Dossier sui grafi

Marco Liverani

Rappresentare le relazioni esistenti tra persone, aziende, gruppi, schematizzare gli elementi di una rete di comunicazione, raffigurare percorsi, identificare le fasi di un processo complesso e le dipendenze presenti tra le varie attività... cosa c'entra la Matematica con tutto questo? C'entra eccome! Grazie alla ***teoria dei grafi***, è stato possibile sviluppare settori e intere branche della Matematica e dell'Informatica che trovano applicazione in moltissimi ambiti tecnologici e di supporto all'analisi delle informazioni e delle scelte da intraprendere per migliorare processi organizzativi e sociali.

La ***teoria dei grafi*** costituisce un territorio di confronto e di collaborazione tra esperti di differenti discipline, che naturalmente trovano l'opportunità di affrontare l'argomento con punti di vista certamente complementari: dalla geometria all'ottimizzazione combinatoria, alla matematica discreta fino alla teoria degli algoritmi, sono veramente numerose le aree della matematica che offrono l'opportunità di occuparsi di grafi.

In queste pagine cercheremo di esemplificare alcuni di questi ambiti, senza l'ambizione di riuscire ad essere esaustivi, ma con l'intento di offrire delle suggestioni significative ed efficaci.

La ricerca della via più breve

*Trovare il **percorso migliore per far comunicare due computer in rete**, individuare **la strada più breve per raggiungere una certa destinazione** a partire da un luogo ben preciso su una rete stradale... problemi abbastanza comuni che ci piacerebbe, da matematici, poter affrontare con il conforto di una "teoria" in grado di offrire strumenti, linguaggi, proprietà che ci permettano di costruire soluzioni con solide fondamenta.*

Provando a ragionare su questo tipo di problemi, molti finirebbero, prima o dopo, per tracciare su un foglio di carta uno schema, un diagramma, in cui gli oggetti (siano essi computer di una rete o gli snodi di una rete stradale), raffigurati come punti, sono collegati fra loro da linee che rappresentano le relazioni fra di essi: i collegamenti di rete tra due calcolatori, le strade di collegamento tra un punto ed un altro in una rete viaria, ecc. Punti collegati a due a due da linee... Accidenti, ma questo tipo di diagramma, molto comune a dire il vero, non è altro che un grafo! O meglio, è una rappresentazione grafica sul piano (il nostro foglio di carta) di un oggetto matematico astratto chiamato *grafo*.

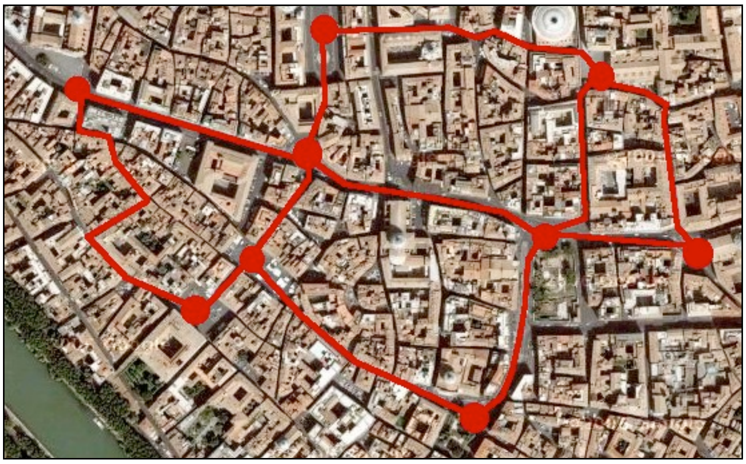

Figura 1: Una vista aerea del centro di Roma

Qualche punto e qualche linea... ed ecco un grafo!

Un ***grafo*** è un oggetto costituito da una coppia di insiemi finiti: l'insieme V dei punti, i cui elementi sono chiamati ***vertici*** o anche *nodi*, e l'insieme E delle linee che uniscono alcune coppie di vertici del grafo, i cui elementi sono chiamati ***spigoli*** o *archi*. In genere il grafo viene indicato con l'espressione $G = (V, E)$.

Ad esempio in Figura 2 è rappresentato il grafo G il cui insieme dei vertici è $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e il cui insieme degli spigoli è dato dalle seguenti coppie di vertici: $E = \{(1,2), (1,5), (2,3), (2,4), (3,4), (3,5), (4,5)\}$.

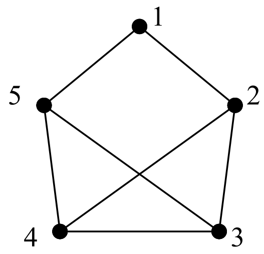

Figura 2: Un grafo non orientato con n=5 vertici

Passeggiando da un vertice all'altro sugli spigoli di un grafo...

Esaminiamo il grafo riportato in Figura 2 e, con un esempio sotto mano, proviamo ad aggiungere qualcosa a proposito dei collegamenti stabiliti tra i vertici mediante gli spigoli.

In generale non tutte le coppie di vertici del grafo sono connesse da uno spigolo (ad esempio i vertici 2 e 5 del grafo in Figura 2 non sono collegati da uno spigolo): se uno spigolo collega due vertici u e v allora u e v si dicono ***adiacenti***.

