlazione a due punti libera decade esponenzialmente, con una massa proporzionale alla temperatura stessa (ossia decade esponenzialmente in un argomento proporzionale a $\beta^{-1}|x|$). Fino a che $|x| < \beta$ il sistema “non si accorge” che la temperatura e’ finita e la funzione di Schwinger, in questa regione, decade come $\frac{1}{|x|}$, ossia essenzialmente come la funzione di Schwinger libera a temperature nulla. Questo fenomeno e’ analogo a quello per cui le funzioni di correlazione spaziale di un magnete ad una temperatura vicina alla temperatura critica, decadono a potenza con un esponente detto *esponente critico* fino a che $|x| \ll \xi$, dove ξ e’ la *lunghezza di correlazione*; quando poi $|x| > \xi$ il sistema “si accorge” che il che la temperatura del sistema non e’ proprio quella critica e le funzioni di correlazione decadono esponenzialmente, su una scala uguale a ξ . Vedi [H] per maggiori dettagli su questi punti.

Tenendo conto di queste proprieta’ possiamo estendere le definizioni precedenti ad un sistema di fermioni interagenti a temperatura finita nel seguente modo:

DEFINIZIONE 7.3. *Diremo che un sistema fermionico interagente con hamiltoniana (7.25) a β finita ha un comportamento “tipo liquido di Fermi” se, nel limite $L \rightarrow \infty$, e per grandi valori delle coordinate, la funzione di Schwinger a due punti e’ data da:*

$$7.26 \quad S(x) = S_0(x) + \frac{A(\varepsilon, x)}{|x|} \quad (7.33)$$

dove:

$S_0(x)$ e’ la funzione di Schwinger a due punti libera;

ε stima le costanti di accoppiamento $\alpha_0, \nu_0, \int dx |\lambda_0(x)|$. Inoltre esiste una funzione $B(\varepsilon, \beta^{-1}|x|)$ che e’ limitata, e’ $o(\varepsilon)$, decade piu’ veloce di ogni potenza nell’ argomento $\beta^{-1}|x|$ ed e’ tale che $|A(\varepsilon, x)| < B(\varepsilon, \beta^{-1}|x|)$.

Osservazione.

Il risultato del Teorema 7.1 ci dice proprio che il nostro sistema ha un comportamento tipo liquido di Fermi, secondo la Definizione 7.3.

DEFINIZIONE 7.4. *Diremo che un sistema fermionico interagente con hamiltoniana (7.25) a β finita ha un comportamento “tipo liquido di Luttinger” se, nel limite $L \rightarrow \infty$, e per grandi valori delle coordinate, la funzione di Schwinger a due punti e’ data da:*

$$7.27 \quad S(x) = \frac{S_0(x)}{|x|^\eta} + \frac{A(\varepsilon, x)}{|x|^{1+\eta}} \quad (7.34)$$

dove:

$S_0(x)$ e’ la funzione di Schwinger a due punti libera;

ε stima le costanti di accoppiamento $\alpha_0, \nu_0, \int dx |\lambda_0(x)|$;

$\eta = o(\varepsilon^2)$. Inoltre esiste una funzione $B(\varepsilon, \beta^{-1}|x|)$ che e’ limitata, e’ $o(\varepsilon)$, decade piu’ veloce di ogni potenza nell’ argomento $\beta^{-1}|x|$ ed e’ tale che $|A(\varepsilon, x)| < B(\varepsilon, \beta^{-1}|x|)$.

Possiamo riscrivere la (7.34) nella forma

$$7.27z \quad \beta^\eta \left[S_0(x) + \frac{A'(\varepsilon, x)}{|x|} \right] \quad (7.35)$$

dove la funzione $A'(\varepsilon, x)$ gode delle stesse proprieta’ della funzione $A(\varepsilon, x)$ della (7.34). Poiche’ l’ esponente η e’ piccolo, possiamo sviluppare perturbativamente il fattore $\beta^{-\eta}$ che compare nella (7.35): $\beta^{-\eta} = 1 - \eta \log \beta + \dots$.

Vediamo allora che, perturbativamente, per $\varepsilon \log \beta$ opportunamente piccolo, non c'è nessuna differenza tra un comportamento di tipo Fermi o di tipo Luttinger. L'unico caso in cui si potrebbe distinguere tra i due comportamenti sarebbe quello in cui la differenza $S(x) - S_0(x)$ fosse di $o(\varepsilon^2)$. In questo caso il comportamento tipo liquido di Luttinger sarebbe escluso, a meno di non ammettere che $\eta = o(\varepsilon^3)$.

In ogni caso dalla nostra discussione segue che la correzione alla funzione di Schwinger libera è $o(\varepsilon)$ e quindi non riusciamo effettivamente a distinguere tra i due comportamenti.

Nel lavoro [DR2] si afferma che, per il sistema in questione, la differenza $S(x) - S_0(x)$ è di $o(\varepsilon^2)$ e riconoscono quindi un comportamento di tipo Fermi. Noi non siamo riusciti a verificare l'affermazione riportata in [DR2].

È possibile poi dare una definizione più forte di liquido di Fermi (vedi [Sa]): si può definire liquido di Fermi un sistema che, a temperatura finita, gode delle proprietà elencate nella Definizione 7.3 e in più della seguente:

la derivata seconda dell'autoenergia rispetto a k è limitata per ogni valore di k .

Il motivo per cui questa proprietà esclude un comportamento di tipo Luttinger è, euristicamente, il seguente:

un liquido di Luttinger ha una funzione di correlazione che, in spazio k , si comporta come:

$$7.28 \quad S_L(k) \sim \frac{1}{-ik_0 + e(\mathbf{k})} \frac{1}{|-ik_0 + e(\mathbf{k})|^\eta} \quad (7.36)$$

ovvero, sviluppando perturbativamente $|-ik_0 + e(\mathbf{k})|^\eta$:

$$7.29 \quad S_L(k) \sim \frac{1}{-ik_0 + e(\mathbf{k}) (1 + o(\eta \log |-ik_0 + e(\mathbf{k})|))} \quad (7.37)$$

dove va tenuto presente che $|k_0| > \frac{\pi}{\beta}$.

Se si definisce l'autoenergia $\Sigma(k)$ secondo la seguente relazione:

$$7.30 \quad S_L(k) = \frac{1}{-ik_0 + e(\mathbf{k}) + \Sigma(k)} \quad (7.38)$$

si ottiene subito che

$$7.31 \quad \Sigma(k) \sim \eta |-ik_0 + e(\mathbf{k})| \log |-ik_0 + e(\mathbf{k})| \quad (7.39)$$

Dalla (7.39) risulta evidente che alcuni elementi di matrice dell'hessiano $\partial^2 \Sigma(k)$ divergono sulla superficie di Fermi.

Viceversa un liquido di Fermi ha una funzione di correlazione della forma:

$$7.32 \quad S_F(k) \sim \frac{1}{|-ik_0 + e(\mathbf{k})| (1 + o(\varepsilon^2))} \quad (7.40)$$

e quindi $\Sigma(k)$ ha le derivate seconde limitate.

Nel lavoro [DR2] si afferma anche che nel sistema di fermioni in questione la funzione di correlazione gode anche di quest'ultima proprietà più forte, ma noi non siamo riusciti a verificare neanche questa affermazione.

app.1

Appendice A1. Verifica della (3.34)

Vogliamo verificare la (3.34) che e' equivalente alla seguente identita':

$$A1.1 \quad \int P(d\psi) e^{-H_I(\psi+G\phi)+(\phi^+,G\phi^-)} = \int P(d\psi) e^{-H_I(\psi)+(\phi^+,\psi^-)+(\psi^+,\phi^-)} \quad (A1.1)$$

Definiamo i nuclei $V_0(x_1, \dots, x_s; y_1, \dots, y_s)$ attraverso la seguente definizione:

$$A1.2 \quad e^{-H_I(\psi)} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \int dx_1 dy_1 \dots dx_s dy_s V_0(x_1, \dots, x_s; y_1, \dots, y_s) \phi_{x_1}^+ \phi_{y_1}^- \dots \phi_{x_s}^+ \phi_{y_s}^- \quad (A1.2)$$

Usando la (A1.2) il primo membro della (A1.1) diventa (tenendo conto del fatto che gli operatori $H_I(\psi+G\phi)$ e $(\phi^+, G\phi^-)$ commutano, e quindi che $e^{-H_I(\psi)+(\phi^+,G\phi^-)} = e^{-H_I(\psi)} e^{(\phi^+,G\phi^-)}$):

$$A1.3 \quad \left\{ \int P(d\psi) \sum_{s_1=0}^{\infty} \int dx_1 dy_1 \dots dx_{s_1} dy_{s_1} V_0(x_1, \dots, x_{s_1}; y_1, \dots, y_{s_1}) \left(\psi_{x_1}^+ + \int dz_1 \phi_{z_1}^+ g(z_1 - x_1) \right) \cdot \right. \\ \cdot \left(\psi_{y_1}^- + \int dw_1 g(y_1 - w_1) \phi_{w_1}^- \right) \dots \left(\psi_{x_{s_1}}^+ + \int dz_{s_1} \phi_{z_{s_1}}^+ g(z_{s_1} - x_{s_1}) \right) \left(\psi_{y_{s_1}}^- + \int dw_{s_1} g(y_{s_1} - w_{s_1}) \phi_{w_{s_1}}^- \right) \left. \right\} \\ \left\{ \sum_{s_2=0}^{\infty} \frac{1}{s_2!} \int dx_1 dy_1 \dots dx_{s_2} dy_{s_2} \phi_{x_1}^+ g(x_1 - y_1) \phi_{y_1}^- \dots \phi_{x_{s_2}}^+ g(x_{s_2} - y_{s_2}) \phi_{y_{s_2}}^- \right\} \quad (A1.3)$$

Eseguendo l' operazione di valore aspettato nella prima parentesi graffa della (A1.3) otteniamo che ogni nucleo $V_0(x_1, \dots, x_{s_1}; y_1, \dots, y_{s_1})$ viene moltiplicato da una serie nei campi ϕ :

$$A1.3a \quad (A1.3) = \left\{ \sum_{s_1=0}^{\infty} \int dx_1 dy_1 \dots dx_{s_1} dy_{s_1} V_0(x_1, \dots, x_{s_1}; y_1, \dots, y_{s_1}) \left[\det G(x_1, \dots, x_{s_1}; y_1, \dots, y_{s_1}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i,j=1}^s (\chi(i \leq j) - \chi(i > j)) \int dz_i dw_j \phi_{z_i}^+ g(z_i - x_i) g(y_j - w_j) \phi_{w_j}^- \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \det G^{(i)(j)}(x_1, \dots, \cancel{x_i}, \dots, x_{s_1}; y_1, \dots, \cancel{y_j}, \dots, y_{s_1}) + o. s. \right] \right\} \\ \cdot \left\{ \sum_{s_2=0}^{\infty} \frac{1}{s_2!} \int dx_1 dy_1 \dots dx_{s_2} dy_{s_2} \phi_{x_1}^+ g(x_1 - y_1) \phi_{y_1}^- \dots \phi_{x_{s_2}}^+ g(x_{s_2} - y_{s_2}) \phi_{y_{s_2}}^- \right\} \quad (A1.4)$$

Nella precedente equazione il determinante $\det G$ e' quello che si ottiene come risultato dell' operazione di valore aspettato sul monomio $\psi_{x_1}^+ \psi_{y_1}^- \dots \psi_{x_s}^+ \psi_{y_s}^-$. Il determinante $\det G^{(i)(j)}$ invece e' quello che si ottiene come risultato dell' operazione di valore aspettato sul monomio $\psi_{x_1}^+ \psi_{y_1}^- \dots \cancel{\psi_{x_i}^+ \psi_{y_i}^-} \dots \psi_{x_j}^+ \cancel{\psi_{y_j}^-} \psi_{x_s}^+ \psi_{y_s}^-$. I termini di ordine superiore (che arrivano fino all' ordine s nei campi ϕ) non sono scritti esplicitamente ma sono esattamente della stessa forma. La funzione $\chi(\text{condizione})$ e' la funzione = 1 quando la *condizione* e' verificata ed = 0 quando non lo e'; il suo ruolo nella (A1.4) e' semplicemente quello di dare il giusto segno al termine $\sim \det G^{(i)(j)}$.

Allo stesso modo, usando ancora la (A1.2) il secondo membro della (A1.1) diventa:

$$\begin{aligned}
 & \int P(d\psi) \left\{ \sum_{s_3=0}^{\infty} \int dx_1 dy_1 \dots dx_{s_3} dy_{s_3} V_0(x_1, \dots, x_{s_3}; y_1, \dots, y_{s_3}) \psi_{x_1}^+ \psi_{y_1}^- \dots \psi_{x_{s_3}}^+ \psi_{y_{s_3}}^- \right\} \\
 & \cdot \left\{ \sum_{s_4=0}^{\infty} \frac{1}{s_4!} \int dx_1 \dots dx_{s_4} \psi_{x_1}^+ \phi_{x_1}^- \dots \psi_{x_{s_4}}^+ \phi_{x_{s_4}}^- \right\} \left\{ \sum_{s_5=0}^{\infty} \frac{1}{s_5!} \int dx_1 \dots dx_{s_5} \phi_{x_1}^+ \psi_{x_1}^- \dots \phi_{x_{s_5}}^+ \psi_{x_{s_5}}^- \right\}
 \end{aligned} \tag{A1.5}$$

Quando anche nella (A1.5) si esegue l'operazione di valore aspettato rispetto alle variabili ψ vediamo subito che otteniamo uno sviluppo analogo alla (A1.4). Infatti a seconda di come contraiamo tra loro i campi ψ contenuti nelle somme su s_3, s_4, s_5 si ottengono vari contributi:

se contraiamo i campi ψ contenuti nella somma su s_3 tutti tra loro e i campi contenuti nelle altre due somme tutti tra loro si genera un termine $\sim \det G$;

se i campi ψ contenuti nella somma su s_3 sono contratti con una coppia di campi $\psi_{x_i}^+ \psi_{x_j}^-$ tale che (diciamo) $\psi_{x_i}^+$ appartenga alla somma su s_4 e $\psi_{x_j}^-$ appartenga alla somma su s_5 si genera un termine $\sim \det G'(i)(j) \dots$

L' unica cosa che va ancora controllata e' che i segni e i fattori combinatori siano gli stessi nei due sviluppi in potenze.

Il fatto che il segno sia lo stesso nei termini corrispondenti dei due sviluppi si verifica banalmente (ci si convince facendo qualche esempio esplicito).

Controlliamo invece che i fattori combinatori siano gli stessi.

Prendiamo in considerazione il termine della (A1.4) che abbia $s_1 = \bar{s}_1$, che, nella somma su s_1 , sia di ordine $2s_1^{(0)} \leq 2\bar{s}_1$ e che abbia $s_2 = \bar{s}_2$. Il fattore combinatorio ad esso associato e' $\frac{1}{s_2!}$.

Il termine corrispondente nello sviluppo (A1.5) e' quello in cui $s_3 = \bar{s}_1$, $s_4 = s_5 = s_1^{(0)} + \bar{s}_2$ e in cui $s_1^{(0)}$ degli \bar{s}_1 campi ψ^+ (ψ^-) della somma su s_3 sono contratti con $s_1^{(0)}$ degli $s_1^{(0)} + \bar{s}_2$ campi ψ^- (ψ^+) della somma su s_5 (s_4).

Poiche' nella (A1.4) abbiamo scelto di scrivere esplicitamente la somma sugli indici i, j, \dots che individuano il minore $G^{(i)(j)(\dots)}$, e' naturale scrivere anche nello sviluppo (A1.5) la stessa somma (ossia la somma sui modi estrarre $s_1^{(0)}$ campi ψ^+ (ψ^-) da \bar{s}_1 campi ψ^+ (ψ^-)); con questa scelta non compare nessun fattore combinatorio corrispondente ai modi in cui si possono scegliere $s_1^{(0)}$ campi da \bar{s}_1 possibili.

Ci sono invece $\binom{s_1^{(0)} + \bar{s}_2}{s_1^{(0)}}$ modi di scegliere gli $s_1^{(0)}$ campi della somma su s_4 (s_5) da contrarre con i campi della somma su s_1 . Una volta scelti, ci sono $s_1^{(0)}!$ modi di realizzare le contrazioni. Inoltre ci sono $\bar{s}_2!$ modi di realizzare le contrazioni tra i campi della somma su s_4 e quelli della somma su s_5 .

In definitiva, tenendo anche conto dei due fattori combinatori $\frac{1}{s_4!}$ e $\frac{1}{s_5!}$ che compaiono nelle somme su s_4 e su s_5 , abbiamo che il fattore combinatorio complessivo che compare davanti al termine in questione dello sviluppo (A1.5) e' uguale a:

$$\left[\frac{1}{(s_1^{(0)} + \bar{s}_2)!} \binom{s_1^{(0)} + \bar{s}_2}{s_1^{(0)}} s_1^{(0)}! \right]^2 \bar{s}_2! = \frac{1}{\bar{s}_2!} \tag{A1.6}$$

e quindi e' proprio uguale a quello voluto.

app.2

Appendice A2. Dimostrazione del Lemma 4.1

Vogliamo ottenere una stima sul modulo del propagatore $g_\omega^{(h)}(x)$ definito come segue:

$$A2.1 \quad g_\omega^{(h)}(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}x} \frac{f^{(h)}(k_0^2 + e_\omega(\mathbf{k})^2)}{-ik_0 + e_\omega(\mathbf{k})} \chi_\omega^{(h)}(\theta) \quad (A2.1)$$

dove si usano tutte le stesse notazioni e convenzioni del Capitolo 4. Per comodita' di riferimento, ricordiamo che

$$A2.13 \quad e_\omega(\mathbf{k}) = \beta k^\parallel + \frac{k^\perp{}^2 + k^\perp{}^2}{2m}, \quad \beta = \frac{p_F}{m} \quad (7.2)$$

e

$$A2.1a \quad \chi_\omega^{(h)}(\theta) \equiv \chi \left(\gamma^{-\alpha h} \arctan \frac{k^\perp}{k^\parallel + p_F} \right) \vartheta(k^\parallel + p_F) \quad (A2.3)$$

la disuguaglianza che vogliamo verificare e' la seguente :

$$A2.2 \quad |g_\omega^h(x)| \leq \gamma^{(1+\alpha)h} \frac{C_N}{1 + [(\gamma^h d_\beta(x_0))^2 + (\gamma^h d_L(x\omega))^2 + (\gamma^{\alpha h} d_L(x\omega^\perp))^2]^{2N}} \quad (A2.4)$$

dove, se θ_ω e' un qualche angolo prefissato, $\omega = (0, \cos \theta_\omega, \sin \theta_\omega)$. Inoltre:

$$A2.3 \quad \begin{aligned} d_\beta(x_0) &\equiv \frac{\sin \frac{2\pi}{\beta} x_0}{\frac{2\pi}{\beta}} \\ d_L(x_1) &\equiv \frac{\sin \frac{2\pi}{L} x_1}{\frac{2\pi}{L}} \\ d_L(x_2) &\equiv \frac{\sin \frac{2\pi}{L} x_2}{\frac{2\pi}{L}} \\ d_L(x\omega) &\equiv d_L(x_1) \cos \theta_\omega + d_L(x_2) \sin \theta_\omega \\ d_L(x\omega^\perp) &\equiv -d_L(x_1) \sin \theta_\omega + d_L(x_2) \cos \theta_\omega \end{aligned} \quad (A2.5)$$

Notiamo che, nei limiti $\beta \rightarrow \infty$ e $L \rightarrow \infty$, $d_\beta(x_0) \rightarrow x_0$ e $d(y) \rightarrow y$, dove y puo' essere uguale a $x_1, x_2, x\omega$ o a $x\omega^\perp$.

L' enunciato del Lemma 4.1 riportato nel Capitolo 4 e' semplificato, nel senso che e' valido esattamente solo nel limite $\beta, L \rightarrow \infty$ e non tiene conto del caso in cui β e L sono mantenuti finiti.

Per verificare la (A2.4) abbiamo bisogno di introdurre una derivata discreta $\tilde{\partial}_k$:

$$A2.4 \quad \begin{aligned} \left. \frac{\tilde{\partial} f(k_0, \mathbf{k})}{\tilde{\partial} \mathbf{k}} \right|_{\mathbf{k}=\bar{\mathbf{k}}} &\equiv \sum_{i=1}^2 \mathbf{e}_i \frac{f(k_0, \bar{\mathbf{k}} + \frac{2\pi}{L} \mathbf{e}_i) - f(k_0, \bar{\mathbf{k}} - \frac{2\pi}{L} \mathbf{e}_i)}{\frac{4\pi}{L}} \\ \left. \frac{\tilde{\partial} f(k_0, \mathbf{k})}{\tilde{\partial} k_0} \right|_{k_0=\bar{k}_0} &\equiv \frac{f(\bar{k}_0 + \frac{2\pi}{\beta}, \mathbf{k}) - f(\bar{k}_0 - \frac{2\pi}{\beta}, \mathbf{k})}{\frac{4\pi}{\beta}} \end{aligned} \quad (A2.6)$$

dove i vettori \mathbf{e}_i $i = 1, 2$ sono i versori degli assi coordinati spaziali; $f(k_0, \mathbf{k})$ e' una funzione definita sull'insieme discreto $\mathcal{D}_\beta \times \mathcal{D}_L$.

La derivata discreta definita come in (A2.6) gode della seguente proprietà:

$$\begin{aligned}
 A2.5 \quad i \frac{\tilde{\partial}}{\partial \mathbf{k}} e^{-ikx} &= \sum_{i=1}^2 \mathbf{e}_i d_L(\mathbf{x}_i) e^{-ikx} \\
 i \frac{\tilde{\partial}}{\partial k_0} e^{-ikx} &= d_\beta(x_0) e^{-ikx}
 \end{aligned} \tag{A2.7}$$

come è facile verificare applicando la definizione (A2.6).