Sebbene non esista uno spigolo che collega i vertici 2 e 5, è pur vero che esistono numerose "strade" per raggiungere il vertice 2 a partire dal vertice 5: ad esempio si potrebbe passare per il vertice 4 e poi per il 3, oppure per il vertice 1... Una successione di vertici a due a due adiacenti che, partendo da un vertice u raggiunge il vertice v, si chiama ***cammino*** da u a v: ad esempio la sequenza 5, 3, 4, 2, 1 è un cammino dal vertice 5 al vertice 1 nel grafo di Figura 2. Di certo non è il cammino più breve, dal momento che per andare da 5 ad 1 è sufficiente percorrere lo spigolo (5,1). La ***lunghezza di un cammino*** è data infatti dal numero degli spigoli che lo compongono: un cammino di lunghezza 1 è formato da un solo spigolo. A proposito: un cammino di lunghezza 1 che va da un vertice in se stesso è chiamato ***cappio***, mentre se il cammino che va da un vertice e torna in se stesso è costituito da più di uno spigolo, allora lo chiameremo ***ciclo***. Il grafo G rappresentato in Figura 2 contiene numerosi cicli: ad esempio (1,2,3,4,5,1), (2,3,4,2), (1,2,4,3,5,1) solo per elencarne alcuni.

Una via qualsiasi, la via più breve e la più veloce

Bene, sembrerebbe proprio di essere riusciti a raccogliere qualche concetto per formalizzare meglio i problemi che abbiamo tratteggiato all'inizio del nostro discorso: la ricerca del percorso più breve tra due punti in una rete stradale o l'individuazione della migliore via di comunicazione tra due nodi di una rete di computer. Dunque i computer della rete (Figura 3) e i punti di snodo sulla rete stradale (Figura 1) costituiscono l'insieme dei vertici di un grafo, mentre i collegamenti diretti fra di essi compongono l'insieme degli spigoli. Il problema allora può essere riformulato nei seguenti termini: fissati due vertici sul grafo G, qual è il cammino più breve che li unisce? È bene precisare che non si sta chiedendo soltanto se esiste un cammino che collega i due vertici selezionati, né tanto meno di individuare un cammino qualsiasi tra i due vertici: si sta chiedendo di trovare il "migliore" tra tali cammini, il più breve, un cammino "ottimo".

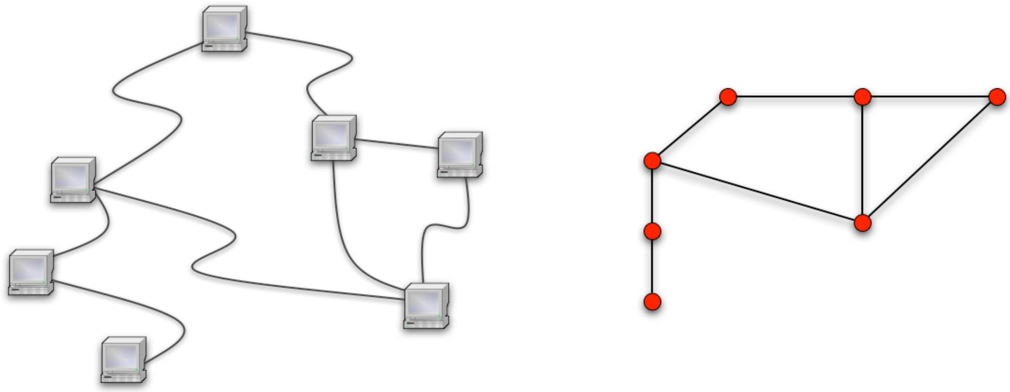

Figura 3: Una rete di computer può essere rappresentata con un grafo

Problemi di questo tipo sono noti come ***problemi di ottimizzazione***; se le quantità con cui abbiamo a che fare, come nel caso dei grafi o di altri problemi di carattere combinatorio, sono discrete, non continue, allora si parla di problemi di ottimizzazione discreta o anche di ***ottimizzazione combinatoria***.

A prima vista il problema non sembra difficilissimo: si potrebbe tentare qualche combinazione nella sequenza degli spigoli che costituiscono i cammini da u a v tra quelle "più promettenti" e in poco tempo si potrebbe riuscire ad individuare la via più breve. Oppure, se fosse difficile selezionare le vie "più promettenti", potremmo addirittura provare a costruirle tutte e fra queste individueremmo sicuramente quelle con la lunghezza minima. D'altra parte non stiamo cercando la soluzione su un insieme continuo, in cui i valori possibili sono infiniti, stiamo lavorando su un insieme discreto, di cardinalità finita (l'insieme degli spigoli del grafo), per cui anche un procedimento di ricerca "esaustiva" potrebbe andar bene...

Tutto questo potrebbe pure apparire ragionevole, ma prima di trarre delle conclusioni, facciamo due conti. Quanti sono i possibili cammini distinti tra due vertici di un grafo? Non è immediato rispondere a questa domanda, dipende naturalmente dal numero di vertici e di spigoli del grafo, ma anche dalla struttura "densa" oppure "sparsa" del grafo stesso. Ad esempio nel grafo rappresentato in Figura 4, pur essendo piuttosto semplice e costituito da soli 6 vertici, sono presenti ben 20 cammini differenti che collegano il vertice 1 con il vertice 4, senza passare due volte per lo stesso punto.

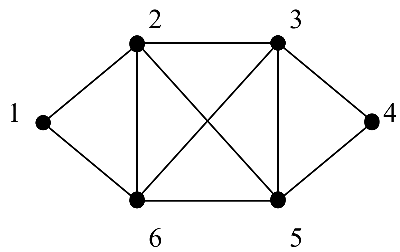

Figura 4: In questo grafo esistono 20 cammini semplici (che non passano due volte per lo stesso punto) distinti che collegano il vertice 1 con il vertice 4

È facile immaginare quindi che il numero di cammini distinti tra due vertici di un grafo più grande, come ad esempio quello che rappresenta i tratti di ferrovia che collegano le stazioni della metropolitana di Londra (Figura 5), possa crescere enormemente: non solo i cammini sono veramente molti, ma per di più comincia ad essere difficile costruirli... C'è bisogno di un procedimento di calcolo che non ci faccia perdere troppo tempo e che, eventualmente, possa essere automatizzato: d'altra parte dovrà pur esserci un meccanismo di calcolo automatico alla base dei navigatori satellitari installati sulle automobili di lusso che sono in grado di indicarci la strada più breve per raggiungere la nostra destinazione!