Iniziamo allora a stimare il modulo del prodotto $(\gamma^h d_\beta(x_0))^2 g_\omega^{(h)}(x)$:

$$A2.6 \quad |(\gamma^h d_\beta(x_0))^2 g_\omega^{(h)}(x)| = \left| \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{f^{(h)}(k_0^2 + e_\omega(\mathbf{k})^2)}{-ik_0 + e_\omega(\mathbf{k})} \chi_\omega^{(h)}(\theta) \gamma^{2h} \tilde{\partial}_{k_0}^2 e^{-ikx} \right| \tag{A2.8}$$

dove, se * rappresenta l' aggiunto

$$A2.7 \quad \tilde{\partial}_{k_0}^2 \equiv \tilde{\partial}_{k_0} \tilde{\partial}_{k_0}^* \tag{A2.9}$$

(più avanti useremo anche una definizione analoga per la derivata rispetto alle componenti spaziali del vettore k):

$$\begin{aligned}
 A2.8 \quad \tilde{\partial}_{k_{\parallel}}^2 &\equiv (\omega \tilde{\partial}_{\mathbf{k}}) (\omega \tilde{\partial}_{\mathbf{k}}^*) \\
 \tilde{\partial}_{k_{\perp}}^2 &\equiv (\omega^{\perp} \tilde{\partial}_{\mathbf{k}}) (\omega^{\perp} \tilde{\partial}_{\mathbf{k}}^*)
 \end{aligned} \tag{A2.10}$$

) Usando la regola di integrazione per parti, che rimane valida anche per la derivata discreta, possiamo riscrivere la (A2.8) come segue:

$$A2.9 \quad (A2.8) \leq \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \left| \gamma^{2h} \tilde{\partial}_{k_0}^2 \left[\frac{f^{(h)}(k_0^2 + e_\omega(\mathbf{k})^2)}{-ik_0 + e_\omega(\mathbf{k})} \chi_\omega^{(h)}(\theta) \right] \right| \tag{A2.11}$$

Ora si può eseguire un cambio di variabili

$$\begin{aligned}
 A2.10 \quad \gamma^{-h} k_0 &\rightarrow k_0 \\
 \gamma^{-h} k_{\parallel} &\rightarrow k_{\parallel} \\
 \gamma^{-\alpha h} k_{\perp} &\rightarrow k_{\perp}
 \end{aligned} \tag{A2.12}$$

In questo modo l' integrale in (A2.11) diventa uguale ad un integrale adimensionale (che può essere stimato da una costante indipendente da h e da α) moltiplicato un fattore dimensionale $\gamma^{2h} \gamma^{(2+\alpha)h} \gamma^{-2h} \gamma^{-h}$ (il primo γ^{2h} è quello già presente nella (A2.11); il fattore $\gamma^{(2+\alpha)h}$ viene dall' elemento di integrazione $\frac{dk}{(2\pi)^3}$; il fattore γ^{-2h} viene dalla derivata seconda; γ^{-h} viene dal fattore $-ik_0 + e_\omega(\mathbf{k})$ a denominatore nella (A2.11)). Mettendo insieme i precedenti quattro fattori otteniamo il fattore dimensionale voluto, $\gamma^{(1+\alpha)h}$.

Analogamente si ottiene la giusta stima per $|(\gamma^h d_\beta(x_0))^{2N} g_\omega^{(h)}(x)|$, per ogni intero $N \geq 0$, e per $|(\gamma^h d_L(x\omega))^{2N} g_\omega^{(h)}(x)|$; ovvero si ottiene, come voluto,

$$A2.11 \quad |(\gamma^h d_\beta(x_0))^{2N} g_\omega^{(h)}(x)| \leq C_N \gamma^{(1+\alpha)h} \tag{A2.13}$$

e

$$A2.12 \quad |(\gamma^h d_L(x\omega))^{2N} g_\omega^{(h)}(x)| \leq C_N \gamma^{(1+\alpha)h} \tag{A2.14}$$

Convieni invece soffermarsi con qualche dettaglio sulla stima del termine $|(\gamma^{\alpha h} d_L(x\omega^{\perp}))^{2N} g_\omega^{(h)}(x)|$:

$$A2.12a \quad |(\gamma^{\alpha h} d_L(x\omega^{\perp}))^{2N} g_\omega^{(h)}(x)| \leq \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \left| \gamma^{2h} \tilde{\partial}_{k_{\perp}}^2 \left[\frac{f^{(h)}(k_0^2 + e_\omega(\mathbf{k})^2)}{-ik_0 + e_\omega(\mathbf{k})} \chi_\omega^{(h)}(\theta) \right] \right| \tag{A2.15}$$

Quando una delle derivate rispetto a dk^\perp cade, ad esempio, sul fattore $f^{(h)}$ si genera un termine $\sim f^{(h)'} \gamma^{-2h} e_\omega(\mathbf{k}) \frac{k^\perp}{m} \sim \gamma^{-h(1-\alpha)}$. Affinche' la derivata seconda si possa stimare, come voluto, con $\gamma^{-2\alpha h}$ deve valere la disuguaglianza $\gamma^{-h(1-\alpha)} \leq \gamma^{-\alpha h}$ che e' equivalente a:

$$A2.13 \quad \alpha - g e q \frac{1}{2} \tag{A2.16}$$

Quindi solo se si suppone la (A2.16) si ottiene la stima voluta:

$$A2.14 \quad |(\gamma^{\alpha h} d_L(x\omega^\perp))^{2N} g_\omega^{(h)}(x)| \leq C_N \gamma^{(1+\alpha)h} \tag{A2.17}$$

Mettendo insieme la (A2.17), la (A2.13) e la (A2.14) si ricava:

$$A2.15 \quad \left| \left\{ 1 + [(\gamma^h d_\beta(x_0))^2 + (\gamma^h d_L(x\omega))^2 + (\gamma^{\alpha h} d_L(x\omega^\perp))^2]^N \right\} g_\omega^{(h)}(x) \right| \leq C_N \gamma^{(1+\alpha)h} \tag{A2.18}$$

che e' equivalente alla (A2.4).

app.3

Appendice A3. Conteggio degli alberi e dei grafici di Feynman

Vogliamo raccogliere in questa Appendice alcuni lemmi riguardanti il conteggio degli alberi e dei grafici di Feynman.

p.A3.1 **A3.1. Alberi**

Nel presente paragrafo useremo tutte le stesse definizioni e convenzioni introdotte nel paragrafo §4.2.

Prima di esporre gli enunciati e le dimostrazioni sul conteggio degli alberi, conviene far notare alcune semplici relazioni, valide per alberi τ con radice, decorati o non, le cui verifiche sono molto semplici e quindi preferiamo non discuterle esplicitamente.

Se $|V(\tau)|$ e' il numero di vertici dell' albero e $|E(\tau)|$ il numero di linee dell' albero, vale la seguente identita':

A3.1
$$|V(\tau)| = |E(\tau)| \tag{A3.1}$$

dove abbiamo usato il fatto che la radice r non e' un vertice.

Inoltre si ha:

A3.2
$$\sum_{v \in V(\tau)} s_v + 1 = 2|V(\tau)| - 1 \tag{A3.2}$$

$$\sum_{v \in V(\tau) \setminus V_f(\tau)} s_v - 1 = |V_f(\tau)| - 1$$

dove $V(\tau)$ e' l' insieme dei vertici dell' albero τ , $V_f(\tau)$ e' l' insieme dei suoi punti finali e $|V_f(\tau)|$ e' il numero di punti finali.

Se poi $V_{nt}(\tau)$ e' l' insieme dei vertici non banali dell' albero τ e $|V_{nt}(\tau)|$ e' il numero di vertici non banali, si ha:

A3.3
$$1 \leq |V_f(\tau)| \leq \begin{cases} |V(\tau)| - 1, & \text{se } |V(\tau)| \geq 2, \\ 1, & \text{se } |V(\tau)| = 1, \end{cases} \tag{A3.3}$$

$$\begin{cases} |V_{nt}(\tau)| - |V_f(\tau)| = 0, & \text{se } |V_f(\tau)| = 1, \\ 1 \leq |V_{nt}(\tau)| - |V_f(\tau)| \leq |V_f(\tau)| - 1, & \text{se } |V_f(\tau)| > 1, \end{cases}$$

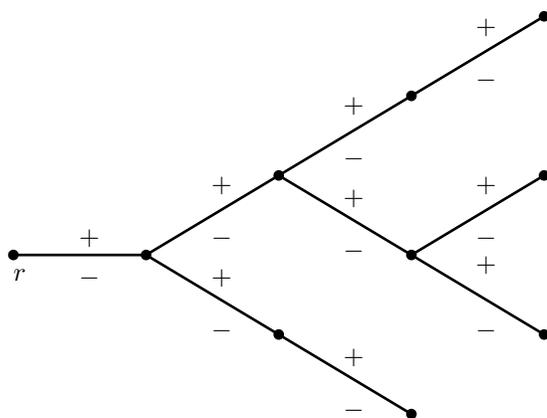
Possiamo adesso passare a contare gli alberi con un numero fissato di vertici o di punti finali. Il numero di alberi non decorati con radice e' controllato dal seguente:

LEMMA A3.1 *Il numero di alberi non decorati con radice con n vertici e' stimato da C_1^n per qualche costante C_1 .*

Il numero di alberi non decorati con radice con m punti finali e' stimato da C_2^m per qualche costante C_2 .

Dimostrazione Iniziamo a dimostrare la prima parte del Lemma. Il risultato fondamentale e' quello secondo cui il numero di alberi non decorati con radice con n vertici e' stimato dal numero di cammini aleatori unidimensionali W con $2n$ passi. Questo possiamo provarlo come segue.

Possiamo immaginare di muoverci lungo l' albero rimanendo alla sinistra delle linee e partendo dalla radice r . Ci muoviamo finche' non raggiungiamo un punto finale: una volta raggiuntolo torniamo indietro finche' non incontriamo un vertice non banale; quindi ci rigiriamo ancora in avanti, e cosi' via finche' non ritorniamo alla radice. Come esempio si puo' vedere la Fig. A1, in cui e' disegnato un albero ed e' indicato il cammino



$$W = \{++++--++-+----++----\}$$

FIG. A1. Un albero con radice ed il corrispondente cammino W .

aleatorio corrispondente: $+$ significa che ci muoviamo da sinistra a destra lungo la linea, mentre $-$ significa che ci muoviamo da destra a sinistra.

Ogni volta che ci muoviamo in avanti lungo una linea associamo ad essa il segno $+$, mentre le associamo il segno $-$ quando ci muoviamo all'indietro. Quindi ogni albero ad n vertici (che ha anche, per la (A3.1), n linee) puo' essere caratterizzato da un insieme di $2n$ segni \pm che definiscono un cammino $W = \{\pm \pm \dots \pm\}$. va notato che non tutti i cammini aleatori unidimensionali a $2n$ passi corrispondono ad un albero non decorato: chiameremo *compatibili* i cammini aleatori per cui questo avviene. Ad esempio il primo segno deve essere sempre un $+$ e l'ultimo deve essere sempre un $-$; inoltre il numero di segni $+$ in W deve essere uguale al numero di segni $-$. Vediamo chiaramente che gli alberi non decorati con radice sono in corrispondenza uno a uno con i cammini compatibili. Trascurando tutti i vincoli possiamo stimare il numero di alberi non decorati con radice con n vertici con il numero di cammini aleatori unidimensionali a $2n$ passi, ossia con 2^{2n} .

Quindi la prima parte del Lemma segue, con $C_1 = 4$.

La seconda parte del Lemma e' un banale corollario della prima parte, tenuto conto che, per la seconda linea di (A3.3), se $m > 1$ e' il numero di punti finali dell'albero,

$$A3.4 \quad m + 1 \leq |V(\tau)| \leq 2m - 1 \tag{A3.4}$$

Dalla (A3.4) segue la seconda parte del Lemma, con $C_2 = 16$.■

Sia poi $\mathcal{T}_{h,n}$ l'insieme di alberi decorati con n punti finali e radice a frequenza h . Il loro numero non puo' essere stimato uniformemente in h per $h \rightarrow -\infty$. Infatti ci sono al massimo $n - 1$ vertici non banali diversi dai punti finali pero', una volta fissati questi, possiamo aggiungere vertici banaali tra di essi e, nel limite $h \rightarrow -\infty$, il numero delle possibili inserzioni tende ad infinito. In ogni caso possiamo dimostrare il seguente risultato:

LEMMA A3.2 Sia $\mathcal{T}_{h,n}$ l'insieme degli alberi decorati con n punti finali e radice a frequenza h . Se $\gamma > 1$ e $\alpha > 0$ allora

$$A3.5 \quad \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \prod_{v \notin V_f(\tau)} \gamma^{-\alpha(h_v - h_{v'})} \leq C_2^n, \tag{A3.5}$$

per qualche costante C_2 .

Dimostrazione Ricordiamo prima di tutto che il vertice v' che compare nella (A3.5) e' il vertice che precede immediatamente il vertice v nell' albero τ . Chiamiamo $\mathcal{T}_{h,n}^*$ l' insieme degli alberi decorati di ordine n (ossia con n punti finali) che abbiano solo vertici non banali (ricordiamo che *decorato* significa che ad ogni vertice e' assegnata una scala).

Un albero decorato $\tau \in \mathcal{T}_{h,n}$ puo' essere pensato come un albero $\tau^* \in \mathcal{T}_{h,n}^*$ a cui siano stati aggiunti un certo numero di vertici banali tra ogni coppia di vertici non banali contigui; il numero delle aggiunte fatte stabilisce automaticamente i valori degli indici di scala (si suppone che, come per l' albero di Fig. 7, la differenza tra le frequenze di due vertici contigui sia identicamente uguale a 1).

Fissato l' albero τ , in modo che l' albero τ^* sia automaticamente fissato, possiamo scrivere:

$$A3.6 \quad \prod_{v \notin V_f(\tau)} \gamma^{-\alpha(h_v - h_{v'})} = \prod_{v \notin V_f(\tau^*)} \gamma^{-\alpha(h_v - h_{v'})}, \quad (A3.6)$$

L' albero τ puo' essere ottenuto inserendo $h_v - h_{v'}$ vertici banali tra $v' \in \tau^*$ e $v \in \tau^*$. Usando la (A3.6) troviamo

$$A3.7 \quad \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{h,n}} \prod_{v \notin V_f(\tau)} \gamma^{-\alpha(h_v - h_{v'})} = \sum_{\tau^* \in \mathcal{T}_{h,n}^*} \prod_{v \notin V_f(\tau^*)} \gamma^{-\alpha(h_v - h_{v'})}. \quad (A3.7)$$

Se \mathcal{T}_n^* e' l' insieme di alberi non decorati di ordine n vale la seguente proprieta', gia' enunciata nel Capitolo 4:

$$4.25 \quad \sum_{\tau^* \in \mathcal{T}_{h,n}^*} = \sum_{\tau^* \in \mathcal{T}_n^*} \sum_{\{h_v\}_{v \in \tau^*}}, \quad (7.8)$$

In questo modo

$$A3.8 \quad \begin{aligned} \sum_{\tau^* \in \mathcal{T}_{h,n}^*} \prod_{v \notin V_f(\tau^*)} \gamma^{-\alpha(h_v - h_{v'})} &= \sum_{\tau^* \in \mathcal{T}_n^*} \sum_{\{h_v\}_{v \in \tau^*}} \prod_{v \notin V_f(\tau^*)} \gamma^{-\alpha(h_v - h_{v'})} \\ &\leq \sum_{\tau^* \in \mathcal{T}_n^*} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha - 1} \right)^n \leq C^n, \end{aligned} \quad (A3.9)$$

dove abbiamo usato che $|V(\tau^*)| - |V_f(\tau^*)| \leq n$ (vedi (A3.3)) e che il numero di elementi di \mathcal{T}_n^* e' limitato da C^n per qualche costante C (vedi Lemma A3.1); inoltre nell' eseguire la somma sulle scale abbiamo trascurato tutti i vincoli tranne $h_v - h_{v'} \geq 1$. ■

Un altro Lemma che ci sara' utile per la stima del numero di grafici di Feynman e, piu' avanti, per le stime dei valori di aspettazione troncata, e' il seguente:

LEMMA A3.3 *Dati n punti, il numero di alberi che li connette e' stimato da $C^n n!$.*

Dimostrazione Chiariamo prima di tutto che gli alberi ai quali si riferisce l' enunciato del Lemma sono alberi senza radice. Piu' precisamente in questo caso per albero si intende un *grafo* (ossia un insieme di punti e di linee che hanno per estremi i punti dell' insieme) *connesso* (ossia tale che per ogni coppia di punti esiste sempre un insieme di linee del grafo che li connette) *aciclico* (ossia tale che per ogni coppia di punti c'e' solo un cammino che li connette).

Chiamiamo P_1, \dots, P_n i punti. Un albero che li connette puo' essere ottenuto considerando un albero con n punti e assegnando ai punti gli indici P_1, \dots, P_n . Per il Lemma A3.1 il numero di alberi con n punti e' stimato da C^n ; il numero di modi di assegnare gli indici e' stimato da $n!$ (ossia semplicemente dal numero di permutazioni di n oggetti). Quindi segue l' affermazione. ■

p.A3.2 **A3.2. Grafici di Feynman**

Supponiamo siano assegnati n punti v_1, \dots, v_n da ognuno dei quali escono rispettivamente d_{v_1}, \dots, d_{v_n} linee; contraendo tra loro alcune di queste linee otteniamo un *grafico*. Possiamo pensare anche che alle linee sia assegnato un indice $\sigma = \pm$ e che una linea col segno $+$ puo' essere contratta solo con una col segno $-$.

Possiamo in particolare considerare punti dai quali escono 2 o 4 linee: nel primo caso una linea ha segno $+$ e l'altra ha segno $-$; nel secondo due linee sono $+$ e due $-$. Chiameremo n_2 il numero di punti v con $d_v = 2$ e n_4 il numero di punti con $d_v = 4$ (chiaramente $n = n_2 + n_4$).

I punti v possono anche avere una *struttura*: quando $d_v = 4$ il punto v e' formato da due punti disgiunti connessi con una linea ondulata λ ; quando $d_v = 2$ il punto v puo' essere caratterizzato da un ulteriore indice, che puo' essere uguale ad α o a ν . Chiameremo *elementi del grafico* o *vertici del grafico* i punti con una struttura.

Considereremo solo grafici del tipo descritto sopra che abbiano l'ulteriore proprieta' di essere *connessi*: chiameremo questi grafici *grafici di Feynman* e li indicheremo con Γ . Chiameremo *linee esterne* le linee del grafico che sono rimaste non contratte e *linee interne* quelle contratte.

Una stima sul numero di grafici di Feynman con n vertici e' fornita dai seguenti due Lemmi.

LEMMA A3.4 *Si considerino i grafici di Feynman formati da n vertici v_1, \dots, v_n tali che $d_{v_j} = 2, 4 \quad j = 1, \dots, n$ e con $2p$ linee esterne (p con il segno $+$ e p con il segno $-$). Il loro numero e' stimato da $C^n(2n)!$ uniformemente in p .*

Dimostrazione Un generico grafico di Feynman con le proprieta' descritte nell'enunciato puo' essere costruiti nel modo che segue.

Prima di tutto si costruisca un albero tra i punti del grafico, contraendo $2(n-1)$ linee diverse da quelle esterne. Per il Lemma A3.3 il numero di questi alberi e' stimato da $C^n n!$.

Quindi si contraggano tra loro le rimanenti $4n - 2p - 2(n-1) = 2(n-p-1)$ linee, in modo tale che ognuna dell' $n-p-1$ linee $+$ sia contratta con una linea $-$. Il modo di realizzare queste contrazioni e' $(n-p-1)!$, quindi il numero di grafici di Feynman e' stimato da $C^n n!(n-p-1)! < \tilde{C}^n(2n)!$, come volevasi dimostrare.

■

app.4

Appendice A4. Aspettazioni troncate

p. A4.1 A4.1.Sviluppo in grafici di Feynman delle aspettative troncate

Definiamo una algebra di Grassman come in (3.1), una misura di integrazione come in (3.4), (3.5), (3.6), associata ad un propagatore $g(x)$. Sia \mathcal{E} l' operazione di aspettazione semplice definita come in (3.16).

Assegnamo un monomio

$$A4.1 \quad X(\psi) \equiv \tilde{\psi}_B = \prod_{\alpha \in B} \psi_{\alpha}^{\sigma_{\alpha}}, \quad (A4.1)$$

dove gli elementi α dell' insieme B appartengono al dominio $[0, \beta] \times \Omega$ e $\sigma_{\alpha} = \pm$. Il valore di aspettazione $\mathcal{E}(\tilde{\psi}_B)$ puo' essere rappresentato graficamente con un *grafico* del tipo descritto nel Capitolo 2. Ripetiamo la costruzione, per comodita' di riferimento:

Si rappresentino gli indici $\alpha \in B$ come punti nel piano. Ad ogni campo ψ_{α}^{+} si associ una linea uscente da α , mentre add o gni campo ψ_{α}^{-} si associ una linea entrante. Sia \mathcal{G} l' insieme dei grafici che si possono ottenere contraendo le linee a due a due, in modo tale che i versi delle due linee di ogni coppia contratta siano compatibili; denotiamo con Γ un elemento generico di \mathcal{G} . Dati $\alpha, \beta \in B$, sia $(\alpha\beta)$ la linea che connette α con β . Allora dalle definizioni segue che:

$$A4.2 \quad \mathcal{E}(\tilde{\psi}_B) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}} \prod_{(\alpha\beta) \in \Gamma} (-1)^{\pi} g(\alpha - \beta) \quad (A4.2)$$

dove π e' il segno della permutazione necessaria a portate i campi contratti l' uno accanto aall' altro, in modo che il campo $-$ si trovi alla sinistra del campo $+$.

Si definisca poi l' aspettazione troncata come in (3.17).

Supponiamo che le funzioni X_j siano funzioni analitiche delle variabili di Grassman (ognuna dipendente da un numero pari di variabili, per semplicita', in modo che le X_j commutino tutte tra loro). Allora si puo' verificare dalle definizioni che:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \mathcal{E}^T(X_1, X_2) = \mathcal{E}(X_1 X_2) - \mathcal{E}(X_1) \mathcal{E}(X_2) = \mathcal{E}(X_1 X_2) - \mathcal{E}^T(X_1) \mathcal{E}^T(X_2), \\
 (2) \quad & \mathcal{E}^T(X_1, X_2, X_3) = \mathcal{E}(X_1 X_2 X_3) - \mathcal{E}(X_1 X_2) \mathcal{E}(X_3) - \mathcal{E}(X_1 X_3) \mathcal{E}(X_2) \\
 & \quad - \mathcal{E}(X_2 X_3) \mathcal{E}(X_1) + 2 \mathcal{E}(X_1) \mathcal{E}(X_2) \mathcal{E}(X_3) = \mathcal{E}(X_1 X_2 X_3) - \\
 & \quad - \mathcal{E}^T(X_1 X_2) \mathcal{E}^T(X_3) - \mathcal{E}^T(X_1 X_3) \mathcal{E}^T(X_2) - \mathcal{E}^T(X_2 X_3) \mathcal{E}^T(X_1), \\
 (3) \quad & \mathcal{E}^T(X_1, X_2, X_3, X_4) = \mathcal{E}(X_1 X_2 X_3 X_4) - \mathcal{E}(X_1 X_2 X_3) \mathcal{E}(X_4) - \mathcal{E}(X_1 X_2 X_4) \mathcal{E}(X_3) \\
 & \quad - \mathcal{E}(X_1 X_3 X_4) \mathcal{E}(X_2) - \mathcal{E}(X_2 X_3 X_4) \mathcal{E}(X_1) \\
 & \quad - \mathcal{E}(X_1 X_2) \mathcal{E}(X_3 X_4) - \mathcal{E}(X_1 X_3) \mathcal{E}(X_2 X_4) - \mathcal{E}(X_1 X_4) \mathcal{E}(X_2 X_3) \\
 & \quad + 2 \mathcal{E}(X_1 X_2) \mathcal{E}(X_3) \mathcal{E}(X_4) + 2 \mathcal{E}(X_1 X_3) \mathcal{E}(X_2) \mathcal{E}(X_4) + 2 \mathcal{E}(X_1 X_4) \mathcal{E}(X_2) \mathcal{E}(X_3) \\
 & \quad + 2 \mathcal{E}(X_2 X_3) \mathcal{E}(X_1) \mathcal{E}(X_4) + 2 \mathcal{E}(X_2 X_4) \mathcal{E}(X_1) \mathcal{E}(X_3) + 2 \mathcal{E}(X_3 X_4) \mathcal{E}(X_1) \mathcal{E}(X_2) \\
 & \quad - 6 \mathcal{E}(X_1) \mathcal{E}(X_2) \mathcal{E}(X_3) \mathcal{E}(X_4) = \mathcal{E}(X_1 X_2 X_3 X_4) - \mathcal{E}^T(X_1 X_2 X_3) \mathcal{E}^T(X_4) - \\
 & \quad - \mathcal{E}^T(X_1 X_2 X_4) \mathcal{E}^T(X_3) - \mathcal{E}^T(X_1 X_3 X_4) \mathcal{E}^T(X_2) - \mathcal{E}^T(X_2 X_3 X_4) \mathcal{E}^T(X_1) - \\
 & \quad - \mathcal{E}^T(X_1 X_2) \mathcal{E}^T(X_3 X_4) - \mathcal{E}^T(X_1 X_3) \mathcal{E}^T(X_2 X_4) - \mathcal{E}^T(X_1 X_4) \mathcal{E}^T(X_2 X_3).
 \end{aligned}$$

A4.3

In generale la formula che lega le aspettative semplici con quelle troncate e' la seguente:

$$A4.4 \quad \mathcal{E}(X_1 \dots X_s) = \sum_{p=1}^s \sum_{Y_1, \dots, Y_p} \mathcal{E}^T(X_{\pi_1(1)}, \dots, X_{\pi_{|Y_1|}(1)}) \dots \mathcal{E}^T(X_{\pi_1(p)}, \dots, X_{\pi_{|Y_p|}(p)}), \quad (A4.4)$$

dove

- (1) la somma e' su tutti i possibili insiemi Y_i $i = 1, \dots, p$, unioni di $|Y_i|$ insiemi X_j , tali che $\cup_{j=1}^s X_j = \cup_{k=1}^{|Y_1|+\dots+|Y_p|} Y_k$ e
 (2) $\{\pi_1(1), \dots, \pi_{|Y_1|}(1), \pi_1(2), \dots, \dots, \pi_{|Y_p|}(p)\}$ e' una permutazione dell' insieme $\{1, \dots, s\}$.

La (A4.4) si puo' anche riscrivere nella forma:

$$A4.5 \quad \mathcal{E}^T(X_1, \dots, X_s) = \mathcal{E}(X_1 \dots X_s) - \sum_{p=2}^s \sum_{Y_1, \dots, Y_p} \mathcal{E}^T(X_{\pi_1(1)}, \dots, X_{\pi_{|Y_1|}(1)}) \dots \mathcal{E}^T(X_{\pi_1(p)}, \dots, X_{\pi_{|Y_p|}(p)}) \quad (A4.5)$$

In generale compare, a moltiplicare ogni termine della somma su p , un fattore in piu', della forma $(-1)^\pi$, dove π e' la parita' della permutazione che manda la configurazione iniziale $X_1 \dots X_s$ in quella finale, indotta dalla partizione Y_1, \dots, Y_p .

Verifichiamo per induzione la (A4.5).

Ricordiamo che il valore di aspettazione troncata e' definito nel modo seguente:

$$A4.6 \quad \mathcal{E}^T(X_1, \dots, X_s) = \left. \frac{\partial^s}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_s} \log \mathcal{E}(e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s}) \right|_{\lambda=0} \quad (A4.6)$$

Cerchiamo di ottenere una generalizzazione *fuori equilibrio* (ossia per $\lambda \neq 0$) della (A4.5). Notiamo intanto che

$$A4.7 \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \log \mathcal{E}(e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s}) = \frac{\mathcal{E}(X_1 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E}(e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} \quad (A4.7)$$

Se deriviamo ancora la (A4.7) rispetto (diciamo) a λ_2 , possono verificarsi due casi:

- (1) la derivata cade sul numeratore, ed in questo caso l' effetto della derivazione e' di sostituire al numeratore un termine $\mathcal{E}(X_1 X_2 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})$;
 (2) la derivata cade sul denominatore, ed in questo caso l' effetto della derivazione e' quello di moltiplicare per un fattore $-\frac{\mathcal{E}(X_2 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E}(e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}$.

In generale, applicando piu' derivate, si otterra' una somma di fattori nei quali, per ogni operazione di aspettazione troncata che agisce su un termine della forma $X_1 \dots X_p e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s}$ e che si trova a numeratore, ci sara' un fattore $\mathcal{E}(e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})$ a denominatore. Possiamo allora dire che la generalizzazione fuori equilibrio del valore di aspettazione semplice $\mathcal{E}(X_1 \dots X_p)$ e'

$$A4.8 \quad \frac{\mathcal{E}(X_1 \dots X_p e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E}(e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} \quad (A4.8)$$

dove supporremo $s > p$.

In particolare possiamo riscrivere lo sviluppo dell' aspettazione troncata in aspettative semplici come un' identita' tra valori di aspettazione fuori equilibrio. Ad esempio le generalizzazioni fuori equilibrio delle linee

(1) e (2) della (A4.3) sono:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_2} \log \mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s}) = \\
 & = \frac{\mathcal{E} (X_1 X_2 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} - \frac{\mathcal{E} (X_1 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} \frac{\mathcal{E} (X_2 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}, \\
 (2) \quad & \frac{\partial^3}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_3} \log \mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s}) = \\
 & = \frac{\mathcal{E} (X_1 X_2 X_3 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} - \frac{\mathcal{E} (X_1 X_2 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} \frac{\mathcal{E} (X_3 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} - \\
 & - \frac{\mathcal{E} (X_1 X_3 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} \frac{\mathcal{E} (X_2 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} - \\
 & - \frac{\mathcal{E} (X_2 X_3 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} \frac{\mathcal{E} (X_1 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} + \\
 & + 2 \frac{\mathcal{E} (X_1 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} \frac{\mathcal{E} (X_2 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} \frac{\mathcal{E} (X_3 e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})},
 \end{aligned} \tag{A4.9}$$

Supponiamo adesso induttivamente che la (A4.5) sia valida fino ad $s = \bar{s} - 1$. Usando la (A4.8) e le precedenti osservazioni vediamo allora che

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^{\bar{s}-1}}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_{\bar{s}-1}} \log \mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s}) = \frac{\mathcal{E} (X_1 \dots X_{\bar{s}-1} e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} - \\
 & - \sum_{p=2}^{\bar{s}-1} \sum_{Y_1, \dots, Y_p} \frac{\partial^{|Y_1|}}{\partial \lambda_{\pi_1(1)} \dots \lambda_{\pi_{|Y_1|}(1)}} \log \mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s}) \dots \frac{\partial^{|Y_p|}}{\partial \lambda_{\pi_1(p)} \dots \lambda_{\pi_{|Y_p|}(p)}} \log \mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})
 \end{aligned} \tag{A4.10}$$

Se deriviamo la (A4.10) rispetto a $\lambda_{\bar{s}}$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^{\bar{s}}}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_{\bar{s}}} \log \mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s}) = \\
 & = \frac{\mathcal{E} (X_1 \dots X_{\bar{s}} e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})} - \frac{\mathcal{E} (X_1 \dots X_{\bar{s}-1} e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s}) \mathcal{E} (X_{\bar{s}} e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})}{[\mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})]^2} - \\
 & - \sum_{p=2}^{\bar{s}-1} \sum_{Y_1, \dots, Y_p} \sum_{i=1}^p \frac{\partial^{|Y_1|}}{\partial \lambda_{\pi_1(1)} \dots \lambda_{\pi_{|Y_1|}(1)}} \log \mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s}) \dots \\
 & \dots \frac{\partial^{|Y_i|}}{\partial \lambda_{\pi_1(i)} \dots \partial \lambda_{\pi_{|Y_i|}(i)} \partial \lambda_{\bar{s}}} \log \mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s}) \dots \frac{\partial^{|Y_p|}}{\partial \lambda_{\pi_1(p)} \dots \lambda_{\pi_{|Y_p|}(p)}} \log \mathcal{E} (e^{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s})
 \end{aligned} \tag{A4.11}$$

Calcolando la (A4.11) in $\lambda = 0$ otteniamo proprio la relazione voluta:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^T(X_1, \dots, X_{\bar{s}}) & = \mathcal{E}(X_1, \dots, X_{\bar{s}}) - \mathcal{E}(X_1, \dots, X_{\bar{s}-1})\mathcal{E}(X_{\bar{s}}) - \\
 & - \sum_{p=2}^{\bar{s}-1} \sum_{Y_1, \dots, Y_p} \sum_{i=1}^p \mathcal{E}^T(X_{\pi_1(1)}, \dots, X_{\pi_{|Y_1|}(1)}) \dots \mathcal{E}^T(X_{\pi_1(i)}, \dots, X_{\pi_{|Y_i|}(i)}, X_{\bar{s}}) \dots \mathcal{E}^T(X_{\pi_1(p)}, \dots, X_{\pi_{|Y_p|}(p)})
 \end{aligned} \tag{A4.12}$$

Infatti, usando la (A4.4) (che e' equivalente alla (A4.5) ed e' valida per l' ipotesi induttiva) possiamo riscrivere il secondo addendo che compare a secondo membro nella (A4.12) come una somma di prodotti di aspettative

troncate, per ricavare, finalmente:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^T(X_1, \dots, X_{\bar{s}}) &= \mathcal{E}(X_1, \dots, X_{\bar{s}}) - \\
 &- \sum_{p=2}^{\bar{s}} \sum_{Y_1, \dots, Y_p} \mathcal{E}^T(X_{\pi_1(1)}, \dots, X_{\pi_{|Y_1|}(1)}) \dots \mathcal{E}^T(X_{\pi_1(p)}, \dots, X_{\pi_{|Y_p|}(p)})
 \end{aligned}
 \tag{A4.13}$$

Abbiamo allora dimostrato che, se la (A4.5) e' valida fino a $s = \bar{s} - 1$, allora e' valida anche per $s = \bar{s}$. Dato che la (A4.5) e' banalmente valida per $s = 1$ ($\mathcal{E}^T(X_1) = \mathcal{E}(X_1)$), la dimostrazione e' conclusa.

Adesso possiamo riassumere qui le regole per rappresentare graficamente l' aspettazione troncata $\mathcal{E}^T(\tilde{\psi}_{B_1}, \dots, \tilde{\psi}_{B_p})$ e verificarne la validita'.

Si disegnino nel piano p "contenitori" G_1, \dots, G_p . Si disegnino all' interno del contenitore G_i i punti e le linee corrispondenti al monomio $\tilde{\psi}_{B_i}$. Chiameremo cluster questi contenitori. Sia \mathcal{G}_0 l' insieme dei possibili grafici che si costruiscono contraendo a due a due le linee uscenti dai cluster, in modo tale che ogni linea + sia contratta con una linea - ed in modo che i cluster risultino connessi dalle linee del grafico. Diremo che un grafico $\Gamma \in \mathcal{G}_0$ e' un *grafico do Feynman*. Allora:

$$\mathcal{E}(\tilde{\psi}_{B_1}, \dots, \tilde{\psi}_{B_p}) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{G}_0} \prod_{(\alpha\beta) \in \Gamma} (-1)^\pi g(\alpha - \beta)
 \tag{A4.14}$$

dove gli indici α e β appartengono a $\cup_{i=1}^p B_i$ e dove si usano le stesse notazioni di sopra.

Il motivo per cui bisogna sommare solo sui grafici connessi e' molto semplice e ci se ne puo' convincere per induzione:

Se $p = 1$ i grafici da considerare sono necessariamente connessi.

Se $p = 2$, $\mathcal{E}^T(X_1, X_2) = \mathcal{E}(X_1 X_2) - \mathcal{E}(X_1)\mathcal{E}(X_2)$, ossia $\mathcal{E}^T(X_1, X_2)$ e' uguale alla somma di tutti i grafici meno quelli in cui i campi dell' insieme X_1 sono tutti contratti tra loro (e in cui anche i campi dell' insieme X_2 sono tutti contratti tra loro); in altre parole $\mathcal{E}^T(X_1, X_2)$ e' uguale alla somma di tutti i grafici connessi.

Se $p > 2$ e se tutti i valori di aspettazione $\mathcal{E}^T(X_1, \dots, X_s)$ $s < p$ sono uguali alla somma su tutti i grafici connessi, allora, usando la (A4.5) vediamo subito che anche $\mathcal{E}^T(X_1, \dots, X_p)$ e' uguale alla somma sui grafici connessi.

p.4.2 A4.2 .Sviluppo in determinanti delle aspettative troncate

In questa sezione vogliamo dimostrare la (4.60) (che in realta' e' valida a meno di un segno).

Dati s insiemi di indici P_1, \dots, P_s , si consideri l' aspettazione troncata

$$\mathcal{E}^T(\tilde{\psi}(P_1), \dots, \tilde{\psi}(P_s))
 \tag{A4.15}$$

Definiamo

$$P_j^\pm = \{f \in P_j : \sigma(f) = \pm\}
 \tag{A4.16}$$

e stabiliamo che $f = (j, i)$ per $f \in P_j^\pm$, con $i = 1, \dots, |P_j^\pm|$. Si noti che $\sum_{j=1}^s |P_j^+| = \sum_{j=1}^s |P_j^-|$, altrimenti (A4.15) e' nulla.

Notiamo adesso che, anche se i campi ψ_x^\pm sono definiti a priori nel continuo, e' possibile far si' che i campi contenuti nei monomi $\tilde{\psi}(P_1), \dots, \tilde{\psi}(P_s)$ appartengano ad un' algebra di Grassman discreta. Infatti e' sufficiente usare i campi dei monomi $\tilde{\psi}(P_1), \dots, \tilde{\psi}(P_s)$ come generatori dell' algebra. Si suppone poi che per quest' algebra discreta valgano le proprieta' di interazione descritte nel Capitolo 3.

Definiamo allora

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(d\psi) &= \prod_{j=1}^s \left(\prod_{f \in P_j^+} d\psi_{x(f)}^+ \right) \left(\prod_{f \in P_j^-} d\psi_{x(f)}^- \right) \\
 (\psi^+, \Gamma \psi^-) &= \sum_{j, j'=1}^s \sum_{i=1}^{|P_j^-|} \sum_{i'=1}^{|P_{j'}^+|} \psi_{(j', i')}^+ \Gamma_{(j, i), (j', i')} \psi_{(j, i)}^- ,
 \end{aligned} \tag{A4.17}$$

dove, se

$$n = \sum_{j=1}^s |P_j^+| = \sum_{j=1}^s |P_j^-| , \tag{A4.18}$$

allora Γ e' la matrice $n \times n$ di elementi

$$\Gamma_{(j, i), (j', i')} = g(\mathbf{x}(j, i) - \mathbf{x}(j', i')) . \tag{A4.19}$$

Vale la seguente identita', gia' discussa nel Capitolo 3:

$$\mathcal{E} \left(\prod_{j=1}^s \tilde{\psi}(P_j) \right) = \det \Gamma = \int \tilde{P}(d\psi) \exp \left[- (\psi^+, \Gamma \psi^-) \right] . \tag{A4.20}$$

Se X e' l' insieme $X \equiv \{1, \dots, s\}$ e

$$\bar{V}_{jj'} = \sum_{i=1}^{|P_j^-|} \sum_{i'=1}^{|P_{j'}^+|} \psi_{(j', i')}^+ \Gamma_{(j, i), (j', i')} \psi_{(j, i)}^- , \tag{A4.21}$$

scriviamo

$$V(X) = \sum_{j, j' \in X} \bar{V}_{jj'} = \sum_{j \leq j'} V_{jj'} , \tag{A4.22}$$

dove abbiamo definito la quantita' $V_{jj'}$ come

$$V_{jj'} = \begin{cases} \bar{V}_{jj'} , & \text{se } j = j' , \\ \bar{V}_{jj'} + \bar{V}_{j'j} , & \text{se } j < j' . \end{cases} \tag{A4.23}$$

Con queste notazioni (A4.20) puo' essere riscritta nella forma:

$$\mathcal{E} \left(\prod_{j=1}^s \tilde{\psi}(P_j) \right) = \int \tilde{P}(d\psi) e^{-V(X)} . \tag{A4.24}$$

Vogliamo esprimere (A4.22) in funzione delle grandezze W_X che andremo adesso ad introdurre. Definiamo

$$W_X(X_1, \dots, X_r; t_1, \dots, t_r) = \sum_{\ell} \prod_{k=1}^r t_k(\ell) V_{\ell} , \tag{A4.25}$$

dove

(1) X_k sono sottoinsiemi di X con $|X_k| = k$, definiti induttivamente nel modo che segue:

$$\begin{cases} X_1 = \{1\} , \\ X_{k+1} \supset X_k , \end{cases} \tag{A4.26}$$

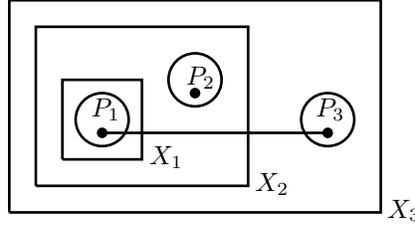


FIG. A2. Rappresentazione grafica degli insiemi X_k per $k=1,2,3$. Si ha $X_1=\{1\}$, $X_2=\{1,2\}$ and $X_3=\{1,2,3\}$. In figura e' anche riportata la linea $\ell=(1,3)$, che interseca le frontiere di X_1 e di X_2 .

- (2) $\ell = (jj')$ e' una coppia di elementi $j, j' \in X$ e la somma in (A4.25) e' su tutte le possibile coppie (jj') ,
 (3) le funzioni $t_k(\ell)$ sono definite come segue:

$$A4.27 \quad t_k(\ell) = \begin{cases} t_k, & \text{se } \ell \sim \partial X_k, \\ 1, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (A4.27)$$

dove $\ell \sim X_k$ significa che $\ell = (jj')$ "interseca la frontiera" di X_k , o in altre parole connette un punto appartenente a P_j con $j \in X_k$ ad un punto contenuto in $P_{j'}$ con $j' \notin X_k$. Vedi Fig. A2.

Dalla definizione (A4.25) segue che:

$$A4.28 \quad W_X(X_1; t_1) = \sum_{j=2}^s t_1 V_{1j} + V_{11} + \sum_{1 < j' \leq j} V_{j'j} = (1 - t_1) [V(X_1) + V(X \setminus X_1)] + t_1 V(X) \quad (A4.28)$$

in modo che

$$A4.29 \quad \begin{aligned} e^{-V(X)} &= \int_0^1 dt_1 \left[\frac{\partial}{\partial t_1} e^{-W_X(X_1; t_1)} \right] + e^{-W_X(X_1; 0)} \\ &= - \sum_{\ell_1 \sim \partial X_1} V_{\ell_1} \int_0^1 dt_1 e^{-W_X(X_1; t_1)} + e^{-W_X(X_1; 0)}. \end{aligned} \quad (A4.29)$$

Sempre dalla definizione si ha:

$$A4.30 \quad \begin{aligned} W_X(X_1, X_2; t_1, t_2) &= \\ &= V_{11} + t_1 V_{12} + t_1 t_2 \sum_{j=3}^s V_{1j} + V_{22} + t_2 \sum_{j=3}^s V_{2j} + \sum_{2 < j' \leq j} V_{j'j} = \\ &= t_1 t_2 \sum_{j=2}^s V_{1j} + t_2 V_{11} + t_2 \sum_{1 < j' \leq j} V_{j'j} + (1 - t_2) \left[V_{11} + t_1 V_{12} + V_{22} + \sum_{2 < j' \leq j} V_{j'j} \right] = \\ &= t_2 W_X(X_1; t_1) + (1 - t_2) [W_{X_2}(X_1; t_1) + V(X \setminus X_2)] \end{aligned} \quad (A4.30)$$

Se definiamo $X_2 \equiv X_1 \cup \ell_1$, ossia $X_2 = \{1, \text{punto connesso con 1 da } \ell_1\}$, allora:

$$A4.31 \quad \begin{aligned} e^{-W_X(X_1; t_1)} &= \int_0^1 dt_2 \left[\frac{\partial}{\partial t_2} e^{-W_X(X_1, X_2; t_1, t_2)} \right] + e^{-W_X(X_1, X_2; t_1, 0)} \\ &= - \sum_{\ell_2 \sim \partial X_2} V_{\ell_2} \int_0^1 dt_2 t_1(\ell_2) e^{-W_X(X_1, X_2; t_1, t_2)} + e^{-W_X(X_1, X_2; t_1, 0)}. \end{aligned} \quad (A4.31)$$

Sostituendo la (A4.31) nella (A4.29) otteniamo:

$$\begin{aligned}
 e^{-V(X)} = & \sum_{\ell_1 \sim \partial X_1} \sum_{\ell_2 \sim \partial X_2} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 (-1)^2 V_{\ell_1} V_{\ell_2} t_1(\ell_2) e^{-W_X(X_1, X_2; t_1, t_2)} \\
 & + \sum_{\ell_1 \sim \partial X_1} \int_0^1 dt_1 (-1) V_{\ell_1} e^{-W_X(X_1, X_2; t_1, 0)} + e^{-W_X(X_1; 0)} .
 \end{aligned}
 \tag{A4.32}$$

E' valida una formula che generalizza la (A4.30):

$$\begin{aligned}
 W_X(X_1, \dots, X_{p+1}; t_1, \dots, t_{p+1}) = & t_{p+1} W_X(X_1, \dots, X_p; t_1, \dots, t_p) + \\
 & (1 - t_{p+1}) [W_{X_{p+1}}(X_1, \dots, X_p; t_1, \dots, t_p) + V(X \setminus X_{p+1})]
 \end{aligned}
 \tag{A4.33}$$

dove $p < s$. Infatti nella somma che su ℓ contenuta nella definizione di W_X , vanno distinti due casi: quello in cui $\ell \sim X_{p+1}$ e quello in cui $\ell \not\sim X_{p+1}$. Nel primo caso V_ℓ e' necessariamente moltiplicato per t_{p+1} e, se $\ell = (j'j)$, $j' \leq p+1$, $j > p+1$. Nel secondo V_ℓ non e' moltiplicato per t_{p+1} e o $j', j \leq p+1$ o $j', j > p+1$. Quindi, evidentemente

$$\begin{aligned}
 W_X(X_1, \dots, X_{p+1}; t_1, \dots, t_{p+1}) = & \\
 = & t_{p+1} [W_X(X_1, \dots, X_p; t_1, \dots, t_p) - W_{X_{p+1}}(X_1, \dots, X_p; t_1, \dots, t_p) - W_{X \setminus X_{p+1}}(X_1, \dots, X_p; t_1, \dots, t_p)] + \\
 & + W_{X_{p+1}}(X_1, \dots, X_p; t_1, \dots, t_p) + W_{X \setminus X_{p+1}}(X_1, \dots, X_p; t_1, \dots, t_p)
 \end{aligned}
 \tag{A4.34}$$

che e' equivalente alla (A4.33).