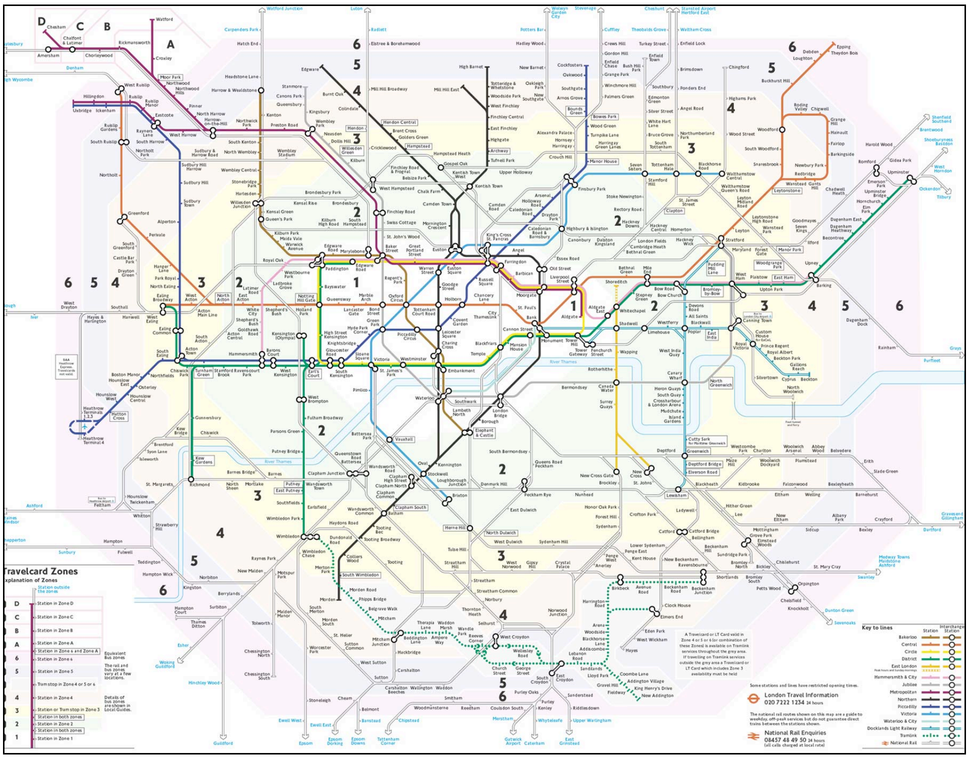

Figura 5: La mappa della metropolitana di Londra

Dobbiamo escogitare un ***algoritmo***, un procedimento di calcolo basato su un numero finito di passi elementari, in grado di produrre la soluzione dopo aver eseguito un numero finito di operazioni.

Un algoritmo per trovare la via più breve

Iniziamo con il costruire un procedimento che ci permetta di individuare il cammino più breve tra due vertici *a* e *b* di un grafo, considerando per ora come lunghezza del cammino il numero degli spigoli che lo compongono.

L'idea di fondo, molto semplice ed elegante come spesso accade per le buone idee, è quella di allontanarci sempre più dal vertice di partenza *a*, percorrendo tutte le possibili strade che si diramano da tale vertice, fino ad incontrare il punto di destinazione *b*. Nel costruire tutti i percorsi *uscenti* da *a* dovremo fare attenzione a scartare le strade che passano per un vertice già incontrato lungo un altro cammino: in tal caso vorrà dire che esiste almeno un altro cammino non più lungo per raggiungere quel punto. Nel procedere "esplorando" il grafo, dovremo lasciare traccia delle strade che stiamo percorrendo ed anche dei vertici che abbiamo già incontrato, in modo da non percorrere due volte gli stessi spigoli o di passare due volte per lo stesso vertice, introducendo degli inutili *cicli* nel cammino che stiamo costruendo.

Per questo motivo, durante l'esplorazione del grafo, coloreremo i vertici in modo da contrassegnarne lo "stato" ed evitare di ritornare più volte nello stesso punto. In particolare i vertici saranno inizialmente tutti colorati di bianco (vertice "sconosciuto"), poi ogni volta che incontreremo un vertice v sconosciuto lo coloreremo di rosso (vertice "scoperto") e, infine, quando avremo scoperto tutti i vertici adiacenti a v lo coloreremo di rosso (vertice "visitato").

In Figura 6 riportiamo i passi del procedimento con cui intendiamo costruire il cammino più breve per raggiungere il vertice b a partire dal vertice a sul grafo G.

1. Colora di bianco tutti i vertici del grafo
2. Colora di rosso il vertice a (il punto di partenza) e indica la sua distanza con $d(a) = 0$
3. Scopri tutti i vertici v adiacenti ad a e colorali di rosso; indica la loro distanza con $d(v) = d(a) + 1$
4. Colora di blu il vertice a
5. Prendi in esame ad uno ad uno tutti i vertici v che sono stati colorati di rosso e scopri tutti i vertici u adiacenti a v che sono ancora bianchi
6. Colora di rosso ogni vertice u adiacente a v che sia bianco e poni $d(u) = d(v) + 1$
7. Quando saranno stati scoperti tutti vertici u adiacenti a v colora v di blu
8. Ripeti il procedimento ai passi 5, 6 e 7 fino a quando non sarà stato scoperto il vertice b di destinazione

Figura 6: Algoritmo per la visita in ampiezza del grafo G a partire dal vertice a

Il procedimento, costruito sulla falsa riga del ben noto algoritmo "BFS" (*breadth first search*) per la ***visita in ampiezza*** di un grafo, procede percorrendo tutti gli spigoli uscenti da a e raggiungendo così nel modo più veloce i vertici v_i adiacenti ad a. Se nessuno di tali vertici è la destinazione b del nostro cammino, il procedimento ricomincia da capo da ciascuno dei vertici v_i, raggiungendo, per ognuno di essi, i vertici v_j adiacenti a v_i che non siano già stati incontrati precedentemente. La procedura prosegue in questo modo fino a quando non viene incontrato il vertice b, oppure fino a quando non siano state esaurite tutte le possibili strade uscenti da a senza che b sia stato incontrato: in quest'ultimo caso evidentemente il cammino che conduce da a a b non esiste.