Possiamo allora iterare il procedimento seguito per ottenere la (A4.29) e la (A4.32). In generale si ha:

$$\begin{aligned}
 e^{-V(X)} = & \sum_{r=0}^{s-1} \sum_{\ell_1 \sim \partial X_1} \dots \sum_{\ell_r \sim \partial X_r} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_r (-1)^r V_{\ell_1} \dots V_{\ell_r} \\
 & \left(\prod_{k=1}^{r-1} t_1(\ell_{k+1}) \dots t_k(\ell_{k+1}) \right) e^{-W_X(X_1, \dots, X_{r+1}; t_1, \dots, t_r, 0)} ,
 \end{aligned}
 \tag{A4.35}$$

dove i fattori privi di senso vanno tutti posti uguali a 1. Inoltre dalla (A4.33) si vede subito che

$$\begin{aligned}
 W_X(X_1, \dots, X_s; t_1, \dots, t_{s-1}, 0) = & W_X(X_1, \dots, X_{s-1}; t_1, \dots, t_{s-1}) \\
 W_X(X_1, \dots, X_r; t_1, \dots, t_{r-1}, 0) = & W_{X_r}(X_1, \dots, X_{r-1}; t_1, \dots, t_{r-1}) + V(X \setminus X_r)
 \end{aligned}
 \tag{A4.36}$$

L' ultima equazione e' valida per $r > 1$. Se $r = 1$ si ha

$$W_X(X_1; 0) = V(X_1) + V(X \setminus X_1)
 \tag{A4.37}$$

Sia T un grafico ad albero tra gli insiemi X_1, \dots, X_r , tale che

- (1) per ogni $k = 1, \dots, r$, e' "ancorato" a qualche punto (j, i) , ossia contiene una linea che ha come estremo un punto con indice (j, i) , dove $j \in X_k$ e $i \in \{1, \dots, |P_j^\pm|\}$,
- (2) ogni linea $\ell \in T$ interseca almeno una frontiera ∂X_k ,
- (3) le linee ℓ_1, ℓ_2, \dots sono ordinate in modo che $\ell_1 \sim \partial X_1, \ell_2 \sim \partial X_2, \dots$,
- (4) per ogni $\ell \in T$ esistono due indici $n(\ell)$ e $n'(\ell)$ definiti come segue:

$$\begin{aligned}
 n(\ell) = & \max\{k : \ell \sim \partial X_k\} , \\
 n'(\ell) = & \min\{k : \ell \sim \partial X_k\} .
 \end{aligned}
 \tag{A4.38}$$

Diremo che T e' un *albero ancorato*.

Usando le precedenti definizioni, possiamo riscrivere la (A4.35) come segue:

$$\begin{aligned}
 e^{-V(X)} &= \sum_{r=1}^s \sum_{X_r \subset X} \sum_{X_2 \dots X_{r-1}} \sum_{T \text{ su } X_r} (-1)^{r-1} \prod_{\ell \in T} V_\ell \\
 &\int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_{r-1} \left(\prod_{\ell \in T} \frac{\prod_{k=1}^{r-1} t_k(\ell)}{t_n(\ell)} \right) e^{-W_{X_r}(X_1, \dots, X_{r-1}; t_1, \dots, t_{r-1})} e^{-V(X \setminus X_r)}
 \end{aligned}
 \tag{A4.39}$$

dove “ T su X_r ” significa che T e' un albero ancorato per i cluster P_j con $j \in X_r$.

Definiamo

$$\begin{aligned}
 K(X_r) &= \sum_{X_2 \dots X_{r-1}} \sum_{T \text{ on } X_r} \prod_{\ell \in T} V_\ell \\
 &\int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_{r-1} \left(\prod_{\ell \in T} \frac{\prod_{k=1}^{r-1} t_k(\ell)}{t_n(\ell)} \right) e^{-W_{X_r}(X_1, \dots, X_{r-1}; t_1, \dots, t_{r-1})} ,
 \end{aligned}
 \tag{A4.40}$$

in modo che la (A4.39) diventi

$$e^{-V(X)} = \sum_{\substack{Y \subset X \\ Y \ni \{1\}}} (-1)^{|Y|-1} K(Y) e^{-V(X \setminus Y)} ,
 \tag{A4.41}$$

e, iterando,

$$e^{-V(X)} = \sum_{Q_1, \dots, Q_m} (-1)^{|X|} (-1)^m \prod_{q=1}^m K(Q_q) .
 \tag{A4.42}$$

Gli insiemi Q_1, \dots, Q_m nella (A4.42) sono dei sottoinsiemi disgiunti di X , tali che $\cup_{i=1}^m Q_i = X$.

Sostituendo la (A4.42) nella (A4.24) si ottiene

$$\mathcal{E} \left(\prod_{j=1}^s \tilde{\psi}(P_j) \right) = \int P(d\psi) \sum_{Q_1, \dots, Q_m} (-1)^s (-1)^m \prod_{q=1}^m K(Q_q) .
 \tag{A4.43}$$

Nella (A4.40) possiamo anche decidere di sommare prima sugli alberi T , quindi sugli insiemi X_k ,

$$\sum_{X_2 \dots X_{r-1}} \sum_{T \text{ on } X_r} = \sum_{T \text{ on } X_r} \sum_{\substack{X_2 \dots X_{r-1} \\ T \text{ fissato}}} ,
 \tag{A4.44}$$

dove “ T fissato” vuol dire che gli insiemi X_2, \dots, X_r devono essere compatibili con l' albero T .

Dalla definizione delle funzioni W_X (A4.25) possiamo anche scrivere:

$$W_{X_r}(X_1, \dots, X_{r-1}; t_1, \dots, t_{r-1}) = \sum_{\ell \in X_r} t_1(\ell) \dots t_{r-1}(\ell) V_\ell = \sum_{\ell \in X_r} t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)} V_\ell
 \tag{A4.45}$$

Inoltre, dato che

$$\frac{\prod_{k=1}^{r-1} t_r(\ell)}{t_n(\ell)} = t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)-1} ,
 \tag{A4.46}$$

possiamo riscrivere piu' convenientemente la (A4.40) nel modo che segue:

$$\begin{aligned}
 K(X_r) &= \sum_{T \text{ su } X_r} \sum_{\substack{X_2 \dots X_{r-1} \\ T \text{ fissato}}} \prod_{\ell \in T} V_\ell \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_{r-1} \\
 &\prod_{\ell \in T} (t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)-1}) e^{-\sum_{\ell \in X_r} t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)} V_\ell} .
 \end{aligned}
 \tag{A4.47}$$

Riordiniamo la misura di integrazione $\tilde{P}(\psi)$ (A4.17) nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}(d\psi) &= \prod_{j=1}^s \left(\prod_{i=1}^{|P_j^+|} d\psi_{(j,i)}^+ \right) \left(\prod_{i'=1}^{|P_j^-|} d\psi_{(j,i')}^- \right) \\
 &= (-1)^\sigma \prod_{q=1}^m \prod_{j=\pi_1(q)}^{\pi_{|Q_q|}(q)} \left(\prod_{i=1}^{|P_j^+|} d\psi_{(j,i)}^+ \right) \left(\prod_{i'=1}^{|P_j^-|} d\psi_{(j,i')}^- \right) = (-1)^\sigma \prod_{q=1}^m P_q(d\psi),
 \end{aligned} \tag{A4.48}$$

Nella (A4.48):

- (1) gli insiemi Q_1, \dots, Q_m sono tali che ogni Q_k , $k = 1, \dots, m$ e' l' unione di insiemi P_j e $\cup_{j=1}^s P_j = \cup_{q=1}^m Q_q$,
- (2) $\{\pi_1(1), \dots, \pi_{|Q_1|}(1), \pi_1(2), \dots, \dots, \pi_{|Q_m|}(m)\}$ e' una permutazione dell' insieme $\{1, \dots, s\}$ tale che $Q_i = \cup_{j=\pi_1(1)}^{\pi_{|Q_i|}(i)} P_j$,
- (3) σ e' la parita' della permutazione che manda i campi Grassmaniani dalla configurazione iniziale (membro di sinistra) a quella finale (membro di destra).

Come abbiamo gia' visto piu' sopra ((A4.4), (A4.5) e osservazioni seguenti) la formula che lega le aspettative semplici con quelle troncate e' la seguente:

$$\mathcal{E} \left(\prod_{j=1}^s \tilde{\psi}(P_j) \right) = \sum_{Q_1, \dots, Q_m} (-1)^{\sigma'} \mathcal{E}^T \left(\tilde{\psi}(P_{\pi_1(1)}), \dots, \tilde{\psi}(P_{\pi_{|Q_1|}(1)}) \right) \dots \mathcal{E}^T \left(\tilde{\psi}(P_{\pi_1(m)}), \dots, \tilde{\psi}(P_{\pi_{|Q_m|}(m)}) \right), \tag{A4.49}$$

dove

- (1) la somma e' su tutti i possibili insiemi Q_1, \dots, Q_m tali che ogni Q_k , $k = 1, \dots, m$ e' l' unione di insiemi P_j e $\cup_{j=1}^s P_j = \cup_{q=1}^m Q_q$,
- (2) $\{\pi_1(1), \dots, \pi_{|Q_1|}(1), \pi_1(2), \dots, \dots, \pi_{|Q_m|}(m)\}$ e' una permutazione dell' insieme $\{1, \dots, s\}$ tale che $Q_i = \cup_{j=\pi_1(1)}^{\pi_{|Q_i|}(i)} P_j$,
- (3) σ' e' la parita' della permutazione che manda i campi Grassmaniani dalla configurazione iniziale (membro di sinistra) a quella finale (membro di destra).

E' facile rendersi conto che, se gli insiemi Q_i della (A4.48) sono gli stessi di quelli nella (A4.49), le due parita' σ e σ' sono uguali.

Quindi, confrontando la (A4.49) con la (A4.43) (tenendo anche conto della (A4.48) e della (A4.47)), si trova:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^T \left(\tilde{\psi}(P_{\pi_1(i)}), \dots, \tilde{\psi}(P_{\pi_{|Q_i|}(i)}) \right) &= (-1)^{|Q_i|+1} \int P_i(d\psi) \sum_{T \text{ su } Q_i} \sum_{\substack{x_2 \dots x_{|Q_i|-1} \\ T \text{ fissato}}} \prod_{\ell \in T} V_\ell \\
 &\int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_{|Q_i|-1} \prod_{\ell \in T} (t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)-1}) e^{-\sum_{\ell \in X_r} t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)} V_\ell}
 \end{aligned} \tag{A4.50}$$

oppure, equivalentemente

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^T \left(\tilde{\psi}(P_1), \dots, \tilde{\psi}(P_s) \right) &= (-1)^{s+1} \int \tilde{P}(d\psi) \sum_{T \text{ su } X} \sum_{\substack{x_2 \dots x_{s-1} \\ T \text{ fissato}}} \prod_{\ell \in T} V_\ell \\
 &\int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_{s-1} \prod_{\ell \in T} (t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)-1}) e^{-\sum_{\ell \in X_r} t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)} V_\ell}
 \end{aligned} \tag{A4.51}$$

L' integrale in (A4.51) ha una notevole proprieta', come chiarito dal seguente Lemma.

LEMMA A4.1. Nella (A4.51) si ha

$$A4.50 \quad \sum_{\substack{x_2 \dots x_{s-1} \\ T \text{ fissato}}} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_{s-1} \prod_{\ell \in T} (t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)-1}) = 1, \quad (A4.52)$$

per ogni albero ancorato T . In piu', la misura di integrazione

$$A4.51 \quad dP_T(\mathbf{t}) \equiv \sum_{\substack{x_2 \dots x_{s-1} \\ T \text{ fissato}}} \prod_{\ell \in T} (t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)-1}) \prod_{q=1}^{s-1} dt_q \quad (A4.53)$$

e' positiva, e puo' quindi essere interpretata come una misura di probabilita' nella variabile $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{s-1})$.

Dimostrazione. Denotiamo con b_k il numero di linee $\ell \in T$ che escono dai punti $x(j, i)$, con $j \in X_k$, e tali che $\ell \sim X_k$. Per costruzione, il parametro t_k nell' integrale che appare nel membro di sinistra della (A4.52) e' elevato alla potenza $b_k - 1$. Infatti ogni linea che interseca ∂X_k contribuisce con un fattore t_k , tranne quella che connette X_k con il punto la cui unione con X_k da' X_{k+1} . Vedi ad esempio la figura Fig. A3.

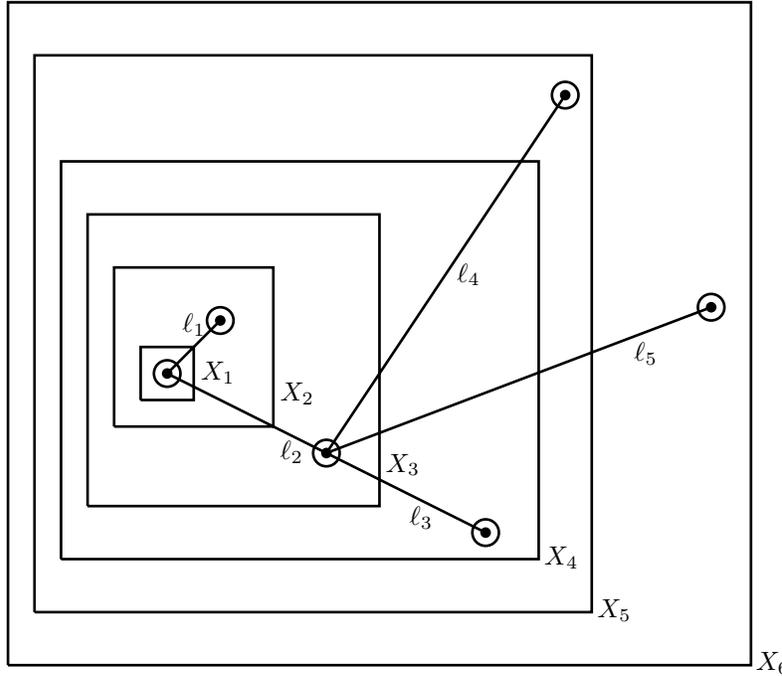


FIG. A3. Gli insiemi X_1, \dots, X_6 , l' albero ancorato T e le linee ℓ_1, \dots, ℓ_5 appartenenti a T . I coefficienti b_1, \dots, b_5 in questo caso sono uguali rispettivamente a: 2,1,3,2,1.

Allora

$$A4.51a \quad \prod_{\ell \in T} (t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)-1}) = \prod_{k=1}^{s-1} t_k^{b_k-1}, \quad (A4.54)$$

e nella (A4.52) le $s - 1$ integrazioni sono indipendenti. In effetti si ha:

$$A4.51b \quad \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_{s-1} \prod_{\ell \in T} (t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)-1}) = \prod_{k=1}^{s-1} \left(\int_0^1 dt_k t_k^{b_k-1} \right) = \prod_{k=1}^{s-1} \frac{1}{b_k}, \quad (A4.55)$$

che e' un' espressione ben definita, visto che $b_k \geq 1$ per $k = 1, \dots, m-2$. Inoltre possiamo scrivere:

$$A4.51c \quad \sum_{\substack{X_2 \dots X_{s-1} \\ T \text{ fissato}}} = \sum_{\substack{X_2 \\ T, X_1 \text{ fissati}}} \sum_{\substack{X_3 \\ T, X_1, X_2 \text{ fissati}}} \dots \sum_{\substack{X_{s-1} \\ T, X_1, \dots, X_{s-2} \text{ fissati}}} , \quad (A4.56)$$

dove il numero di possibili scelte nella somma su X_k , una volta che e' fissato l' albero T e sono fissati gli insiemi X_1, \dots, X_{k-1} , e' esattamente b_{k-1} . Infatti se da X_{k-1} escono b_{k-1} linee allora X_k si ottiene aggiungendo a X_{k-1} uno dei b_{k-1} punti connessi a X_{k-1} dalle linee dell' albero. Quindi

$$A3.41d \quad \sum_{\substack{X_2 \dots X_{s-1} \\ T \text{ fissato}}} 1 = b_1 \dots b_{s-2} , \quad (A4.57)$$

e allora, tenuto conto che b_{s-1} e' necessariamente uguale a 1,

$$A4.51e \quad \sum_{\substack{X_2 \dots X_{s-1} \\ T \text{ fissato}}} \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 dt_{s-1} \prod_{\ell \in T} (t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)-1}) = \prod_{k=1}^{s-2} \frac{b_k}{b_k} , \quad (A4.58)$$

che dimostra la (A4.52). ■

Definiamo adesso

$$A4.52 \quad V(\mathbf{t}) \equiv \sum_{\ell \in X} t_{n'(\ell)} \dots t_{n(\ell)} V_\ell \quad (A4.59)$$

Usando le definizioni (A4.21), (A4.23), (A4.53), (A4.59) possiamo riscrivere la (A4.51) nella forma:

$$A4.53 \quad \mathcal{E}^T \left(\tilde{\psi}(P_1), \dots, \tilde{\psi}(P_s) \right) = (-1)^{s+1} \int \tilde{P}(d\psi) \sum_{T \text{ su } X} \prod_{(jj') \in T} \left(\sum_{i=1}^{|P_j^-|} \sum_{i'=1}^{|P_{j'}^+|} \psi_{(j,i)}^+ \Gamma_{(j,i),(j',i')} \psi_{(j',i')}^- \right) + \left(\sum_{i=1}^{|P_j^+|} \sum_{i'=1}^{|P_{j'}^-|} \psi_{(j,i)}^- \Gamma_{(j',i'),(j,i)} \psi_{(j',i')}^+ \right) \int dP_T(\mathbf{t}) e^{-V(\mathbf{t})} \quad (A4.60)$$

Se integriamo i campi Grassmaniani che compaiono nel prodotto

$$A4.56 \quad \prod_{(jj') \in T} (\bar{V}_{jj'} + \bar{V}_{jj'}) \quad (A4.61)$$

in (A4.60), otteniamo

$$A4.57 \quad \mathcal{E}^T \left(\tilde{\psi}(P_1), \dots, \tilde{\psi}(P_s) \right) = (-1)^{s+1} \sum_{T \text{ su } \{x_i^{(q)}\}} \prod_{\ell \in T} g_\ell \int \tilde{P}^*(d\psi) \int dP_T(\mathbf{t}) e^{-V(\mathbf{t})} , \quad (A4.62)$$

dove T su $\{x_i^{(q)}\}$ indica gli alberi ancorati ai punti $\{x_i^{(q)}\}$, $q = 1, \dots, s$, $i = 1, \dots, |P_q|$ e la somma e' sulla scelta delle successioni $\{x_i^{(q)}\}$. Inoltre l' asterisco sulla misura di integrazione indica che vanno integrati solo i campi Grassmaniani che non hanno indici che appartengono alla successione $\{x_i^{(q)}\}$.

Il termine

$$A4.58 \quad \int \tilde{P}^*(d\psi) \int dP_T(\mathbf{t}) e^{-V(\mathbf{t})} \quad (A4.63)$$

in (A4.62) e' il determinante di una matrice $(n - s + 1) \times (n - s + 1)$ $G^T(\mathbf{t})$ di elementi

$$A4.59 \quad G_{(j,i)(j',i')}^T = t_{n'(jj')} \dots t_{n(jj')} g(\mathbf{x}(j, i) - \mathbf{x}(j', i')) . \quad (A4.64)$$

Così e' provata la (4.60), con $t_{j,j'} = t_{n'(jj')} \dots t_{n(jj')}$.

Per completare la verifica delle affermazioni seguenti la (4.60) rimane da mostrare che esiste una famiglia di versori di $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^s$ tale che $t_{j,j'} = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_{j'}$.

Introduciamo all' uopo una famiglia di vettori di \mathbb{R}^s definita induttivamente come segue:

$$A4.60 \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 , \\ \mathbf{u}_j = t_{j-1} \mathbf{u}_{j-1} + \mathbf{v}_j \sqrt{1 - t_{j-1}^2} , \quad j = 2, \dots, s , \end{cases} \quad (A4.65)$$

dove $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^s$ e' una base ortonormale. Se supponiamo di rinominare gli insiemi P_i , $i = 1, \dots, s$ in modo che $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{1, 2\}$, \dots , $X_{s-1} = \{1, \dots, s-1\}$ allora, per una data linea (jj') , si ha:

$$A4.61 \quad t_{j,j'} = t_{n'(jj')} \dots t_{n(jj')} = t_j \dots t_{j'-1} \quad (A4.66)$$

Dalla definizione (A4.65) segue che

$$A4.62 \quad \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_{j'} = t_j \dots t_{j'-1} \quad (A4.67)$$

che e' la relazione voluta.

Questo completa la dimostrazione della (4.60).

L' interesse della formula (4.60) risiede nel fatto che permette di stimare in modo ottimale le aspettative troncate. La discussione sulle stime dei determinanti e delle aspettative troncate e' riportata in Appendice A5.

app.5 **Appendice A5. Stime sui determinanti e sulle aspettative troncate.**

p. A5.1 **A5.1. Stime sulle aspettative troncate**

In questa sezione vogliamo ottenere una stima sui termini che compaiono nello sviluppo per le aspettative troncate (4.60).

Valgono i seguenti risultati.