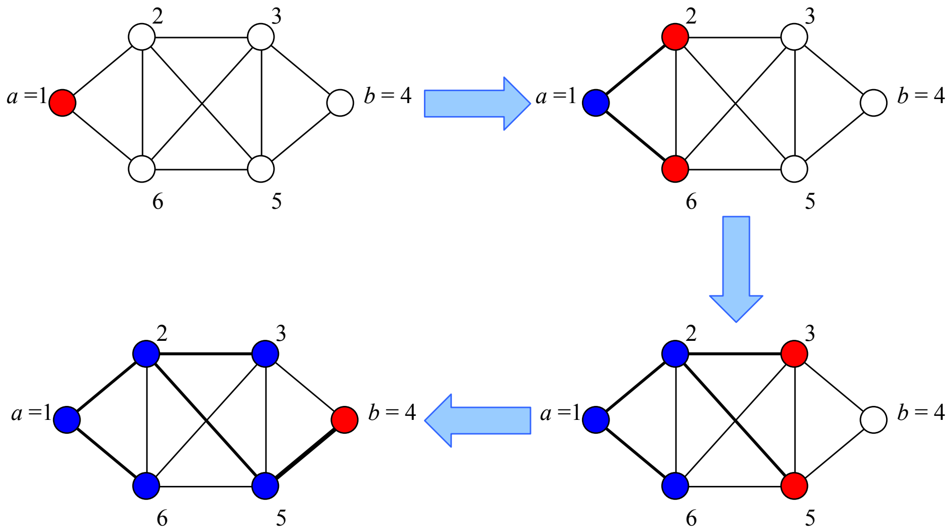

Figura 7: I passi principali nella costruzione del cammino minimo dal vertice *a* al vertice *b*

In Figura 7 sono riportati i passi principali dell'algoritmo applicato ad un grafo con 6 vertici. Il cammino individuato, 1→2→5→4, ha lunghezza 3 ed è equivalente ad altri cammini di uguale lunghezza, come 1→2→3→4, 1→6→5→4 e 1→6→3→4; tali cammini equivalenti potevano essere individuati con lo stesso procedimento prendendo in esame i vertici con un ordine differente. Altri cammini più lunghi, come ad esempio 1→2→6→3→4 (di lunghezza 4) sarebbero stati scartati in ogni caso, indipendentemente dall'ordine con cui l'algoritmo prende in esame i vertici del grafo al passo 5.

Cosa succede se, invece di considerare tutti gli spigoli del grafo equivalenti fra di loro, si assegna ad ognuno un "peso" con cui viene rappresentata la sua lunghezza o la velocità di percorrenza del tratto di strada corrispondente? Se gli spigoli rappresentano delle vie di comunicazione stradali o dei collegamenti telematici allora, nel cercare la via più breve per collegare due punti, è opportuno tenere conto delle distanze chilometriche effettive, dei limiti di velocità o del traffico presente, o della "banda" disponibile per una trasmissione di dati sui diversi canali di comunicazione.

Il problema cambia in modo abbastanza radicale: per comprendere meglio la nuova configurazione che si viene a creare analizziamo la porzione di grafo "pesato" rappresentato in Figura 8.

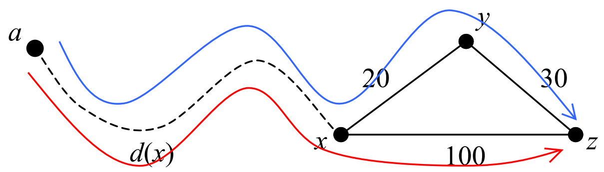

Figura 8: Una schematizzazione dei cammini che raggiungono *z* a partire da *a* passando per *x* e per *y*

Supponiamo che il cammino più breve per raggiungere il vertice x partendo da a sia il cammino p di lunghezza $d(x)$. Da x si può raggiungere z percorrendo uno spigolo di lunghezza 100: per cui il cammino p può essere prolungato fino a z aggiungendo anche lo spigolo (x, z); tale cammino avrà una lunghezza pari a $d(x)+100$. Allora, sebbene il cammino sia composto da uno spigolo in più, osservando il disegno in Figura 8 risulta evidente che, per raggiungere z partendo da a, è più conveniente passare per il vertice y, visto che in questo caso il cammino p' individuato ha un peso complessivo pari a $d(x) + 20 + 30 < d(x) + 100$.

Proprio su questa intuizione si basa il famoso algoritmo di **Edsger W. Dijkstra**, un matematico e informatico olandese che, nel 1959, pubblicò un articolo in cui propose uno degli algoritmi più eleganti ed efficienti tutt'ora conosciuti per la soluzione del problema della ricerca del cammino minimo su un grafo pesato.

Edsger Wybe Dijkstra

Edsger Wybe Dijkstra è stato uno dei pionieri dell'informatica e della teoria degli algoritmi. Nacque in Olanda, a Rotterdam, nel 1930 ed è morto nell'agosto del 2002. Nella sua lunga e proficua carriera di informatico e di docente universitario, si è occupato, oltre che di metodi risolutivi efficienti per problemi interessanti come quello dei cammini minimi su un grafo, anche della definizione di approcci innovativi alla programmazione, scevri da tecnicismi in grado di limitare l'astrazione e l'eleganza nella codifica di algoritmi per la risoluzione di problemi.