LEMMA A5.1. *Siano assegnati s insiemi di indici P_1, \dots, P_s tali che*

$$A5.1 \quad \{x(f) : f \in P_q\} = \{x_1^{(q)}, \dots, x_{|P_q|}^{(q)}\}, \quad q = 1, \dots, s. \quad (A5.1)$$

Siano poi

$$A5.1a \quad P_q^\pm = \{f \in P_q : \sigma(f) = \pm\} \quad q = 1, \dots, s \quad (A5.2)$$

e supponiamo che

$$A5.1b \quad \begin{aligned} P_q &= P_q^+ \cup P_q^- \quad q = 1, \dots, s \\ \sum_{q=1}^s |P_q^+| &= \sum_{q=1}^s |P_q^-| = n \end{aligned} \quad (A5.3)$$

Allora il numero di alberi T che connettono i cluster P_1, \dots, P_s e che sono ancorati a dei punti $\{x_i^{(q)}\}$, $q = 1, \dots, s$, $i = 1, \dots, |P_q|$ e' stimato da

$$A5.2 \quad \sum_{T \text{ su } \{x_i^{(q)}\}} 1 \leq s! C^n, \quad (A5.4)$$

per qualche costante C .

Dimostrazione. Riscriviamo la somma in (A5.4) nel modo seguente:

$$A5.3 \quad \sum_{T \text{ su } \{x_i^{(q)}\}} 1 = \sum_{\{d_q\}} \sum_{\substack{T \text{ su } \{1, \dots, s\} \\ \{d_q\} \text{ fissati}}} \sum_{\substack{T \text{ su } \{x_i^{(q)}\} \\ T \text{ su } \{1, \dots, s\} \text{ fissato} \\ \{d_q\} \text{ fissati}}} 1 \quad (A5.5)$$

dove:

(1) la somma $\sum_{\{d_q\}}$ e' la somma su tutte la configurazioni $\{d_q\}$, dove d_q denota il numero di linee che escono dal cluster P_q che appartengono all' albero T ; delle d_q linee d_q^+ saranno di segno + e d_q^- di segno -; chiaramente $d_q < |P_q|$,

(2) la somma $\sum_{\substack{T \text{ su } \{1, \dots, s\} \\ \{d_q\} \text{ fissati}}}$ e' la somma sugli alberi T che connettono s punti distinti, in modo tale che dal punto q -esimo emergano d_q linee di T , d_q^- entranti e d_q^+ uscenti

(3) la somma

$$\sum_{\substack{T \text{ su } \{x_i^{(q)}\} \\ T \text{ su } \{1, \dots, s\} \text{ fissato} \\ \{d_q\} \text{ fissati}}}$$

e' la somma sui modi di scegliere dall' insieme delle $|P_q|$ linee uscenti da ogni cluster P_q , d_q linee.

Stimiamo indipendentemente le tre somme.

La terza somma da' semplicemente:

$$A5.4 \quad \sum_{\substack{T \text{ su } \{x_i^{(q)}\} \\ T \text{ su } \{1, \dots, s\} \text{ fissato} \\ \{d_q\} \text{ fissati}}} 1 = \prod_{q=1}^s \frac{|P_q|!}{(|P_q| - d_q)!} \quad (A5.6)$$

La seconda somma deve essere eseguita con il vincolo che le linee + devono essere contratte con le linee -. Se ci dimentichiamo di questo vincolo maggioriamo il risultato della somma ed otteniamo:

$$A5.5 \quad \sum_{\substack{T \text{ su } \{1, \dots, s\} \\ \{d_q\} \text{ fissati}}} 1 \leq N_s(d_1, \dots, d_s) \quad (A5.7)$$

Il secondo membro della (A5.7) e' il numero di modi di connettere con un albero T s punti distinti, in modo tale che dal punto q -esimo emergano d_q linee di T . Vogliamo dimostrare per induzione che

$$A5.5a \quad N_s(d_1, \dots, d_s) = \frac{(s-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_s-1)!} \quad (A5.8)$$

Per $s = 2$ la (A5.8) e' vera, poiche' in questo caso c' e' un solo albero possibile e $\frac{(s-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!} = 1$ (poiche' necessariamente si ha $d_1 = d_2 = 1$).

Supponiamo poi che l' affermazione sia vera fino a $s - 1$ e dimostriamola per s . Siano assegnati s punti numerati e i numeri d_1, \dots, d_s . Affinche' le assegnazioni d_1, \dots, d_s siano compatibili con qualche albero T deve valere la seguente uguaglianza:

$$A5.6 \quad \sum_{i=1}^s d_i = 2(s-1) \quad (A5.9)$$

che implica

$$A5.6a \quad \sum_{i=1}^s (d_i - 1) = s - 2 \quad (A5.10)$$

Inoltre almeno uno dei punti ha $d_i = 1$; possiamo ad esempio supporre, in modo non restrittivo, che $d_1 = 1$. Per costruire l' albero di grado s possiamo costruire tutti i possibili alberi di grado $s - 1$ tra i punti $2, \dots, s$ facendo pero' in modo che alla fine della costruzione avanzi una linea da poter contrarre con la linea che esce dal punto 1. Per l' ipotesi induttiva allora si ha:

$$A5.7 \quad \begin{aligned} N_s(d_1, \dots, d_s) &= \sum_{\substack{i=2 \\ d_i > 1}}^s N_{s-1}(d_1, \dots, d_i - 1, \dots, d_s) = \\ &= \sum_{\substack{i=2 \\ d_i > 1}}^s \frac{(s-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_i-2)! \dots (d_s-1)!} \end{aligned} \quad (A5.11)$$

Ma, poiche' vale la (A5.10), possiamo riscrivere l' ultimo membro della (A5.11) nella seguente forma:

$$A5.8 \quad \begin{aligned} (A5.11) &= \sum_{\substack{i=2 \\ d_i > 1}}^s \frac{(s-3)!}{(d_1-1)! \dots (d_i-1)! \dots (d_s-1)!} (d_i-1) = \\ &= \frac{(s-2)!}{(d_1-1)! \dots (d_i-1)! \dots (d_s-1)!} \end{aligned} \quad (A5.12)$$

che e' la relazione voluta.

La prima somma e' la somma sulle scelte delle configurazioni $\{d_q\}$. Ogni configurazione $\{d_q\}$ ha due vincoli: che $\sum_{i=1}^s d_q = 2(s-1)$ e che $1 \leq d_q \leq \sigma - 1$. Il numero di modi di scegliere le configurazioni e' allora uguale al numero di modi di dividere un segmento di lunghezza $2(s-1)$ in s segmenti di lunghezza intera ≥ 1 . Per far questo e' sufficiente scegliere $s-1$ tra i $2s-3$ punti del segmento che hanno coordinate intere. Questo puo' essere fatto in $\binom{2s-3}{s-1}$ modi e quindi

$$A5.9 \quad \sum_{\{d_q\}} 1 \leq 2^{2s} \quad (A5.13)$$

Mettendo insieme le tre stime otteniamo:

$$A5.10 \quad \sum_{T \text{ su } \{x_i^{(q)}\}} 1 \leq 2^{2s} (s-2)! \prod_{q=1}^s \frac{|P_q|!}{(|P_q| - d_q)!(d_q - 1)!} \quad (A5.14)$$

Tenendo conto che $[(d_q - 1)!]^{-1} \leq [d_q!]^{-1} 2^{d_q}$, $\prod_{q=1}^s 2^{d_q} = 2^{2(s-1)} \leq 4^s$ e $\prod_{q=1}^s \binom{|P_q|}{d_q} \leq \prod_{q=1}^s 2^{|P_q|} = 2^{2n}$ si trova subito

$$A5.11 \quad \sum_{T \text{ su } \{x_i^{(q)}\}} 1 \leq (s-2)! 2^{4s+2n} \quad (A5.15)$$

che e' il risultato voluto. ■

LEMMA A5.2. *Si supponga che in (4.62), (A4.64) il propagatore $g(x-y)$ possa scriversi come prodotto scalare tra due vettori $A(x)$ e $B(x)$:*

$$A5.13 \quad g(x-y) = (A(x-\cdot), B(y-\cdot)) \equiv \int dz \bar{A}(x-z) B(z-y) \quad (A5.16)$$

Supponiamo poi che le norme dei vettori $A(x)$ e $B(x)$ soddisfino alle stime:

$$A5.13a \quad \|A(x-\cdot)\| \leq C^a \quad \|B(x-\cdot)\| \leq C^b \quad a+b=1 \quad (A5.17)$$

per qualche costante C . Allora il termine (A4.63) e' stimato da

$$A5.12 \quad \left| \int \bar{P}^*(d\psi) \int P_T(d\mathbf{t}) e^{-V(\mathbf{t})} \right| \equiv |\det G^T| \leq (C)^{n-s+1} . \quad (A5.18)$$

Dimostrazione. Per quanto discusso alla fine dell' Appendice A4, e per le ipotesi di questo lemma possiamo riscrivere gli elementi di matrice di G^T (A4.64) nel seguente modo:

$$A5.14 \quad t_{n'(jj')} \dots t_{n(jj')} g(\mathbf{x}(j,i) - \mathbf{x}(j',i')) = (\mathbf{u}_j \otimes A(\mathbf{x}(j,i) - \cdot), \mathbf{u}_{j'} \otimes B(\mathbf{x}(j',i') - \cdot)) \equiv (\mathbf{f}_\alpha, \mathbf{g}_\beta) , \quad (A5.19)$$

dove i vettori \mathbf{u}_j sono definiti in (A4.65), e i vettori $\mathbf{f}_\alpha, \mathbf{g}_\beta$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n-s+1$ sono definiti implicitamente dalla (A5.19).

La ragione per cui si vogliono riscrivere gli elementi di matrice (A4.64) nella forma (A5.19) e' che cosi' possiamo applicare la disuguaglianza di Gram-Hadamard, in modo da stimare il determinante della matrice di elementi

$$A5.15 \quad M_{\alpha,\beta} = (\mathbf{f}_\alpha, \mathbf{g}_\beta) \quad (A5.20)$$

con

$$A5.16 \quad |\det M| \leq \prod_{\alpha=1}^{n-s+1} \|\mathbf{f}_\alpha\| \|\mathbf{g}_\alpha\| . \quad (A5.21)$$

La dimostrazione della disuguaglianza di Gram-Hadamard e' riportata nel prossimo paragrafo.

Usando la (A5.21) e le ipotesi del Lemma, segue subito il risultato (A5.18).■

Perche' il Lemma precedente sia interessante dobbiamo controllare che, per il propagatore che stiamo studiando in questo lavoro, sia possibile trovare due vettori $A(x)$ e $B(x)$ con le proprieta' descritte nelle ipotesi del Lemma A5.2. Il propagatore a cui siamo interessati e' della forma

$$A5.17 \quad g_\omega^{(h)}(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \frac{f^{(h)}\chi_\omega^{(h)}}{-ik_0 + e_\omega(\mathbf{k})} \quad (A5.22)$$

Quindi possiamo scegliere

$$A5.18 \quad \begin{aligned} A(x) &= \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \frac{\sqrt{f^{(h)}\chi_\omega^{(h)}}}{k_0^2 + e_\omega^2(\mathbf{k})} \\ B(x) &= \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \sqrt{f^{(h)}\chi_\omega^{(h)}} (ik_0 + e_\omega(\mathbf{k})) \end{aligned} \quad (A5.23)$$

Per $(A(x - \cdot), A(y - \cdot))$ e $(B(x - \cdot), B(y - \cdot))$ si possono ottenere delle stime analoghe a quelle ottenute per il propagatore $g_\omega^{(h)}$ nell' Appendice A2, usando esattamente lo stesso procedimento.

Poiche' le stime dell' Appendice A2 erano puramente dimensionali, se si stima, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, il propagatore $g_\omega^{(h)}$ con il prodotto delle norme di A e di B ($|g_\omega^{(h)}(x - y)| \leq \|A(x - \cdot)\| \|B(y - \cdot)\| \leq C^{a+b}$) si ottiene una stima C che ha ancora le giuste dimensioni; ossia C contiene un fattore $\gamma^{\delta h}$, con la dimensione δ che e' la stessa fornita dal Lemma dimostrato in Appendice A2 ($\delta = 1 + \alpha$, vedi (A2.4)). Per maggiori dettagli si puo' vedere la stima (6.7) nel Capitolo 6.

p.A5.2 **A5.2. Disuguaglianza di Gram-Hadamard**

Siano $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ m vettori di uno spazio euclideo E di dimensione finita n . Definiamo il *determinante di Gram* nel modo seguente:

$$A5.19 \quad \Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \equiv \det \Gamma = \det \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \dots & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1) & \dots & (\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m) \end{pmatrix} , \quad (A5.24)$$

dove (\cdot, \cdot) indica il prodotto scalare in E .

Valgono i seguenti risultati.

LEMMA A5.3. *Dato uno spazio euclideo E ed m vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ in E , il determinante di Gram (A5.24) soddisfa l' identita'*

$$A5.20 \quad \Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = 0 , \quad (A5.25)$$

se e solo se i vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ sono linearmente dipendenti. Se i vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ sono linearmente indipendenti allora si ha

$$A5.21 \quad \Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) > 0 . \quad (A5.26)$$

Dimostrazione. Se i vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ sono linearmente dipendenti, allora esistono m coefficienti c_1, \dots, c_m non tutti nulli, tali che il vettore $\sum_{j=1}^m c_j \mathbf{x}_j$ sia nullo. Considerando il suo prodotto scalare con i vettori

$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ troviamo il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \bar{c}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) &+ \dots + \bar{c}_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m) &= &0 \\ \dots &\dots &&\dots \\ \bar{c}_1(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1) &+ \dots + \bar{c}_m(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m) &= &0 \end{aligned} \quad (\text{A5.27})$$

che e' un sistema omogeneo che ammette una soluzione non banale $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m$: quindi il determinante della matrice dei coefficienti deve essere zero, e la (A5.25) segue subito.

Viceversa se vale la (A5.25) il sistema (A5.27) ammette una soluzione non banale $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m$. Se moltiplichiamo le m equazioni che definiscono il sistema rispettivamente per c_1, \dots, c_m e poi le sommiamo tra loro, otteniamo:

$$\|c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_m\mathbf{x}_m\| = 0, \quad (\text{A5.28})$$

dove $\|\cdot\|$ e' la norma indotta dal prodotto scalare (\cdot, \cdot) . Quindi il vettore $c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_m\mathbf{x}_m$ deve essere nullo e, dato che i coefficienti c_1, \dots, c_m non sono tutti nulli, gli m vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ devono essere linearmente dipendenti.

Per provare la (A5.26) consideriamo un sottoinsieme $S \subset E$ e scriviamo, per ogni $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_S + \mathbf{x}_N$, dove $\mathbf{x}_S \in S$ e \mathbf{x}_N appartiene al complemento ortogonale di S . Possiamo scrivere $\mathbf{x}_N = c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_p\mathbf{x}_p$, dove $p < m$ e $p = n - \dim(S)$ (infatti adesso stiamo supponendo che i vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ siano linearmente indipendenti). Il vettore

$$\det \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \dots & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_p) & \mathbf{x}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_1) & \dots & (\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_p) & \mathbf{x}_p \\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) & \dots & (\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) & \mathbf{x}_N \end{pmatrix} \quad (\text{A5.29})$$

e' identicamente nullo, poiche' le righe della matrice sono linearmente dipendenti. In particolare allora:

$$\mathbf{x}_N = -\frac{1}{\det \Gamma} \det \begin{pmatrix} & & & \mathbf{x}_1 \\ & \Gamma & & \dots \\ & & & \mathbf{x}_p \\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) & \dots & (\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A5.30})$$

e, analogamente,

$$\mathbf{x}_S \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_N = \frac{1}{\det \Gamma} \det \begin{pmatrix} & & & \mathbf{x}_1 \\ & \Gamma & & \dots \\ & & & \mathbf{x}_p \\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) & \dots & (\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) & \mathbf{x} \end{pmatrix}. \quad (\text{A5.31})$$

In questo modo

$$0 \leq h^2 \equiv (\mathbf{x}_S, \mathbf{x}) = \frac{1}{\det \Gamma} \det \begin{pmatrix} & & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \\ & \Gamma & \dots \\ & & (\mathbf{x}_p, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) & \dots & (\mathbf{x}, \mathbf{x}_p) & (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, \mathbf{x})}{\Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)}. \quad (\text{A5.32})$$

Chiamando $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_{p+1}$ e $h^2 h_p^2$ possiamo riscrivere la (A5.32) nella forma:

$$\frac{\Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{p+1})}{\Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)} = h_p^2 \geq 0, \quad (\text{A5.33})$$

dove $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ sono p vettori linearmente indipendenti e \mathbf{x}_{p+1} e' arbitrario. Il segno uguale in (A5.33) puo' valere se e solo se \mathbf{x}_{p+1} e' una combinazione lineare dei vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$; quindi se scegliamo che $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+1}$ siano linearmente indipendenti la (A5.33) vale con lo strettamente maggiore, ossia:

$$\frac{\Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_{p+1})}{\Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)} = h_p^2 > 0. \quad (\text{A5.34})$$

Poiche' $\Gamma(\mathbf{x}_1) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = \|\mathbf{x}_1\|^2 > 0$ per $\mathbf{x}_1 \neq 0$, (A5.34) implica (A5.26). ■

LEMMA A5.4 (DISUGUAGLIANZA DI HADAMARD). *Il determinante di Gram soddisfa alla disuguaglianza:*

$$A5.30 \quad \Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \leq \Gamma(\mathbf{x}_1) \dots \Gamma(\mathbf{x}_m), \quad (A5.35)$$

dove il segno uguale vale se e solo se i vettori sono tutti ortogonali tra loro.

Dimostrazione. Dalla (A5.34) e usando che $(\mathbf{x}_S, \mathbf{x}_S) \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \Gamma(\mathbf{x})$ otteniamo:

$$A5.31 \quad \Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}) \leq \Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \Gamma(\mathbf{x}), \quad (A5.36)$$

per una qualsiasi $(m+1)$ -pla di vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x} \in E$. Il segno di uguale vale solo se \mathbf{x} appartiene al complemento ortogonale allo spazio generato dai vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$. Iterando la (A5.36) si ottiene la (A5.35). ■

Siano $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ m vettori di E linearmente indipendenti, con $m = n$, $n = \dim(E)$. Sia $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ una base ortonormale su E e definiamo $x_{jk} = (\mathbf{e}_j, \mathbf{x}_k)$, in modo che $\mathbf{x}_k = \sum_{j=1}^m x_{jk} \mathbf{e}_j$, $k = 1, \dots, m$. Allora

$$A5.31a \quad \begin{aligned} \Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) &= \det \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \dots & (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1) & \dots & (\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \sum_{i_1 j_1} \bar{x}_{i_1 1} x_{j_1 1} (\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{j_1}) & \dots & \sum_{i_1 j_m} \bar{x}_{i_1 1} x_{j_m m} (\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{j_m}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i_m j_1} \bar{x}_{i_m m} x_{j_1 1} (\mathbf{e}_{i_m}, \mathbf{e}_{j_1}) & \dots & \sum_{i_m j_m} \bar{x}_{i_m m} x_{j_m m} (\mathbf{e}_{i_m}, \mathbf{e}_{j_m}) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \sum_{i_1} \bar{x}_{i_1 1} x_{i_1 1} & \dots & \sum_{i_1} \bar{x}_{i_1 1} x_{i_1 m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i_m} \bar{x}_{i_m m} x_{i_m 1} & \dots & \sum_{i_m} \bar{x}_{i_m m} x_{i_m m} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \bar{x}_{11} & \dots & \bar{x}_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_{1m} & \dots & \bar{x}_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mm} \end{pmatrix} \\ &= \det \bar{X}^T \det X = |\det X|^2, \end{aligned} \quad (A5.37)$$

dove la matrice X e' definita nel modo seguente:

$$A5.32 \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mm} \end{pmatrix}. \quad (A5.38)$$

Questo mostra immediatamente che il determinante di Gram puo' essere scritto nella forma

$$A5.33 \quad \Gamma(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = |\det X|^2. \quad (A5.39)$$

Da questa riscrittura segue il seguente Lemma.

LEMMA A5.5 *Dati m vettori linearmente indipendenti in uno spazio euclideo E , e definita la matrice X come in (A5.36) (A5.38), si ha*

$$A5.34 \quad |\det X|^2 \equiv |\det(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_j)|^2 \leq \prod_{j=1}^m \|\mathbf{x}_j\|^2, \quad (A5.40)$$

dove $(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_j)$ indica la matrice di elementi $X_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_j)$.

Il Lemma A5.5 e' semplicemente una riformulazione del Lemma A5.4 ed implica la seguente disuguaglianza.

TEOREMA A5.1 (DISUGUAGLIANZA DI GRAM-HADAMARD) *Siano $\{\mathbf{f}_j\}_{j=1}^m$ e $\{\mathbf{g}_j\}_{j=1}^m$ due famiglie di m vettori linearmente indipendenti in uno spazio euclideo E , e sia (\cdot, \cdot) un prodotto scalare in E e $\|\cdot\|$ la norma indotta dal prodotto scalare. Allora*

$$|\det(\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j)| \leq \prod_{j=1}^m \|\mathbf{f}_j\| \|\mathbf{g}_j\|, \quad (\text{A5.41})$$

dove $(\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j)$ indica la matrice $m \times m$ di elementi $(\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j)$.

Dimostrazione. Se $\{\mathbf{g}_j\}_{j=1}^m$ e' una base ortogonale E (in modo che $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^m$, con $\mathbf{e}_j = \|\mathbf{g}_j\|^{-1}\mathbf{g}_j$, sia una base ortonormale) allora (A5.40) da'

$$|\det(\mathbf{g}_i, \mathbf{x}_j)| = |\det(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_j)| \prod_{j=1}^m \|\mathbf{g}_j\| \leq \prod_{j=1}^m \|\mathbf{g}_j\| \|\mathbf{x}_j\|, \quad (\text{A5.42})$$

come voluto.

Consideriamo adesso il caso in cui i vettori $\{\mathbf{g}_j\}_{j=1}^m$ sono "solo" linearmente indipendenti. Sia $\tilde{\mathbf{g}}_j = \|\mathbf{g}_j\|^{-1}\mathbf{g}_j$, in modo che $\|\tilde{\mathbf{g}}_j\|^2 = 1$, e definiamo induttivamente la famiglia di vettori:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_1 &\equiv \tilde{\mathbf{g}}_1, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &\equiv \frac{\tilde{\mathbf{g}}_2 - (\tilde{\mathbf{g}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)\tilde{\mathbf{e}}_1}{1 - (\tilde{\mathbf{g}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)^2}, \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 &\equiv \frac{\tilde{\mathbf{g}}_3 - (\tilde{\mathbf{g}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)\tilde{\mathbf{e}}_1 - (\tilde{\mathbf{g}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2)\tilde{\mathbf{e}}_2}{1 - (\tilde{\mathbf{g}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_1)^2 - (\tilde{\mathbf{g}}_3, \tilde{\mathbf{e}}_2)^2}, \end{aligned} \quad (\text{A5.43})$$

e cosi' via, in modo che si abbia $(\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j) = \delta_{i,j}$. La base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$, con $\mathbf{e}_j = \tilde{\mathbf{e}}_j \forall j = 1, \dots, m$ e' per costruzione una base ortonormale.