Oltre che un grande scienziato, E.W. Dijkstra fu anche un abile divulgatore ed un insegnante appassionato, guidato nella sua attività e nella presentazione delle sue idee, dai principi di semplicità ed eleganza. In particolare, oltre che per l'algoritmo che porta il suo nome a cui abbiamo fatto cenno in queste pagine, è noto come uno degli autori del linguaggio di programmazione Algol 60 e per la sua strenua avversione nei confronti dell'istruzione di *salto incondizionato* (il cosiddetto "go-to") molto usata nella programmazione fino all'avvento dei linguaggi di programmazione strutturata.

Nel 1972 vinse il "Premio Turing", che può essere considerato come una sorta di Premio Nobel per gli informatici.

All'annosa questione se i computer potranno mai compiere ragionamenti autonomi, Dijkstra rispose con una battuta, dicendo che "chiedersi se un computer potrà mai pensare è un po' come interrogarsi sulla possibilità che un sommergibile impari a nuotare"!

A spasso per la città di Königsberg

Prussia orientale: un'antica città dal passato importante, un fiume che la attraversa, dei ponti e un aneddoto che parla di un problema semplice, ma intrigante e di non facile soluzione. Fino a quando, un famoso matematico...

Facciamo un passo indietro nel tempo, spostiamoci nel 1736 a Königsberg, nella Prussia orientale, una città che ha visto nascere alcuni dei più grandi pensatori dell'epoca moderna: tra questi il filosofo Immanuel Kant, il matematico David Hilbert e, più indietro nel tempo, il matematico Kristian Goldbach, tutore dello Zar Pietro II. Oggi Königsberg si chiama Kaliningrad e fa parte della Repubblica Russa, e come allora è attraversata dal fiume Pregel. Nel 1736 a Königsberg c'erano ben sette ponti che attraversavano da una sponda all'atra il fiume, collegando fra loro le diverse zone della città. La tradizione (ma forse è una storia di pura fantasia) narra che a quel tempo i ragazzi di Königsberg si sfidassero nella ricerca di un percorso per le vie della città che consentisse di attraversare tutti i ponti una ed una sola volta, fino a ritornare al punto di partenza... Annoso problema, dal momento che proprio nel 1736 perfino il grande matematico svizzero Leonhard Euler finì per occuparsene scrivendo un famoso trattato scientifico e dando luogo, così, alla moderna *teoria dei grafi*.

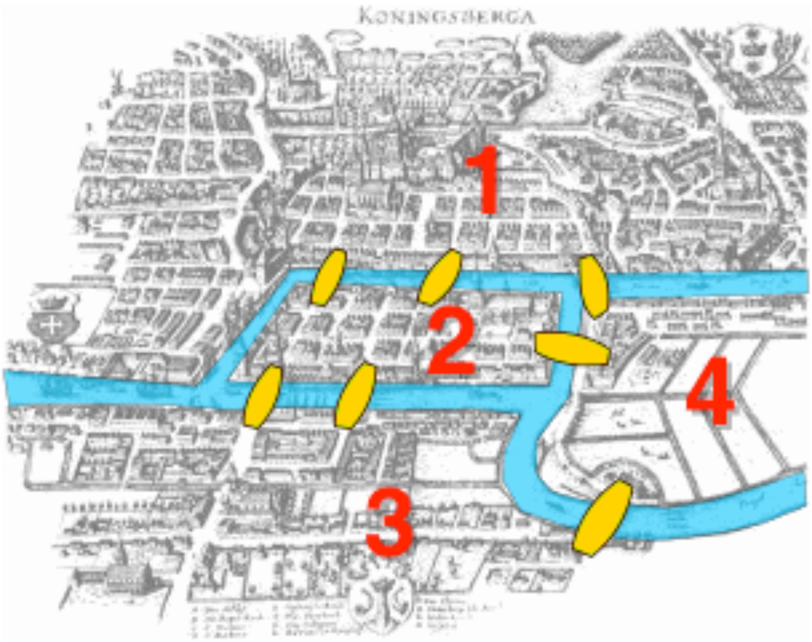

Figura 9: Una antica mappa della città di Königsberg con i suoi sette ponti sul Pregel

Riepiloghiamo i termini della questione: il fiume Pregel nella città di Königsberg, prima di gettarsi nel golfo della Vistola, forma alcune anse e perfino un'isola, suddividendo la città in quattro zone distinte collegate tra loro da sette ponti (vedi Figura 9). Il problema consiste nel trovare un circuito, un percorso che inizi e termini nello stesso punto, tra i quattro quartieri della città che permetta di attraversare tutti i ponti una sola volta.

Non è un problema di poco conto: in effetti un qualunque servizio di consegna della posta o di raccolta dei rifiuti (tanto per fare degli esempi concreti) si trova ad affrontare un problema simile nel definire un percorso che attraversi tutte le vie di una determinata zona della città, possibilmente senza ripassare due volte per la stessa strada.

Eulero, che per primo affrontò con un metodo scientifico questo problema, intuì subito che non si trattava di un problema da affrontare con gli strumenti della geometria classica, come lo studio delle lunghezze e degli angoli, ma, come evidenziò nel titolo del proprio trattato ("*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*"), concentrando l'attenzione sulla posizione reciproca dei punti di interesse (le quattro zone della città collegate dai ponti): un punto di vista *topologico*, quindi, più che *geometrico*.

Un modello basato sui grafi

Seguendo la falsa riga del ragionamento che portò Eulero ad affrontare il problema, possiamo formulare un modello più astratto, basato sulla rappresentazione mediante un grafo delle informazioni essenziali che caratterizzano il problema stesso. L'idea migliore sembrerebbe quindi quella di costruire un grafo $G = (V,E)$ i cui vertici siano costituiti dalle quattro zone della città, $V = \{1,2,3,4\}$, e i cui spigoli siano costituiti dai sette ponti sul fiume, che uniscono i quattro quartieri (vedi Figura 10).