Se $c_2 = 1 - (\tilde{\mathbf{g}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)^2$, con $0 \leq c_2 \leq 1$, si ha

$$\tilde{\mathbf{g}}_2 = c_2\tilde{\mathbf{e}}_2 + c_2(\tilde{\mathbf{g}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_1)\tilde{\mathbf{e}}_1. \quad (\text{A5.44})$$

Ai fini del calcolo di $\det(\tilde{\mathbf{g}}_i, \mathbf{f}_j)$, $\tilde{\mathbf{g}}_2 \sim c_2\tilde{\mathbf{e}}_2$, ossia non c' e' nessuna differenza se al posto del vettore $\tilde{\mathbf{g}}_2$ prendiamo il vettore $c_2\tilde{\mathbf{e}}_2$: infatti il contributo dovuto a $\tilde{\mathbf{g}}_2 - c_2\tilde{\mathbf{e}}_2$ e' nullo, poiche' corrisponde ad un determinante con due righe proporzionali.

Ragionando in modo analogo per i termini con $j = 3, \dots, m$ si trova che $\tilde{\mathbf{g}}_j \sim c_j\tilde{\mathbf{e}}_j$, dove \sim ha lo stesso significato spiegato sopra, $c_j = 1 - (\tilde{\mathbf{g}}_j, \tilde{\mathbf{e}}_1)^2 - \dots - (\tilde{\mathbf{g}}_j, \tilde{\mathbf{e}}_{j-1})^2$ e $0 \leq c_j \leq 1$.

In conclusione:

$$\begin{aligned} |\det(\mathbf{g}_i, \mathbf{f}_j)| &= |\det(\tilde{\mathbf{g}}_i, \mathbf{f}_j)| \prod_{j=1}^m \|\mathbf{g}_j\| = |\det(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)| \prod_{j=1}^m c_j \|\mathbf{g}_j\| \\ &= \prod_{j=1}^m c_j \|\mathbf{g}_j\| \|\mathbf{f}_j\| \leq \prod_{j=1}^m \|\mathbf{g}_j\| \|\mathbf{f}_j\|, \end{aligned} \quad (\text{A5.45})$$

che e' equivalente alla (A5.41).■

app.6

Appendice A6. Alcuni risultati tecnici.

Raccogliamo in questa appendice alcuni risultati tecnici.

LEMMA A6.1 *Il numero di grafici di Feynman a s vertici con numeri di coordinazione $\{|P_q|\}$, $q = 1, \dots, s$ fissati (ossia con il numero di linee uscenti da ogni punto fissato) e' stimato, per qualche costante C , da*

$$A6.1 \quad C^n n! \tag{A6.1}$$

dove n e' il numero di linee del grafico (ossia $\sum_{q=1}^s |P_q| = 2n$).

Dimostrazione. Iniziamo a fissare un albero ancorato agli s punti. Questo puo' essere fatto in $C^n(s-2)!$ modi (vedi Lemma A5.1). A questo punto rimangono da contrarre $2(n-s+1)$ linee, e questo puo' essere fatto in $(n-s+1)!$ modi. Mettendo insieme le due stime si trova la (A6.1). ■

LEMMA A6.2 *Siano $\{P_v\}$ degli insiemi di indici che, per una data collezione di cluster v corrispondenti ad un albero τ , descriva quante e quali linee escono da ogni cluster v . Sia α una costante > 0 . Allora*

$$A6.2 \quad \sum_{\{P_v\}} \prod_{v \notin V(\tau)} \gamma^{-\alpha|P_v|} \leq C_\alpha^n \tag{A6.2}$$

dove n e' il numero di punti finali dell' albero τ e C_α e' una costante che dipende da α .

Dimostrazione. Riscriviamo la somma su $\{P_v\}$ nel modo seguente:

$$A6.2 \quad \sum_{\{P_v\}} = \prod_{v \in V(\tau)} \sum_{p_v} \sum_{\substack{P_v \\ |P_v|=p_v}} \chi(\text{vincolisu } \{p_v\}) \tag{A6.3}$$

dove la funzione χ indica il vincolo indotto dal fatto che, se chiamiamo

$$A6.3 \quad Q_{v_j} = P_v \cap P_{v_j}, \quad j = 1, \dots, s_v \tag{A6.4}$$

si ha

$$A6.4 \quad P_v = \bigcup_{j=1}^{s_v} Q_{v_j} \tag{A6.5}$$

(vedi anche (4.54), (4.55)).

Usando la disuguaglianza

$$A6.5 \quad \sum_{\substack{P_v \\ |P_v|=p_v}} 1 \leq \binom{p_{v_1} + \dots + p_{v_{s_v}}}{p_v} \tag{A6.6}$$

e trascurando il vincolo χ , possiamo stimare

$$A6.6 \quad \sum_{\{P_v\}} \left(\prod_{v \in V(\tau)} \gamma^{-\alpha|P_v|} \right) \leq \prod_{v \in V(\tau)} \left[\sum_{p_v} \gamma^{-\alpha p_v} \binom{p_{v_1} + \dots + p_{v_{s_v}}}{p_v} \right]. \tag{A6.7}$$

E' conveniente riscrivere la (A6.7) nella forma

$$A6.7 \quad \prod_{v \in V(\tau)} \left[\sum_{p_v} \gamma^{-\alpha p_v} \binom{p_{v_1} + \dots + p_{v_{s_v}}}{p_v} \right] \equiv \prod_{v \in V(\tau)} \mathcal{I}_v. \tag{A6.8}$$

In particolare il fattore \mathcal{I}_{v_0} e' uguale a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{v_0} &= \sum_{p_{v_0}} \gamma^{-\alpha p_{v_0}} \binom{p_{v_{01}} + \dots + p_{v_{0s_{v_0}}}}{p_{v_0}} \\
 &= (1 + \gamma^{-\alpha})^{p_{v_{01}} + \dots + p_{v_{0s_{v_0}}}} = \prod_{j=1}^{s_{v_0}} (1 + \gamma^{-\alpha})^{p_{v_{0j}}} ,
 \end{aligned}
 \tag{A6.8}$$

dove $v_{01}, \dots, v_{0s_{v_0}}$ sono i vertici che seguono immediatamente v_0 . In questo modo

$$\prod_{v \in V(\tau)} \left[\sum_{p_v} \gamma^{-\alpha p_v} \binom{p_{v_1} + \dots + p_{v_{s_v}}}{p_v} \right] = \left(\prod_{\substack{v \in V(\tau) \\ v > v_0}} \mathcal{I}_v \right) \prod_{j=1}^{s_{v_0}} (1 + \gamma^{-\alpha})^{p_{v_{0j}}} .
 \tag{A6.9}$$

Iterando la procedura troviamo

$$\mathcal{I}_{v_0} \prod_{j=1}^{s_{v_0}} \mathcal{I}_{v_{0j}} = \prod_{j=1}^{s_{v_0}} \prod_{j'=1}^{s_{v_j}} (1 + \gamma^{-\alpha} (1 + \gamma^{-\alpha}))^{p_{v_{jj'}}} ,
 \tag{A6.10}$$

dove v_{j1}, \dots, v_{js_v} sono i vertici che seguono immediatamente v_{0j} . Possiamo continuare cosi' finche' non raggiungiamo i punti finali di τ . Se chiamiamo \mathcal{P} un generico cammino dalla radice di τ a qualche punto finale, abbiamo

$$\prod_{v \in V(\tau)} \mathcal{I}_v = \prod_{\mathcal{P}} [(1 + \gamma^{-\alpha} (1 + \gamma^{-\alpha} (1 + \gamma^{-\alpha} (\dots))))]^4 ,
 \tag{A6.11}$$

dove abbiamo usato che i punti finali hanno al massimo 4 linee esterne e la produttoria e' su tutti gli n possibili cammini \mathcal{P} . Se indichiamo con $\ell(\mathcal{P})$ la "lunghezza" del cammino \mathcal{P} , ossia il numero di vertici attraversati da \mathcal{P} , troviamo

$$\prod_{v \in V(\tau)} \mathcal{I}_v = \prod_{\mathcal{P}} \left[\sum_{k=0}^{\ell(\mathcal{P})} \gamma^{-\alpha k} \right]^4 \leq \left(\frac{\gamma^\alpha}{\gamma^\alpha - 1} \right)^{4n} \equiv C_1^n ,
 \tag{A6.12}$$

dove $C_1 = \gamma^{4\alpha} (\gamma^\alpha - 1)^4$. Quindi segue la (A6.2), con $C_\alpha \equiv C_1$. ■

LEMMA A6.3 *Siano $\{P_v\}$ degli insiemi di indici che, per una data collezione di cluster v corrispondenti ad un albero τ , descriva quante e quali linee escono da ogni cluster v . Sia α una costante > 0 . Allora*

$$\sum_{\{P_v\}} \prod_{v \notin V(\tau)} \gamma^{-\alpha |P_v| \chi(|P_v| \geq 6)} \leq C_\alpha^n
 \tag{A6.13}$$

dove n e' il numero di punti finali dell' albero τ e C_α e' una costante che dipende da α .

Dimostrazione. Il Lemma A6.3 e' molto simile al Lemma A6.2; useremo qui le stesse notazioni introdotte nella precedente dimostrazione. Nel nostro caso dobbiamo tener conto del fatto che ogni vertice a cui sono assegnate due o quattro linee esterne contribuisce con 1 alla produttoria nella (A6.14), piuttosto che con $\gamma^{-\alpha p_v}$.

Espandiamo la somma in (A6.14) in una somma di C^n termini in ognuno dei quali si suppone assegnato ad ogni vertice v non banale un indice β_v che puo' assumere i valori 0 o 1; supporremo che $\beta_v = 0$ significhi che $p_v \leq 4$, mentre che $\beta_v = 1$ significhi che $p_v \geq 6$.

In altre parole riscriviamo la (A6.14) nel seguente modo:

$$A6.14 \quad (A6.14) = \sum_{\{\beta_v\}} \prod_{\substack{v \text{ non p. f.} \\ v \text{ non banali}}} \left(\delta_{\beta_v,0} \sum_{\substack{\{P_v\} \\ p_v \leq 4}} + \delta_{\beta_v,1} \sum_{\substack{\{P_v\} \\ p_v \geq 6}} \gamma^{-\alpha p_v} \right) \prod_{\substack{v \text{ non p. f.} \\ v \text{ banali}}} \sum_{\{P_v\}} \gamma^{-\alpha p_v \chi(p_v \geq 6)} \quad (A6.15)$$

Per ogni scelta degli indici β_v associati ai vertici non banali dell' albero τ consideriamo un qualsiasi cammino dell' albero τ che unisca due vertici non banali v e v' . Tra i vertici banali contenuti nel ramo tra v e v' ce ne possono essere alcuni in cui "succede qualcosa", ossia alcuni in corrispondenza dei quali avvengono una o piu' autocontrazioni (e quindi in corrispondenza dei quali l' insieme P_v cambia rispetto al vertice subito precedente). In particolare, possiamo assegnare ad al massimo due vertici banali tra v e v' in cui succede qualcosa l' indice $\beta_v = 0$.

La discussione precedente serve a mostrare che il numero di vertici (banali o non) con associato un indice $\beta_v = 0$ e' stimato da Cn . Ogni vertice v con la proprieta' di avere $\beta_v = 0$ contribuisce alla somma di (A6.14) con un termine del tipo:

$$A6.15 \quad \sum_{p_v=2,4} \binom{p_{v_1} + \dots + p_{v_{s_v}}}{p_v} \quad (A6.16)$$

dove v_1, \dots, v_{s_v} sono i vertici che seguono immediatamente v .

Se per semplicita' supponiamo di avere solo vertici finali a quattro gambe esterne (la dimostrazione si puo' poi estendere banalmente al caso generale), la somma $p_{v_1} + \dots + p_{v_{s_v}}$ e' maggiorata da

$$A6.16 \quad \sum_{i=1}^{s_v} 4 \left(m_{4,v_i} - m_{4,v_{i,1}} - \dots - m_{4,v_{i,k_i}} + k_i \right) \quad (A6.17)$$

dove i vertici $v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}$ sono vertici con le seguenti proprieta':

- (1) seguono v_i nell' ordinamento indotto dall' albero τ ;
- (2) sono associati ad un indice $\beta_v = 0$;
- (3) tra v_i e $v_{i,j}$ $j = 1, \dots, k_i$ non c' e' nessun vertice v' associato ad un indice $\beta_{v'} = 0$.

Il motivo per cui vale la maggiorazione (A6.17) e' che ogni p_{v_i} e' sicuramente minore del numero totale di linee uscenti dagli m_{4,v_i} vertici finali contenuti in v_i . Non solo, possiamo tenere conto del fatto che ad alcuni vertici (diciamo $v_{i,1}, \dots, v_{i,k_i}$) contenuti in v_i e' associato un indice $\beta = 0$; vediamo allora subito che alla stima (troppo drastica) $p_{v_i} \leq 4m_{4,v_i}$ possiamo togliere i contributi dovuti ai punti finali seguenti i vertici $v_{i,j}$, a patto pero' di sostituirvi un 4 (che e' il massimo valore possibile di $p_{v_{i,j}}$).

A questo punto ogni somma (A6.16) puo' essere maggiorata da

$$A6.17 \quad 2^{1+\sum_{i=1}^{s_v} 4} \left(m_{4,v_i} - m_{4,v_{i,1}} - \dots - m_{4,v_{i,k_i}} + k_i \right) \quad (A6.18)$$

Mettendo insieme tutti i contributi dei vertici con $\beta = 0$ otteniamo:

$$A6.18 \quad 2^{\sum_v \beta_v=0} \left[1 + \sum_{i=1}^{s_v} 4 \left(m_{4,v_i} - m_{4,v_{i,1}} - \dots - m_{4,v_{i,k_i}} + k_i \right) \right] \leq 2^{4m_{4,v_0} + (1+4)Cn} \quad (A6.19)$$

dove Cn stima il numero di vertici con $\beta = 0$.

Rimangono ora da eseguire le somme sui vertici con $\beta = 1$. Ognuno di questi vertici contribuisce alla (A6.14) con un fattore

$$A6.19 \quad \sum_{p_v=6,8,\dots,p_{v_1}+\dots+p_{v_{s_v}}} \gamma^{-\alpha p_v} \binom{p_{v_1} + \dots + p_{v_{s_v}}}{p_v} \quad (A6.20)$$

La (A6.20) puo' banalmente essere maggiorata da

$$A6.20 \quad \sum_{p_v=1}^{p_{v_1}+\dots+p_{v_{s_v}}} \gamma^{-\alpha p_v} \binom{p_{v_1} + \dots + p_{v_{s_v}}}{p_v} = (1 + \gamma^{-\alpha})^{p_{v_1}+\dots+p_{v_{s_v}}} \geq 1 \quad (A6.21)$$

Per migliorare, possiamo allora anche decidere di aggiungere per ogni vertice con $\beta = 0$ (di cui abbiamo già stimato il contributo) un fattore

$$A6.21 \quad \sum_{p_v=1}^{p_{v_1}+\dots+p_{v_{s_v}}} \gamma^{-\alpha p_v} \binom{p_{v_1}+\dots+p_{v_{s_v}}}{p_v} \quad (A6.22)$$

Ci ritroviamo adesso con la stessa quantità che compare nella dimostrazione Lemma A6.2. Ripercorrendo gli stessi passi seguiti la otteniamo la (A6.14). ■

app.7

Appendice A7. Dimostrazione del Teorema 6.1

p. A7.1 **A7.1. Dimostrazione del Teorema 6.1**

Vogliamo dimostrare il Teorema 6.1. L' enunciato che daremo qua e' leggermente diverso da quello dato nel capitolo 6; la principale differenza e' che si supporra' che i settori angolari non si sovrappongano tra loro (vedi scelta della funzione $\chi_\omega^{(h)}$ nel Capitolo 4). Il Teorema 6.1 come enunciato nel Capitolo 6 e' un banale corollario del Teorema dimostrato qui sotto.

La dimostrazione qui riportata e' basata sulla traccia proposta in [FMRT], ma contiene molti dettagli in piu'. In particolare viene proposta una stima esplicita delle costanti che compaiono nella (A7.2) piu' sotto.

TEOREMA 6.1A *Sia $d=2$ e $l \geq 4$. Sia \mathcal{P} una partizione della corona circolare di raggi $1 - \gamma^h$ e $1 + \gamma^h$ in $\gamma^{-\frac{h}{2}}$ settori angolari σ_i uguali fra loro. Sia σ_1 un settore fissato.*

Siano $\Omega_2, \dots, \Omega_l$ $l-1$ insiemi assegnati, ognuno formato da $\gamma^{\frac{\bar{h}-h}{2}}$ settori angolari σ_i contigui, con $h < \bar{h} \leq 0$; in altre parole gli insiemi Ω_i sono settori angolari "meno raffinati" dei settori σ_i , di ampiezza $\Omega \equiv 2\pi\gamma^{\frac{\bar{h}}{2}}$. Il numero di $(l-1)$ -ple di settori compatibili con le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{k}_1 \in \sigma_1 \\
 & \mathbf{k}_i \in \sigma_i \cap \Omega_i \quad i = 2, 3, \dots, l \\
 & \sum_{i=1}^l \mathbf{k}_i \equiv \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{A7.1}$$

e' stimato da

$$Cl^4 (\Omega \gamma^{-\frac{h}{2}})^{l-3} \tag{A7.2}$$

se $l^2 \gamma^{\frac{h}{2}} < \varepsilon$, dove C ed ε sono costanti indipendenti da l e da h .

Dimostrazione. Dato un settore σ_i , chiamiamo ω_i il vettore di modulo uno che punta verso il centro del settore. Data una $(l-1)$ -pla di settori σ_i , decidiamo di chiamare σ_l e σ_{l-1} due settori tali che $|\omega_l \cdot \omega_{l-1}|$ sia minimo tra tutti i prodotti scalari $|\omega_i \cdot \omega_j|$, $i, j = 2, \dots, l$. L'angolo tra ω_l e ω_{l-1} quindi e' il piu' vicino possibile a $\frac{\pi}{2}$; chiamiamo φ' o $\pi - \varphi'$ quest' angolo, in modo tale che φ' sia sempre $\leq \frac{\pi}{2}$. Nel caso ci siano piu' coppie con lo stesso φ' , scegliamo con un qualche criterio una di queste (ad esempio chiamiamo ω_l il vettore tra quelli delle coppie in questione piu' vicino ad un certo asse prefissato, e ω_{l-1} il vettore che forma con esso l' angolo φ' o, se ci fosse ancora ambiguita', il vettore dei due possibili che lo segue sul cerchio, se ci muoviamo da ω_l in senso orario). Chiamiamo poi φ (o $\pi - \varphi$, con lo stesso criterio seguito sopra) l' angolo tra \mathbf{k}_l e \mathbf{k}_{l-1} . Notiamo che $\varphi - \varphi' = 2\pi o(\gamma^{\frac{h}{2}})$, dove $o(\varepsilon)$ vuol dire che $|o(\varepsilon)| < \varepsilon$. In seguito sara' utile anche la seguente notazione: diremo che $f(\varepsilon) = O_{1,2}(\varepsilon)$ se $\exists C_1, C_2 > 0$ t. c. $C_1 \varepsilon \leq |O_{1,2}(\varepsilon)| < C_2 \varepsilon$, con C_1 e C_2 indipendenti da h, j e l .

Sia $j \leq 0$ tale che $\frac{\pi}{4} \gamma^j \leq \varphi' < \frac{\pi}{4} \gamma^{j+1}$. Notiamo che, per costruzione

$$\frac{\pi}{4} \gamma^j \geq 2\pi \gamma^{\frac{h}{2}} \tag{A7.3}$$

o, equivalentemente, $j \geq \frac{h}{2} + 3$. Contiamo quante $(l-1)$ -ple ci sono con un dato j , compatibili con le condizioni (A7.1). Per contarle le costruiremo esplicitamente, fissando uno ad uno gli l vettori; risultera' chiaro che con il procedimento con cui le costruiremo alcune l -uple verranno contate due volte (quelle in cui ci sono piu'

coppie di ω che formano tra loro l'angolo φ') ma visto che riusciremo ad ottenere la stima voluta già con questo procedimento, non ci interessera' trovarne uno piu' efficiente.

ω_2 puo' essere scelto a priori in $\frac{\Omega}{2\pi}\gamma^{-\frac{h}{2}}$ modi. I vettori $\omega_3, \dots, \omega_{l-2}$ devono formare con $\pm\omega_2$ un angolo $\leq \varphi'$, quindi ognuno di essi puo' essere scelto in al massimo $\min\{\Omega, 4\frac{\pi}{2}\gamma^j\}\frac{\gamma^{-\frac{h}{2}}}{2\pi}$ modi. In realta' per j molto negativo ho un' ulteriore restrizione nella scelta di ω_2 . Supponiamo infatti di aver fissato tutti gli $l-1$ settori e tutti gli l vettori \mathbf{k}_i . Se usiamo la direzione del vettore ω_2 come asse di riferimento, le coordinate dei vettori \mathbf{k}_i $i \neq 1$ saranno:

$$A7.3 \quad \mathbf{k}_i = (1 + o(\gamma^h)) \begin{pmatrix} \pm \cos(\vartheta_i + 2\pi o(\gamma^{\frac{h}{2}})) \\ \pm \sin(\vartheta_i + 2\pi o(\gamma^{\frac{h}{2}})) \end{pmatrix} \quad (A7.4)$$

dove $\vartheta_i = \frac{\pi}{2}o(\gamma^j)$. Supponiamo che $2\pi\gamma^{\frac{h}{2}} < \frac{1}{10}\frac{\pi}{2}$. Allora gli angoli che compaiono negli argomenti delle funzioni seno e coseno nella (A7.4) sono $< \frac{11}{10}\frac{\pi}{2}$. Questo ci permette di usare le seguenti proprieta':

$$A7.4 \quad \begin{aligned} \sin \vartheta &= O_{1,2}(\vartheta) \\ \cos \vartheta &= \frac{1}{2}O_{1,2}(\vartheta^2) \end{aligned} \quad (A7.5)$$

dove, se $\vartheta < \frac{11}{10}\frac{\pi}{2}$, $C_1 = \frac{\sin(\frac{11}{10}\frac{\pi}{2})}{\frac{11}{10}\frac{\pi}{2}}$ e $C_2 = 1$. Usando la (A7.5) e la (A7.3), la (A7.4) diventa:

$$A7.5 \quad \mathbf{k}_i = (1 + o\gamma^h) \begin{pmatrix} \pm 1 + \frac{9\pi^2}{32}o\gamma^{2j} \\ \frac{3\pi}{4}o(\gamma^j) \end{pmatrix} \quad (A7.6)$$

La condizione (A7.1) ci dice che $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 - \dots - \mathbf{k}_l$. Quindi, usando la (A7.6), vediamo che la componente y di \mathbf{k}_1 deve essere della forma $\pm \sin \vartheta'_1 = (1 + o(\gamma^h))(l-1)\frac{3\pi}{4}o(\gamma^j)$. Usando che $\arcsin x = \frac{\pi}{2}o(x)$ per $x < 1$, otteniamo:

$$A7.6 \quad \vartheta'_1 < \arcsin \min\{1, (1 + \gamma^h)(l-1)\frac{3\pi}{4}\gamma^j\} \leq \min\{\frac{\pi}{2}, C_3(l-1)\gamma^j\} \leq C_3(l-1)\gamma^j \quad (A7.7)$$

dove $C_3 = \frac{3\pi^2}{8}(1 + \frac{1}{1600})$ ($\frac{1}{1600}$ e' una stima di $o(\gamma^h)$ ottenuta usando la (A7.3)).