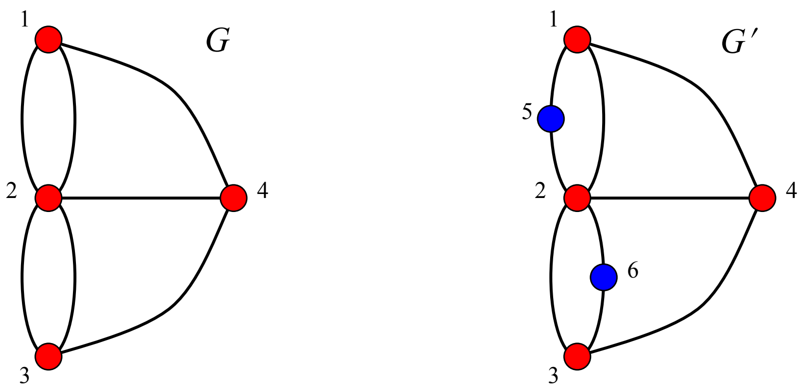

Figura 10: Il multigrafo G e il grafo G' che rappresentano i ponti della città di Königsberg

In realtà esistono ben due ponti che collegano le zone 1 e 2 ed altri due che collegano fra loro le zone 2 e 3: dunque G non è un grafo semplice, ma un *multigrafo*, ossia un grafo che ammette la presenza di più spigoli per una stessa coppia di vertici. Tuttavia il problema può essere facilmente trasformato in un problema su un grafo semplice, come il grafo G' rappresentato in Figura 10, aggiungendo un vertice intermedio fittizio su uno degli spigoli "paralleli". Il problema non cambia: aggiungendo i due vertici "fittizi" non abbiamo aumentato né diminuito le possibili soluzioni del problema.

Naturalmente lo stesso problema può essere posto su un grafo molto più grande di quello che rappresenta semplicemente i ponti di Königsberg. La sostanza è la stessa: si vuole trovare un cammino che inizi e termini nello stesso vertice e che consenta di percorrere una ed una sola volta tutti gli spigoli del grafo. Un cammino chiuso (un *ciclo*) di questo genere prende il nome di ***circuito euleriano***.

Facciamo qualche prova sui grafi riportati in Figura 10: partendo dal vertice 1 di G potremmo passare per il 2, quindi per il 3, poi, tornare indietro nuovamente sul vertice 2 e da questo sul vertice 1. Attenzione però, siamo già tornati sul vertice 1 e possiamo "spendere" solo un altro spigolo uscente da 1: dunque uscendo da 1 non potremo più rientrarci per chiudere il circuito, senza passare per una seconda volta per uno spigolo che abbiamo già percorso... Per quanto possiamo sforzarci di effettuare delle prove sul grafo G, sarà ben difficile, anzi impossibile, individuare un circuito euleriano.

Il motivo è abbastanza semplice ed è una diretta conseguenza del ragionamento che abbiamo fatto poc'anzi: se dobbiamo percorrere ogni spigolo una ed una sola volta, allora per ogni spigolo entrante in un certo vertice del grafo, deve esistere uno spigolo uscente dallo stesso vertice, per poter proseguire il cammino senza ripassare una seconda volta per uno spigolo già percorso. Dunque tutti i vertici del grafo devono avere un numero pari di spigoli *incidenti*, affinché possa esistere un circuito euleriano. Con un ragionamento "per induzione" ci si può convincere facilmente che la stessa condizione è anche sufficiente (e non solo necessaria) affinché il grafo ammetta un circuito euleriano. Il numero di spigoli incidenti su un vertice v del grafo è detto *grado* del vertice. Il grado di tutti i vertici del multigrafo G rappresentato in Figura 10 è dispari, ed anche il grafo semplice G' possiede diversi vertici di grado dispari. Per cui nessuno dei due grafi può contenere un circuito euleriano.

Questo risultato, partendo dallo studio dei ponti di Königsberg, fu dimostrato in generale per un grafo qualsiasi da Eulero nel suo famoso articolo del 1736 ed oggi è noto come **Teorema di Eulero**: un grafo G ammette un circuito euleriano *se e solo se* tutti i suoi vertici hanno grado pari.

I cittadini di Königsberg si dovettero quindi rassegnare: un percorso chiuso nella città che consentisse di attraversare tutti i sette ponti una volta soltanto non poteva proprio esistere!

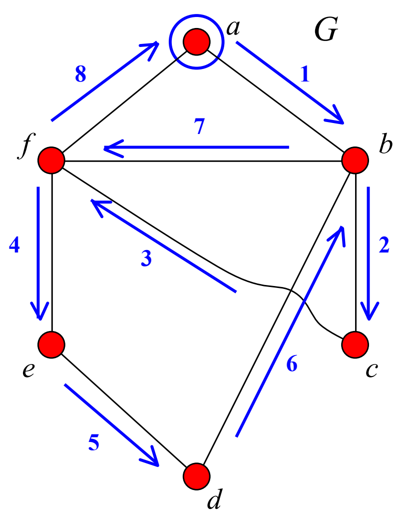

Figura 11: Un grafo G ed un circuito euleriano tracciato su di esso

In Figura 11 è rappresentato un grafo che soddisfa le ipotesi del Teorema di Eulero (tutti i vertici del grafo hanno grado pari) e dunque ammette almeno un circuito euleriano: uno di questi è stato evidenziato con le frecce colorate numerate in ordine progressivo, ma non è certo l'unico! Potete trovarne altri? Dal punto di vista algoritmico è possibile formulare procedimenti costruttivi molto efficienti per determinare, se esiste, su un qualunque grafo G un circuito euleriano. Si tratta di un problema che può essere considerato piuttosto semplice ed è facile ottenere un algoritmo di bassa complessità per la soluzione di questo problema.

Quattro bastano!