Vediamo allora che ω_2 puo' essere fissato in al massimo $\min\{\Omega, C_3 l \gamma^j\}\frac{\gamma^{-\frac{h}{2}}}{2\pi}$ modi.

Notiamo, poiche' sara' utile in seguito (vedi caso 2b piu' sotto), che se vogliamo fissare i primi $l-3$ vettori ω con il vincolo che $|\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{l-2}| < Cl\gamma^{\frac{h}{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, il numero di modi possibili di farlo e' minore di

$$A7.35 \quad \left(\min\{\Omega, 4\frac{\pi}{2}\gamma^j\}\frac{\gamma^{-\frac{h}{2}}}{2\pi} \right)^{l-4} \frac{\frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} \frac{Cl}{2\pi} \quad (A7.8)$$

Infatti, una volta fissati $\omega_3, \dots, \omega_{l-2}$, ω_2 deve essere scelto in modo da cancellare a meno di $Cl\gamma^{\frac{h}{2}}$ la somma $\mathbf{v} \equiv \omega_3 + \dots + \omega_{l-2}$. Questo puo' essere fatto con il seguente criterio: considero il vettore ω_2 che formi con \mathbf{v} l'angolo piu' vicino possibile a π ; nel caso migliore $\omega_2 + \mathbf{v}$ sara' nullo entro $Cl\gamma^{\frac{h}{2}}$. Posso considerare i vettori ω'_2 che formano con ω_2 un angolo minore di $\arcsin(Cl\gamma^{\frac{h}{2}})$; nel caso migliore anche questi vettori avranno la proprieta' di avere somma nulla (a meno di $Cl\gamma^{\frac{h}{2}}$) con \mathbf{v} . I vettori ω'_2 che formano con ω_2 un angolo maggiore di $\arcsin(Cl\gamma^{\frac{h}{2}})$ sicuramente saranno tali che $|\omega'_2 + \mathbf{v}| > Cl\gamma^{\frac{h}{2}}$ (poiche' la componente di ω'_2 ortogonale a \mathbf{v} sara' maggiore di $Cl\gamma^{\frac{h}{2}}$).

Abbiamo allora fissato i primi $l-3$ vettori. Qual e' il numero N_l di modi di scegliere gli ultimi due vettori,

in modo che l' angolo tra di essi sia compatibile con il dato j , e in modo che le condizioni (A7.1) siano rispettate?

Definiamo:

$$A7.7 \quad \mathbf{a} = -\omega_1 - \dots - \omega_{l-2} \quad (A7.9)$$

$$A7.8 \quad \mathbf{a} + \varepsilon = \mathbf{k}'_l + \mathbf{k}'_{l-1} \quad (A7.10)$$

dove \mathbf{k}' e' il versore di \mathbf{k} .

Usando sempre ω_2 come asse di riferimento troviamo che:

$$A7.9 \quad \omega_i = (1 + o(\gamma^h)) \begin{pmatrix} \pm \cos(\vartheta_i) \\ \pm \sin(\vartheta_i) \end{pmatrix} \quad (A7.11)$$

dove $\vartheta_i = \frac{\pi}{2} o(\gamma^j)$ $i \neq 1$ e $\vartheta_1 = C_3 l o(\gamma^j)$ I vettori \mathbf{k}_i hanno la forma (A7.4), a parte \mathbf{k}_1 che e' uguale a

$$A7.10 \quad \mathbf{k}_1 = (1 + o(\gamma^h)) \begin{pmatrix} \pm \cos(\vartheta'_1) \\ \pm \sin(\vartheta'_1) \end{pmatrix} \quad (A7.12)$$

dove $\vartheta'_1 - \vartheta_1 = 2\pi o(\gamma^{\frac{h}{2}})$.

Usando la regola di addizione dei seni e coseni, le relazioni (A7.5) ed (A7.3) e il fatto che $\sin \vartheta = o(\vartheta)$ per ogni ϑ , si trova:

$$A7.11 \quad \mathbf{k}_i - \omega_i = \begin{pmatrix} \frac{5\pi^2}{4} o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) \\ (2\pi + \frac{\pi^2}{4}) o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \end{pmatrix} \quad (A7.13)$$

L' equazione precedente e' valida per $i \neq 1$; per $i = 1$ vale una formula uguale con $(C_3 + \frac{\pi^2}{4}) l o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}})$ al posto di $(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}) o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}})$.

Sostituendo questo risultato nelle espressioni per \mathbf{a} e per $\mathbf{a} + \varepsilon$ otteniamo:

$$A7.12 \quad \mathbf{a} = \mathbf{k}_l + \mathbf{k}_{l-1} + \sum_{i=1}^{l-2} (\mathbf{k}_i - \omega_i) = \mathbf{k}_l + \mathbf{k}_{l-1} + l \begin{pmatrix} C_4 o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) \\ C_5 o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \end{pmatrix} \quad (A7.14)$$

e

$$A7.13 \quad \varepsilon = \mathbf{k}'_l + \mathbf{k}'_{l-1} - \mathbf{k}_l - \mathbf{k}_{l-1} - \sum_{i=1}^{l-2} (\mathbf{k}_i - \omega_i) = l \begin{pmatrix} C_6 o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) \\ C_7 o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \end{pmatrix} \quad (A7.15)$$

dove $C_4 = \frac{3\pi^2}{2} + C_3$, $C_5 = 2\pi + \frac{\pi^2}{4}$, $C_6 = C_4 + \frac{1}{16}$ e $C_7 = C_5 + \frac{1}{16}$.

Siamo ora pronti a stimare N_l , nei due casi in cui l' angolo tra \mathbf{k}_l e \mathbf{k}_{l-1} sia φ oppure $\pi - \varphi$.

Caso 1

Supponiamo che l' angolo tra \mathbf{k}_l e \mathbf{k}_{l-1} sia φ .

In questo caso e' conveniente ruotare il sistema di riferimento fino a far coincidere l' asse x con la direzione di \mathbf{a} . Sia ϑ ($0 < \vartheta < \pi$), in modo che ϑ sia sempre $< \frac{\pi}{2}$ l' angolo tra ω_2 e \mathbf{a} . Le coordinate dei vettori cambiano nel seguente modo:

$$A7.14 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm \cos \vartheta x \pm \sin \vartheta y \\ \pm \cos \vartheta y \pm \sin \vartheta x \end{pmatrix} \quad (A7.16)$$

Se $j = 0$ (ossia $\varphi' > \frac{\pi}{4}$) ϑ puo' essere un angolo qualsiasi. Se invece $j < 0$ ϑ e' necessariamente $< \varphi' + 2\pi o(2^{\frac{h}{2}})$ oppure $> \pi - \varphi' + 2\pi o(2^{\frac{h}{2}})$.

In entrambi i casi e' facile verificare che le coordinate di ε e di $\mathbf{a} - \mathbf{k}_l - \mathbf{k}_{l-1}$, nel nuovo sistema di riferimento, sono:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= l \begin{pmatrix} C_8 o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) \\ C_9 o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \end{pmatrix} \\ \mathbf{a} - \mathbf{k}_l - \mathbf{k}_{l-1} &= l \begin{pmatrix} C_{10} o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) \\ C_{11} o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (A7.17)$$

dove $C_8 = C_4 + \frac{3\pi}{4}C_5$, $C_9 = C_4 + C_5$, $C_{10} = C_6 + \frac{3\pi}{4}C_7$ e $C_{11} = C_6 + C_7$.

Siano $-\alpha$ e $\varphi - \alpha$ gli angoli che rispettivamente \mathbf{k}'_{l-1} e \mathbf{k}'_l formano con \mathbf{a} (supponiamo che gli angoli abbiano un segno e che, per definizione, l'angolo formato da \mathbf{k}'_l con \mathbf{a} sia positivo).

Si ha:

$$\mathbf{k}'_{l-1} + \mathbf{k}'_l = \begin{pmatrix} \cos \alpha + \cos(\varphi - \alpha) \\ -\sin \alpha + \sin(\varphi - \alpha) \end{pmatrix} = \mathbf{a} + \varepsilon = \begin{pmatrix} |\mathbf{a}| + lC_{10}o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) \\ lC_{11}o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \end{pmatrix} \quad (A7.18)$$

Almeno uno dei due angoli α e $\varphi - \alpha$ e' $< \frac{\pi}{4}$, diciamo α . Allora, dall'equazione (A7.18) per la componente y , abbiamo:

$$\varphi - \alpha = \arcsin \left(\sin \alpha + lC_{11}o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \right) = \alpha + \frac{lC_{11}o(\gamma^{\frac{h}{2}})}{\sqrt{1 - \left(\sin \alpha + t_1 lC_{11}o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \right)^2}} \quad (A7.19)$$

dove t_1 e' un parametro di interpolazione compreso tra 0 e 1.

Scegliamo $l\gamma^{\frac{h}{2}}$ abbastanza piccolo perche' $lC_{11}\gamma^{\frac{h}{2}}$ sia minore di $\frac{1}{10\sqrt{2}}$. In questo modo $\sin \alpha + t_1 lC_{11}o(\gamma^{\frac{h}{2}})$ e' minore di $\frac{11}{10\sqrt{2}}$ e

$$\varphi - \alpha = \alpha + lC_{12}o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \quad (A7.20)$$

dove $C_{12} = \sqrt{\frac{200}{79}}$.

Quindi vediamo che, fissato α , il settore cui appartiene $\varphi - \alpha$ e' determinato a meno di $\frac{C_{12}l}{\pi}$; questo non era ovvio a priori, poiche' φ non era fissato, ma era solo compreso tra $\frac{\pi}{4}\gamma^j + 2\pi o(\gamma^{\frac{h}{2}})$ e $\frac{\pi}{4}\gamma^{j+1} + 2\pi o(\gamma^{\frac{h}{2}})$ (tra i due angoli ci sono "tanti" settori, $\sim \frac{\pi}{4}\gamma^j\gamma^{-\frac{h}{2}}$).

Cerchiamo di fissare \mathbf{k}_{l-1} . Consideriamo l'equazione (A7.18) per la componente x e sostituiamoci il risultato appena ottenuto (A7.20):

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| + lC_{10}o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) &= \cos \alpha + \cos(\varphi - \alpha) = \\ &= \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}lC_{12}o(\gamma^{\frac{h}{2}})\right) + \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}lC_{12}o(\gamma^{\frac{h}{2}})\right) = \\ &= 2 - \frac{1}{4} \left| O_{1,2} \left(\frac{\pi^2}{16} |O_{2,13}(\gamma^{2j})| + \frac{1}{2} \left(\frac{C_{12}}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \right)^2 l^2 o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) \right) \right| = \\ &= 2 - \frac{\pi^2}{64} |O_{1,13}(\gamma^{2j})| + C_{14} l^2 o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) \end{aligned} \quad (A7.21)$$

dove $C_{13} = 2$, $C_{14} = \frac{1}{8} \left(\frac{C_{12}}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \right)^2$, ed abbiamo usato che $C_2 = 1$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}O_{2,13}(\gamma^j) + 2\pi o(\gamma^{\frac{h}{2}})$.

Possiamo riscrivere l'ultima equazione nella forma:

$$1 - \frac{|\mathbf{a}|}{2} = \frac{\pi^2}{128} |O_{1,13}(\gamma^{2j})| + C_{15} l^2 o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) \quad (A7.22)$$

dove $C_{15} = \frac{1}{2}C_{14} + \frac{1}{8}C_{10}$.

Possiamo ora risolvere l'equazione (A7.18) per la componente x nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos(\varphi - \alpha) &= \cos \alpha (1 + \cos(\varphi - 2\alpha)) - \sin \alpha \sin(\varphi - 2\alpha) = \\ &= \cos \alpha \left(2 - \frac{C_{12}^2}{2} l^2 |o(\gamma^h)| \right) + \frac{\pi}{2} C_{12} l o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) = |\mathbf{a}| + lC_{10}o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) \end{aligned} \quad (A7.23)$$

Supponiamo che $l\gamma^{\frac{h}{2}}$ sia scelto così piccolo che $\frac{C_{12}^2}{2}l^2\gamma^h$ sia minore di $\frac{1}{10}$. Allora possiamo invertire l'equazione (A7.23) ottenendo:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \arccos\left(\frac{|\mathbf{a}|}{2} + \frac{10}{19}\frac{C_{12}^2}{2}l^2o(\gamma^h) + \frac{10}{19}\left(\frac{\pi}{2}C_{12} + C_{10}\right)lo(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}})\right) = \\
 &= \arccos\left(\frac{|\mathbf{a}|}{2}\right) - \frac{l^2C_{16}o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}})}{\sqrt{1 - \left(\frac{|\mathbf{a}|}{2} + t_2l^2C_{16}o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}})\right)^2}} = \\
 &= \arccos\left(\frac{|\mathbf{a}|}{2}\right) - \frac{l^2C_{16}o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}})}{\sqrt{\left(1 - \frac{|\mathbf{a}|}{2} + t_2l^2C_{16}o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}})\right)\left(1 + \frac{|\mathbf{a}|}{2} + t_2l^2C_{16}o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}})\right)}} = \\
 &= \arccos\left(\frac{|\mathbf{a}|}{2}\right) + \sqrt{\frac{10}{9}}\frac{l^2C_{16}o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}})}{\sqrt{1 - \frac{|\mathbf{a}|}{2} + t_2l^2C_{16}o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}})}} = \\
 &= \arccos\left(\frac{|\mathbf{a}|}{2}\right) + \sqrt{\frac{10}{9}}\frac{l^2C_{16}o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}})}{\sqrt{\frac{\pi^2}{128}|O_{1,13}(\gamma^{2j})| + l^2(C_{15} + C_{16})o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}})}}}
 \end{aligned} \tag{A7.24}$$

dove t_2 e' un parametro di interpolazione compreso tra 0 e 1 e $C_{16} = \frac{10}{19}\frac{C_{12}^2}{2}\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\frac{10}{19}\left(\frac{\pi}{2}C_{12} + C_{10}\right)$. Nel penultimo passaggio abbiamo supposto di scegliere $l^2\gamma^{\frac{h}{2}}$ così piccolo che $C_{16}l^2\gamma^{\frac{h}{2}} < \frac{1}{10}$; nell'ultimo abbiamo usato la (A7.22).

Consideriamo ora due sottocasi:

(a)

$$\frac{\pi^2}{128}|O_{1,13}(\gamma^{2j})| + l^2(C_{15} + C_{16})o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}}) > \frac{\pi^2}{128}\frac{C_1}{2}\gamma^{2j}$$

In questo caso la (A7.24) si può riscrivere nella forma

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\mathbf{a}|}{2}\right) + C_{17}l^2o\left(\frac{\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}}}{\gamma^j}\right) \tag{A7.25}$$

dove $C_{17} = \sqrt{\frac{10}{9}}\frac{C_{16}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{128}\frac{C_1}{2}}}$. Quindi come voluto \mathbf{k}_l^i ha la libertà di occupare al massimo $2\frac{C_{17}}{2\pi}l^2$ settori.

(b)

$$\frac{\pi^2}{128}|O_{1,13}(\gamma^{2j})| + l^2(C_{15} + C_{16})o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}}) < \frac{\pi^2}{128}\frac{C_1}{2}\gamma^{2j} \tag{A7.26}$$

In questo caso otteniamo

$$\frac{\pi^2}{128}\frac{C_1}{2}\gamma^{2j} - l^2(C_{15} + C_{16})|o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}})| < 0 \tag{A7.27}$$

Ma allora $\gamma^j = l^2C_{18}o(\gamma^{\frac{h}{2}})$ dove $C_{18} = \frac{2(C_{15}+C_{16})}{C_1}\frac{128}{\pi^2}$. L'equazione (A7.18) per la componente x questa volta ci dà:

$$\begin{aligned}
 1 + \cos \alpha &> \cos \alpha + \cos(\varphi - \alpha) = \\
 &= 2 - \frac{\pi^2}{64}|O_{1,13}(\gamma^{2j})| + C_{14}l^2o(\gamma^j\gamma^{\frac{h}{2}}) = 2 - l^4C_{19}|o(\gamma^h)|
 \end{aligned} \tag{A7.28}$$

dove

$$C_{19} = C_{18}^2C_{13}\frac{\pi^2}{64} + C_{18}C_{14} \tag{A7.29}$$

Questo implica che $1 - \cos \alpha = l^4 C_{19} o(\gamma^h)$ e quindi che $\alpha = l^2 C_{20} o(\gamma^{\frac{h}{2}})$, con $C_{20} = \sqrt{2 \frac{C_{19}}{C_1}}$, come volevasi dimostrare.

Caso 2

Supponiamo ora che l'angolo tra \mathbf{k}_l e \mathbf{k}_{l-1} sia $\pi - \varphi$. La cosa conveniente da fare adesso e' ruotare il sistema di riferimento fino a far coincidere $-\mathbf{k}'_{l-1}$ con il nuovo asse x; l'angolo di cui dobbiamo ruotare e' ancora $< \varphi' + 2\pi o(\gamma^{\frac{h}{2}})$ oppure $> \pi - \varphi' + 2\pi o(\gamma^{\frac{h}{2}})$. Se $-\alpha$ e' ancora l'angolo tra \mathbf{k}'_{l-1} e \mathbf{a} , valgono le seguenti relazioni:

$$A7.27 \quad \mathbf{a} + \varepsilon = \begin{pmatrix} \cos \varphi - 1 \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -|\mathbf{a}| \cos \alpha + l C_8 o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}}) \\ |\mathbf{a}| \sin \alpha + l C_9 o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \end{pmatrix} \quad (A7.30)$$

e

$$A7.28 \quad |\mathbf{a}| = 2 \sin \frac{\varphi}{2} + l \sqrt{C_8^2 + C_9^2} o(\gamma^{\frac{h}{2}}) = \frac{\pi}{4} |O_{1,13}(\gamma^j)| + l C_{21} o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \quad (A7.31)$$

dove abbiamo usato che $\varphi = \frac{\pi}{4} O_{2,13}(\gamma^j) + 2\pi o(\gamma^{\frac{h}{2}})$ (ricordiamo che $C_2 = 1$ e $C_{13} = 2$) e dove $C_{21} = \frac{\pi}{2} + \sqrt{C_8^2 + C_9^2}$.

Notiamo subito che possiamo fare in modo che $|\mathbf{a}|$ sia minore di, ad esempio, $\frac{7}{4}$; infatti o $\cos \alpha$ o $\sin \alpha$ e' $> \frac{1}{\sqrt{2}}$, diciamo $\sin \alpha$. Allora la componente y dell'equazione (A7.30) mi direbbe che $\sin \varphi$, che e' minore di 1, dovrebbe essere uguale ad un oggetto $> \frac{7}{4\sqrt{2}} + l C_9 o(\gamma^{\frac{h}{2}})$, il che e' impossibile se scegliamo $l 2^{\frac{h}{2}}$ opportunamente piccolo. Ad esempio se scegliamo $l \gamma^{\frac{h}{2}}$ cosi' piccolo che $l(C_9 + C_8) \gamma^{\frac{h}{2}} < \frac{7}{40\sqrt{2}}$, $|\mathbf{a}|$ e' sicuramente minore di $\frac{7}{4}$. Dal fatto che $|\mathbf{a}| < \frac{7}{4}$ e dalla (A7.31) trovo che:

$$A7.29 \quad \begin{aligned} \varphi &= 2 \arcsin \frac{|\mathbf{a}|}{2} + \frac{2l \sqrt{C_8^2 + C_9^2} o(\gamma^{\frac{h}{2}})}{\sqrt{1 - \left(\frac{|\mathbf{a}|}{2} + t_3 l \sqrt{C_8^2 + C_9^2} o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \right)^2}} = \\ &= 2 \arcsin \frac{|\mathbf{a}|}{2} + \frac{32}{\sqrt{31}} l \sqrt{C_8^2 + C_9^2} o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \end{aligned} \quad (A7.32)$$

dove t_3 e' un parametro di interpolazione compreso tra 0 e 1, e dove $l \gamma^{\frac{h}{2}}$ e' scelto abbastanza piccolo perche' $\frac{|\mathbf{a}|}{2} + l \sqrt{C_8^2 + C_9^2} o(\gamma^{\frac{h}{2}})$ sia minore di $\frac{15}{16}$ (ricordiamo che, per quanto detto sopra, $\frac{|\mathbf{a}|}{2} < \frac{14}{16}$).

Vediamo quindi che φ puo' appartenere al massimo a $\frac{16}{\sqrt{31}\pi} l \sqrt{C_8^2 + C_9^2}$ settori.

Consideriamo allora φ fissato e cerchiamo di fissare α . Consideriamo due sottocasi:

(a) Sia $|\mathbf{a}| > \frac{\pi}{4} \frac{C_1}{2} \gamma^j$ (vedi (A7.31)). l'equazione (A7.30) per la componente x ci da'

$$A7.30 \quad \cos \alpha = \frac{1 - \cos \varphi}{|\mathbf{a}|} + \frac{l C_8 o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}})}{|\mathbf{a}|} \quad (A7.33)$$

Si ha

$$A7.31 \quad \frac{1 - \cos \varphi}{|\mathbf{a}|} = C_{22} o(\gamma^j) \quad (A7.34)$$

dove $C_{22} = \frac{\frac{32}{\pi} \frac{\pi^2}{16}}{\frac{\pi}{4} \frac{C_1}{2}}$; inoltre

$$A7.32 \quad \frac{l C_8 o(\gamma^j \gamma^{\frac{h}{2}})}{|\mathbf{a}|} = l \frac{C_8}{\frac{\pi}{4} \frac{C_1}{2}} o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \equiv l C_{23} o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \quad (A7.35)$$

Invertiamo la (A7.33):

$$A7.33 \quad \alpha = \arccos \frac{1 - \cos \varphi}{|\mathbf{a}|} + \frac{l C_{23} o(\gamma^{\frac{h}{2}})}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - \cos \varphi}{|\mathbf{a}|} + t_4 l C_{23} o(\gamma^{\frac{h}{2}}) \right)^2}} \quad (A7.36)$$

Ora, se $j < j_0$, dove j_0 e' il piu' grande dei j tali che $C_{22}\gamma^j < \frac{1}{2}$, e se $l\gamma^{\frac{h}{2}}$ e' scelto opportunamente piccolo (in modo che $lC_{23}\gamma^{\frac{h}{2}} < \frac{1}{10}$), la (A7.36) mi dice che, come voluto, $\alpha = \arccos \frac{1-\cos\varphi}{|\mathbf{a}|} + \frac{10}{8}lC_{23}o(\gamma^{\frac{h}{2}})$.

Se invece $j \geq j_0$, $\frac{9C_1\pi}{160\gamma C_{22}} < \sin \frac{\varphi}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, dove abbiamo usato che $\varphi = \frac{\pi}{4}O_{2,13}(\gamma^j) + 2\pi o(\gamma^{\frac{h}{2}})$, che $\gamma^{j_0} > \frac{1}{2\gamma C_{22}}$ e la possibilita' di scegliere $\gamma^{\frac{h}{2}}$ cosi' piccolo che $2\pi\gamma^{\frac{h}{2}} < \frac{1}{10} \frac{\pi}{4} \frac{1}{2\gamma C_{22}}$. Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos\varphi}{|\mathbf{a}|} &= \frac{1-\cos\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}} + (1-\cos\varphi) \left(\frac{1}{|\mathbf{a}|} - \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}} \right) = \\ &= \sin\frac{\varphi}{2} + lC_{24}o(\gamma^{\frac{h}{2}}) < \frac{11}{10\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{A7.37}$$

dove $C_{24} = \frac{\sqrt{C_8^2+C_9^2}}{2\frac{9C_1\pi}{160\gamma C_{22}}\frac{\pi}{4}\frac{C_1}{2}\frac{1}{4C_{22}}}$ e dove ancora una volta abbiamo usato la possibilita' di poter scegliere $l\gamma^{\frac{h}{2}}$ opportunamente piccolo (abbastanza perche' $lC_{24}\gamma^{\frac{h}{2}} < \frac{1}{10\sqrt{2}}$). E' ancora possibile stimare con costante la derivata che compare nella (A7.36); scegliendo $l\gamma^{\frac{h}{2}}$ in modo che $lC_{23}\gamma^{\frac{h}{2}} < \frac{11}{100\sqrt{2}}$ otteniamo che α puo' appartenere a $\frac{100\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{5359}}l$ settori angolari.

(b) Sia $|\mathbf{a}| < \frac{\pi}{4}C_1\gamma^j$; in questo caso si ha $\gamma^j = l\frac{8C_{21}}{\pi C_1}o(\gamma^{\frac{h}{2}})$ (vedi (A7.31)) e $|\mathbf{a}| = lC_{21}o(\gamma^{\frac{h}{2}})$. Dato che $|\mathbf{a}|$ puo' essere vicino a zero quanto vuole, sembra impossibile fissare α in un numero prefissato di settori. Possiamo pero' usare l' osservazione fatta prima della (A7.8) per controllare il numero totale di scelte da fare.

Abbiamo completato la stima del numero di modi in cui si possono scegliere gli $l-1$ vettori ω in modo tale che la (A7.1) sia rispettata quando j e' fissato ad un dato valore.

Ci rimane da sommare su j il risultato ottenuto.

Mettendo insieme tutti i risultati della discussione precedente abbiamo che il modo di scegliere gli $l-1$ settori a j fissato e' stimato da

$$\begin{aligned} &\min\{\Omega, C_3l\gamma^j\} \frac{\gamma^{-\frac{h}{2}}}{2\pi} \left(\min\{\Omega, 4\frac{\pi}{2}\gamma^j\} \frac{\gamma^{-\frac{h}{2}}}{2\pi} \right)^{l-4} \left(\frac{2C_{12}l}{2\pi} \frac{2l^2}{2\pi} \max\{C_{17}, C_{20}\} + \right. \\ &+ \left. \frac{16}{\sqrt{31}\pi} l\sqrt{C_8^2+C_9^2} \max\left\{ \frac{10}{8} \frac{C_{23}l}{2\pi}, \frac{100\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{5359}} \right\} \right) + \\ &+ \left(\min\{\Omega, 4\frac{\pi}{2}\gamma^j\} \frac{\gamma^{-\frac{h}{2}}}{2\pi} \right)^{l-4} \cdot \\ &\cdot \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{4} \frac{C_1}{2} \frac{16}{\sqrt{31}\pi} l\sqrt{C_8^2+C_9^2} \frac{\gamma^{-\frac{h}{2}}}{2\pi} \chi(\gamma^j < l\frac{8C_{21}}{\pi C_1}\gamma^{\frac{h}{2}}) \end{aligned} \tag{A7.38}$$

dove l' ultimo addendo tiene conto del caso 2b discusso sopra.

Il contributo della somma su j sull' ultimo termine e' stimato da

$$\left(\Omega \frac{\gamma^{-\frac{h}{2}}}{2\pi} \right)^{l-3} \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{4} \frac{C_1}{2} \frac{16}{\sqrt{31}\pi} l\sqrt{C_8^2+C_9^2} \left(\log_\gamma \frac{8lC_{21}}{\pi C_1} - 2 \right) \tag{A7.39}$$

Per stimare il contributo del primo termine conviene riscrivere la somma

$$\sum_{\frac{h}{2}+3 \leq j \leq 0} \min\{\Omega, C_3l\gamma^j\} \left(\min\{\Omega, 4\frac{\pi}{2}\gamma^j\} \right)^{l-4} \tag{A7.40}$$

nel seguente modo:

$$A7.37b \quad \left(\sum_{\Omega > C_3 l \gamma^j} + \sum_{\frac{\pi}{4} \gamma^j \leq \Omega \leq C_3 l \gamma^j} + \sum_{\Omega < \frac{\pi}{4} \gamma^j} \right) \min\{\Omega, C_3 l \gamma^j\} \left(\min\{\Omega, 4 \frac{\pi}{2} \gamma^j\} \right)^{l-4} \quad (A7.41)$$

dove si sottintende che le somme vanno eseguite anche con il vincolo $\frac{h}{2} + 3 \leq j \leq 0$.

Il contributo del termine $\sim \sum_{\Omega > C_3 l \gamma^j} e^j$

$$A7.37c \quad \sum_{\Omega > C_3 l \gamma^j} C_3 l (2\pi)^{l-4} (\gamma^{l-3})^j \leq \left(\frac{\Omega}{C_3 l} \right)^{l-3} C_3 l (2\pi)^{l-4} \frac{\gamma^{l-3}}{\gamma^{l-3}-1} \leq \Omega^{l-3} (2\pi)^{l-4} \frac{\gamma}{\gamma-1} \quad (A7.42)$$

Il contributo del termine $\sim \sum_{\frac{\pi}{4} \gamma^j \leq \Omega \leq C_3 l \gamma^j} e^j$ minore di

$$A7.37d \quad \Omega^{l-3} \log_{\gamma} \frac{4C_3 l}{\pi} \quad (A7.43)$$

Infine la somma $\sum_{\Omega < \frac{\pi}{4} \gamma^j}$ ha al massimo $2(1 + \log_{\gamma} 2)$ addendi non nulli.

Infatti j deve essere compatibile con le condizioni:

$$A7.38 \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{4} \gamma^j &\leq \varphi' < \frac{\pi}{4} \gamma^{j+1} \\ \frac{\pi}{4} \gamma^j &> \Omega \end{aligned} \quad (A7.44)$$

dove φ' e' della forma $\varphi' = m\Omega + o(\Omega)$ per qualche intero m compreso tra 0 e $\gamma^{-\frac{h}{2}}$.

Ma allora le (A7.44) sono equivalenti alle condizioni

$$A7.39 \quad \begin{aligned} m \frac{\Omega}{\gamma} + o\left(\frac{\Omega}{\gamma}\right) &\leq \frac{\pi}{4} \gamma^j \leq m\Omega + o(\Omega) \\ \frac{\pi}{4} \gamma^j &> \Omega \end{aligned} \quad (A7.45)$$

Vediamo che, affinche' le due condizioni in (A7.45) siano tra loro compatibili, $m \neq 0$. Supponiamo che le (A7.45) siano soddisfatte da una certa scelta $j = \bar{j}$ e domandiamoci quali sono i possibili j_0 tali che anche la scelta $j = \bar{j} + j_0$ soddisfi le (A7.45).

Vediamo subito che la prima delle (A7.45) implica che $(m-1 + \delta_{m,1}) \frac{\Omega}{\gamma} < \frac{\pi}{4} \gamma^j < (m+1)\Omega$. Ma allora la condizione perche' le (A7.45) valgano per $j = \bar{j} + j_0$ e' che $\frac{(m-1+\delta_{m,1})}{(m+1)\gamma} < \gamma^{j_0} < \frac{(m+1)\gamma}{(m-1+\delta_{m,1})}$ e quindi, calcolando il massimo di $\frac{(m-1+\delta_{m,1})}{(m+1)\gamma}$ sugli $m \geq 1$, troviamo che j_0 puo' assumere al massimo $2(1 + \log_{\gamma} 2)$ valori.

Quindi in definitiva il contributo del termine $\sim \sum_{\Omega < \frac{\pi}{4} \gamma^j} e^j \Omega^{l-3} 2(1 + \log_{\gamma} 2)$.

Mettendo insieme tutti i contributi otteniamo che il numero di (l-1)-ple di settori compatibili con le (A7.1) e' stimato, come voluto, da $Cl^4 \left(\Omega \gamma^{-\frac{h}{2}} \right)^{l-3}$.

Se $\gamma = 2$ possiamo scegliere $C = 1317$ e $\varepsilon = 2 * 10^{-7}$ (come si puo' verificare calcolando esplicitamente le costanti numeriche che abbiamo incontrato nella dimostrazione).■

p.A7.2 A7.2.Dimostrazione del Lemma A7.1

In questa sezione vogliamo dimostrare il Lemma A7.1, che fornisce una stima del conteggio dei settori (come

quello del Teorema 6.1) nel caso di $\alpha \leq 1$. Come gia' accennatto nelle osservazioni al Teorema 6.1 riportate nel Capitolo 6, nel caso in cui $\alpha \leq 1$ compare nella stima sul numero di settori un fattore logaritmico $|h|$, se h e' la scala dei settori angolari. La dimostrazione del Lemma si basa su quella del Lemma 2 in [FMRT]. Mentre la' pero' si trattava specificatamente il caso $\alpha = 1$, qua si tratta genericamente il caso $\alpha \leq 1$.

LEMMA A7.1 Sia $d=2$ e $l \geq 2$. Sia \mathcal{P} una partizione della corona circolare di raggi $1 - \gamma^h$ e $1 + \gamma^h$, $h < 0$ in $\gamma^{-\alpha h}$ settori angolari σ_i uguali fra loro, dove α e' tale che $0 \leq \alpha \leq 1$.

Il numero N_l di $(2l)$ -uple di settori compatibili con le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{k}_i \in \sigma_i \cap \Omega_i \quad i = 1, \dots, 2l \\
 & \sum_{i=1}^{2l} \mathbf{k}_i \equiv \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{A7.46}$$

e' stimato da

$$C^l (\gamma^{-\alpha h})^{2l-2} \{1 + |h| \delta_{l,2}\} \tag{A7.47}$$

per qualche costante C .

Dimostrazione. La somma di $2l$ vettori \mathbf{k}_i con modulo vicino a 1 entro γ^h puo' essere nulla solo se la somma dei primi $2l - 1$ vettori ha modulo vicino a 1 entro γ^h . Quindi possiamo stimare N_l con il numero N'_l di $(2l-1)$ -ple di settori compatibili con le seguente condizioni:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{k}_i \in \sigma_i \cap \Omega_i \quad i = 1, \dots, 2l - 1 \\
 & \left| \sum_{i=1}^{2l-1} \mathbf{k}_i \right| \leq 2\gamma^h
 \end{aligned} \tag{A7.48}$$

Una volta volta fissata una configurazione di vettori $k_i \in \sigma_i$, $i = 1, \dots, 2l - 1$ tale che $\left| \sum_{i=1}^{2l-1} \mathbf{k}_i \right| \leq 2\gamma^h$, lasciando variare liberamente i vettori k_i nei settori σ_i di ampiezza $\gamma^{\alpha h}$ si otterranno configurazioni tali che $\left| \sum_{i=1}^{2l-1} \mathbf{k}_i \right| \leq 2\gamma^h + Cl\gamma^{\alpha h}$. Quindi possiamo ancora stimare N'_l con il numero \mathcal{N}_l di $(2l-1)$ -ple di settori compatibili con la seguente condizione:

$$\{\mathbf{k}_i \in \sigma_i \cap \Omega_i \quad i = 1, \dots, 2l - 1\} \rightarrow \left| \sum_{i=1}^{2l-1} \mathbf{k}_i \right| \leq Cl\gamma^{\alpha h} \tag{A7.49}$$

per qualche costante C . E' facile rendersi conto che, dato che i settori hanno ampiezza $2\pi\gamma^{\alpha h}$,

$$\mathcal{N}_l \leq C^l \gamma^{-\alpha h(2l-1)} \int \prod_{i=1}^{2l-1} d\mathbf{k}_i \delta(|\mathbf{k}_i| - 1) f(|\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_{2l-1}|) \tag{A7.50}$$

dove $f(|\mathbf{k}|)$ e' una funzione C^∞ a supporto compatto, uguale a 1 se $||\mathbf{k}| - 1| \leq C\gamma^{\alpha h}$ e uguale a 0 se $||\mathbf{k}| - 1| \geq 2C\gamma^{\alpha h}$. Per semplicita' stiamo chiamando tutte le costanti con C , anche se in effetti sarebbe necessaria una costante diversa per ogni stima. Per convincersi della validita' della (A7.50) basta notare che, assegnando una $(2l-1)$ -pla di settori σ_i compatibili con la (A7.49), l' espressione a secondo membro nella (A7.50) conta almeno con 1 questa configurazione.

Sia $\hat{f}(|\mathbf{t}|)$ la trasformata di Fourier di $f(|\mathbf{k}|)$:

$$\hat{f}(|\mathbf{t}|) = \int d\mathbf{k} e^{-it\mathbf{k}} f(|\mathbf{k}|) \tag{A7.51}$$

Allora possiamo riscrivere la (A7.50) nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_l &\leq C^l \gamma^{-\alpha h(2l-1)} \int \prod_{i=1}^{2l-1} d\mathbf{k}_i \delta(|\mathbf{k}_i| - 1) \int d\mathbf{t} e^{i\mathbf{t}(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_{2l-1})} \hat{f}(|\mathbf{t}|) = \\
 &C^l \gamma^{-\alpha h(2l-1)} \int d\mathbf{t} J_0(|\mathbf{t}|)^{2l-1} \hat{f}(|\mathbf{t}|)
 \end{aligned} \tag{A7.52}$$

dove $J_0(|x|)$ e' la funzione di Bessel di ordine 0:

$$J_0(|x|) \equiv \int d\theta e^{ix \cos \theta} \tag{A7.53}$$

E' noto [S] che la funzione di Bessel $J_0(x)$ puo' essere stimata nel modo seguente:

$$|J_0(|x|)| \leq \begin{cases} C, & \text{se } |x| \leq 1, \\ \frac{C}{\sqrt{|x|}}, & \text{se } |x| > 1. \end{cases} \tag{A7.54}$$

per qualche costante C . Per stimare la (A7.52) abbiamo bisogno anche di una stima su $\hat{f}(|\mathbf{t}|)$. Se $|\mathbf{t}| \leq 1$ si trova

$$|\hat{f}(|\mathbf{t}|)| = \left| \int |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}| J_0(|\mathbf{t}||\mathbf{k}|) f(|\mathbf{k}|) \right| \leq C \gamma^{\alpha h} \quad |\mathbf{t}| \leq 1 \tag{A7.55}$$

Se invece $|\mathbf{t}| > 1$ abbiamo:

$$|\hat{f}(|\mathbf{t}|)| = \left| \int |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}| J_0(|\mathbf{t}||\mathbf{k}|) f(|\mathbf{k}|) \right| \leq C \gamma^{\alpha h} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{t}|}} \tag{A7.56}$$

o anche

$$|\mathbf{t}^2 \hat{f}(|\mathbf{t}|)| = \left| \int |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}| J_0(|\mathbf{t}||\mathbf{k}|) \partial_{\mathbf{k}}^2 f(|\mathbf{k}|) \right| \leq C \gamma^{-\alpha h} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{t}|}} \tag{A7.57}$$

Mettendo insieme le due stime (A7.55), (A7.56) si trova:

$$|\hat{f}(|\mathbf{t}|)| \leq C \gamma^{(1-2\varepsilon)(\alpha h)} |\mathbf{t}|^{-(\frac{1}{2}+2\varepsilon)} \tag{A7.58}$$

Per qualsiasi $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Iniziamo a considerare il caso $l > 2$; sostituiamo le (A7.55) e (A7.54) nella (A7.52). Si ottiene:

$$\mathcal{N}_l \leq C^l \gamma^{-\alpha h(2l-1)} \int_{|\mathbf{t}|>1} d\mathbf{t} |\mathbf{t}|^{-\frac{2l-1}{2}} \gamma^{\alpha h} |\mathbf{t}|^{-\frac{1}{2}} \leq C^l \gamma^{-\alpha h(2l-1)} \gamma^{\alpha h} = C^l \gamma^{-\alpha h(2l-2)} \tag{A7.59}$$

che e' la stima voluta. Se invece $l = 2$ usiamo la (A7.58) che, sostituita nella (A7.52), ci da':

$$\mathcal{N}_2 \leq C \gamma^{-3\alpha h} \int_{|\mathbf{t}|>1} d\mathbf{t} |\mathbf{t}|^{-\frac{3}{2}} \gamma^{(1-2\varepsilon)(\alpha h)} |\mathbf{t}|^{-(\frac{1}{2}+2\varepsilon)} = C \gamma^{-2\alpha h} \frac{\gamma^{2\varepsilon|h|}}{2\varepsilon} \tag{A7.60}$$

Scegliendo, nell' ultima riscrittura della (A7.60), $2\varepsilon|h| = 1$ troviamo:

$$\mathcal{N}_2 \leq C \gamma^{-2\alpha h} |h| \tag{A7.61}$$

che e' la relazione voluta. ■

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il prof. Giovanni Gallavotti per la disponibilita' con cui mi ha seguito nel corso dell'intero lavoro.

Ringrazio il Dott. Federico Bonetto per molte interessanti discussioni.

Un particolare ringraziamento va ai prof. Vieri Mastropietro e Giuseppe Benfatto per tutto l' aiuto e i consigli che mi hanno dato.

Bibliografia

- [A] P. W. Anderson: *The theory of superconductivity in high- T_c cuprates*, Princeton Press, Princeton, 1997
- [BG1] G. Benfatto, G. Gallavotti: *Perturbation theory of the Fermi surface in a quantum liquid. A general quasiparticle formalism and one dimensional systems*, J. Statist. Phys. **59** (1990), No. 3-4, 541-664.
- [BG2] G. Benfatto, G. Gallavotti: *Renormalization Group*, Physics Notes **1**, Princeton University Press, Princeton, 1995.
- [BGPS] G. Benfatto, G. Gallavotti, A. Procacci, B. Scoppola: *Beta functions and Schwinger functions for a many fermion system in one dimension*, Comm. Math. Phys. **160**, 93-171 (1994)
- [BM] G. Benfatto, V. Mastropietro: *Renormalization group, hidden symmetries and approximate Ward identities in the XYZ model*, I e II, Preprint (1999)
- [Bo] F. Bonetto: *Indici critici per sistemi fermionici in una dimensione*, Tesi di Dottorato in Matematica, (La Sapienza, 1995)
- [DR1] M. Disertori, V. Rivasseau: *Interacting Fermi in two dimensions at finite temperature*, I, Commun. Math. Phys. **215**, 251-290 (2000)
- [DR2] M. Disertori, V. Rivasseau: *Interacting Fermi in two dimensions at finite temperature*, II, Commun. Math. Phys. **215**, 251-290 (2000)
- [FMRT] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau, E. Trubowitz: *An infinite volume expansion for many fermions Green functions*, Helv. Phys. Acta **65**, 679-721 (1992)
- [H] K. Huang: *Statistical mechanics*, John Wiley & sons, New York-London, 1963
- [KL] W. Kohn, J. M. Luttinger: *New mechanism for superconductivity*, Phys. Rev. Lett., **15**, 12, 524-526 (1965)
- [L] A. Lesniewski: *Effective action for the Yukawa₂ quantum field theory*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), 437-467
- [L3] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Fisica teorica 3: Meccanica quantistica: teoria non relativistica*, Editori riuniti, Roma, (MIR, Mosca), 1991, 2^a edizione
- [L9] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Fisica teorica 9: Fisica statistica: teoria dello stato condensato*, Editori riuniti, Roma, (MIR, Mosca), 1991, 2^a edizione
- [LM] E. H. Lieb, D. Mattis: *Mathematical physics in one dimension: exactly soluble models of interacting particles*, Academic Press, New York, 1996
- [Lu] J. M. Luttinger: *An exactly soluble model of a many fermions system*, J. Math. Phys. **4**, 1154-1162 (1963)
- [G1] G. Gallavotti: *Some aspects of the renormalization problems in statistical mechanics*, Mem. Acc. Lincei **15** 23 (1978)
- [G2] G. Gallavotti: *Renormalization theory and ultraviolet stability for scalar fields via renormalization group methods*, Reviews of Modern Physics, **57**, 471-562 (1985)
- [GM] G. Gentile, V. Mastropietro: *Renormalization group for one-dimensional fermions. A review on mathematical results*, Preprint (2000)
- [GN] G. Gallavotti, F. Nicoló: *Renormalization theory for four dimensional scalar fields*, I, Comm. Math. Phys. **100** (1985), 545-590; II, Comm. Math. Phys. **101** (1985), 471-562.
- [M] S. Ma: *Modern theory of critical phenomena*, Benjamin Reading
- [S] V. I. Smirnov: *Corso di matematica superiore Volume 3*, Editori riuniti, Roma, 1977
- [Sa] M. Salmhofer: *Continuous renormalization for fermions and Fermi liquid theory*, Comm. Math. Phys. **194**, 249-295 (1998)
- [ZJ] J. Zinn-Justin: *Quantum field theory and critical phenomena*, Clarendon press, Oxford, 1989