In una carta geografica “politica” i paesi confinanti sono colorati con tinte differenti, per poterli distinguere uno dall’altro; due paesi che non confinano, invece, possono essere colorati con lo stesso colore: quanti colori sono necessari? E perché?

Avete mai provato a colorare una carta geografica? Una carta geografica politica, si intende, ad esempio quella di un continente in cui, per evidenziare i confini tra le nazioni, queste sono colorate con tinte diverse... In effetti non è molto difficile: basta scegliere i colori facendo in modo che due Paesi confinanti non vengano mai rappresentati con lo stesso colore, altrimenti sarebbe difficile distinguere le loro frontiere.

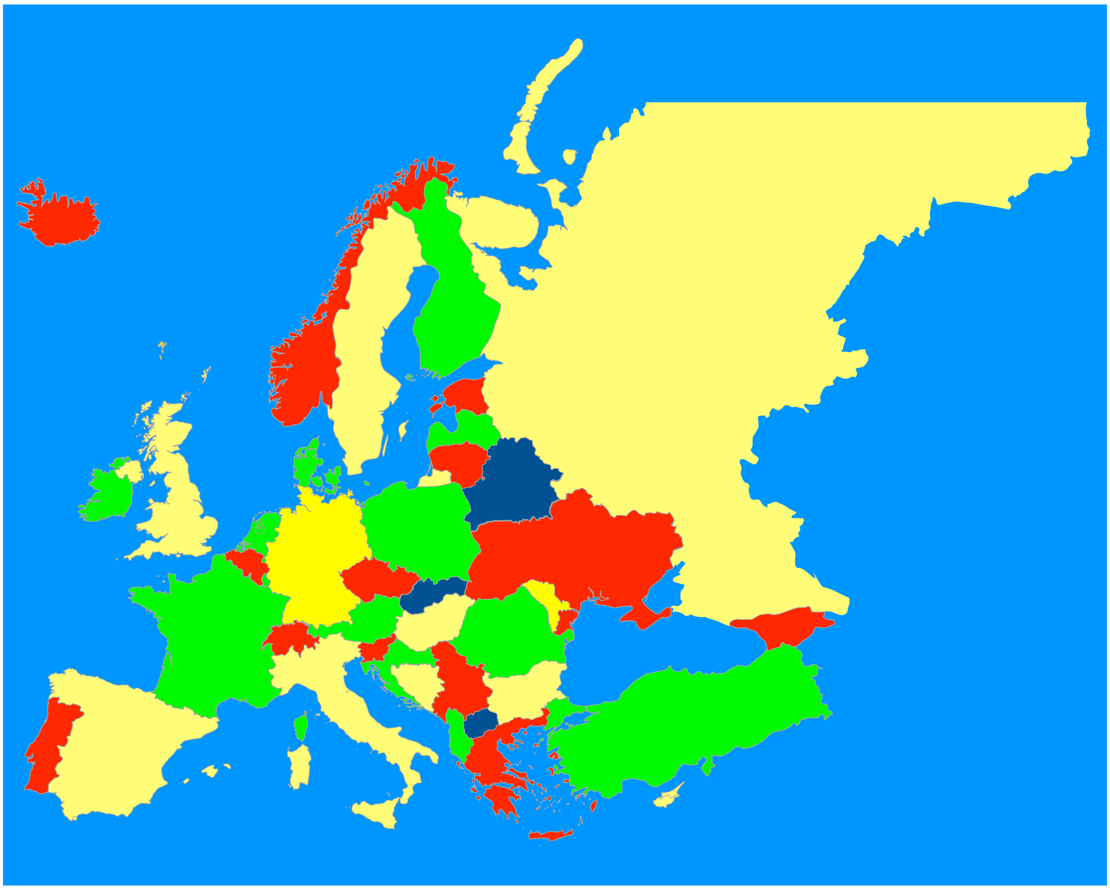

Figura 12: Una mappa "politica" dell'Europa: sono stati usati solo quattro colori per distinguere fra loro le regioni confinanti; il mare è colorato con un tono di blu più chiaro solo per ragioni estetiche

In Figura 12 è rappresentata una mappa “politica” dell’Europa. Per colorare le nazioni in modo che due paesi confinanti non siano caratterizzati dallo stesso colore, sono risultati sufficienti appena quattro colori diversi... è solo un caso o si tratta di una regola più generale? Facciamo qualche prova con delle mappe geografiche di fantasia, come quelle rappresentate in Figura 13.

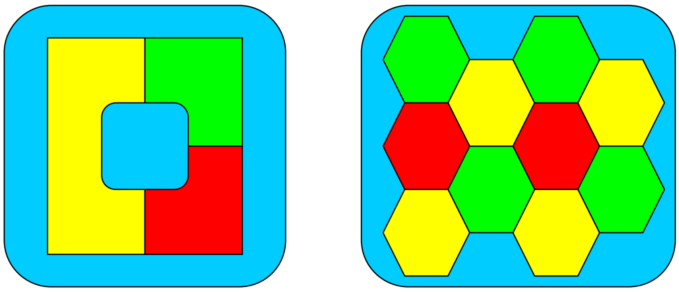

Figura 13: Due "carte geografiche politiche" di fantasia colorate con quattro colori

In effetti sembra quasi impossibile immaginare una carta geografica in cui siano *indispensabili* più di quattro colori per identificare le regioni in modo che siano ben distinte quelle confinanti (ossia usando colori differenti per regioni confinanti). Per stabilire se questa proprietà ha una validità universale o se si tratta solo di un limite della nostra fantasia nel non riuscire ad immaginare un disegno che smentisca questa "congettura", dovremmo far ricorso a strumenti matematici che ci permettano di formalizzare il problema e affrontarlo con il necessario rigore per giungere ad una dimostrazione inconfutabile o per costruire un valido controesempio in grado di smentire l'ipotesi iniziale.

Da una carta geografica... ad un grafo!

Ancora una volta la teoria dei grafi ci viene in soccorso: vediamo in che modo. Tanto per cominciare possiamo costruire un modello della "carta geografica politica" con un grafo i cui vertici rappresentino le nazioni o le regioni che intendiamo rappresentare; due vertici del grafo sono adiacenti, collegati da uno spigolo, solo nel caso in cui le due regioni risultino confinanti. Ad esempio le due "carte geografiche" di fantasia rappresentate in Figura 13 corrispondono ai grafi rappresentati in Figura 14. Come risulta evidente dalla figura non c'è nessuno spigolo che collega fra loro una coppia di vertici dello stesso colore.

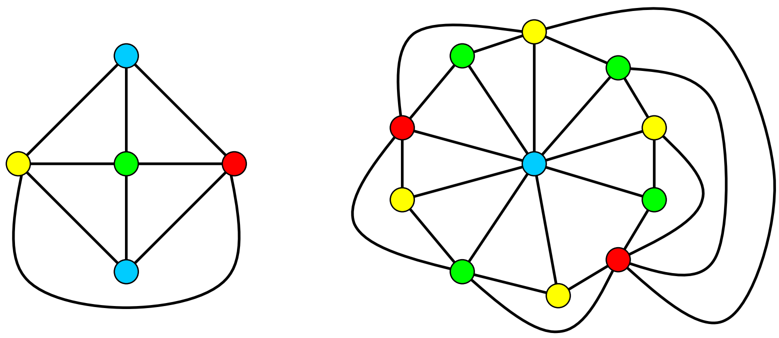

Figura 14: Due grafi che rappresentano le mappe di Figura 17

Anche per i grafi quindi vale la stessa ipotesi che abbiamo formulato per le "carte geografiche politiche"? Sono sufficienti quattro colori per ottenere una "buona colorazione" di qualunque grafo, ossia una colorazione tale che due vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore?

È un'ipotesi intrigante, ma quattro colori sembrano veramente pochi... e in effetti quattro colori proprio non bastano per colorare qualunque grafo: ad esempio per colorare il primo grafo rappresentato in Figura 15 sono necessari cinque colori e ne servono addirittura sei per il secondo grafo presente nella stessa figura.

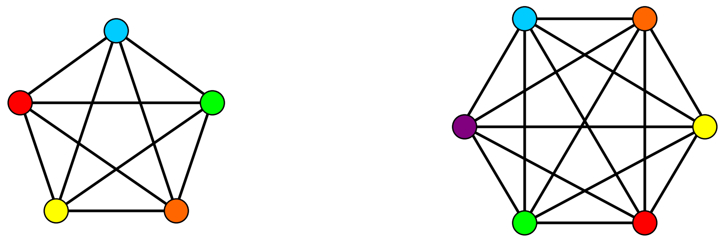

Figura 15: Due grafi colorati con più di quattro colori

Per un grafo qualsiasi con *n* vertici possiamo solo dire che una "buona colorazione" può essere ottenuta utilizzando al massimo *n* colori differenti, uno per ogni vertice. Naturalmente questo risultato è approssimato per eccesso: il numero di colori effettivamente necessari per colorare il grafo in modo che nessuna coppia di vertici adiacenti abbia il medesimo colore, dipende molto dalla *topologia* del grafo, ossia dalla struttura delle connessioni esistenti tra i vertici stessi.

Abbiamo visto che i due grafi disegnati in Figura 14 rappresentano delle mappe geografiche (sebbene fossero mappe un po' fantasiose) e possono essere colorati utilizzando appena quattro colori. Invece i due grafi disegnati in Figura 15 non possono essere colorati usando solo quattro tinte differenti... Qual è la differenza sostanziale tra i grafi del primo tipo e quelli del secondo tipo? Qual è la differenza tra i grafi che rappresentano le regioni di una carta geografica e che quindi, apparentemente, possono essere colorati usando quattro colori soltanto, e i grafi che invece non possono rappresentare nessuna carta geografica e che per di più non possono essere colorati usando al massimo quattro colori? Non è facile dirlo, ma prima di azzardare una risposta, proviamo a rispondere ad un'altra domanda: qual è la mappa geografica rappresentata dai grafi di Figura 15? Se riuscissimo a ricondurre quei grafi ad una carta geografica politica, allora avremmo trovato un buon controesempio per smentire clamorosamente l'idea da cui eravamo partiti, ossia che fosse possibile colorare qualunque carta geografica usando soltanto quattro colori diversi...

Grafi ... pianeggianti

Be', potete passare anche molte ore a provare e a riprovare, ma non riuscirete certo a trovare una mappa geografica di fantasia che possa essere rappresentata dai grafi disegnati in Figura 15, a meno di non ammettere che due paesi o due regioni possano confinare anche attraverso un "ponte" che scavalchi una terza regione che si frappone fra le due. Chiaramente è una situazione del tutto irrealistica, per cui possiamo considerare fallito il tentativo di smentire la congettura iniziale. Dunque gli unici grafi che rappresentano le carte geografiche politiche, sono quelli che ammettono un disegno in cui gli spigoli del grafo non siano obbligati ad intersecarsi fra loro: se non esistono confini tra le regioni che "scavalcano" (come con un ponte) altre regioni, ossia se le carte geografiche politiche sono "piatte", schiacciate completamente sul piano (come effettivamente avviene nella realtà), allora possono essere rappresentate da grafi i cui spigoli possono evitare di intersecarsi.

Ecco quindi qual è la differenza tra i grafi rappresentati in Figura 14 e quelli di Figura 15: i grafi che rappresentano i confini tra le regioni di una carta geografica sono grafi che possono essere disegnati sul piano, senza produrre intersezioni tra gli spigoli; i grafi che invece inevitabilmente disegnati sul piano presentano delle intersezioni e degli accavallamenti tra alcuni degli spigoli non rappresentano alcuna mappa geografica politica.

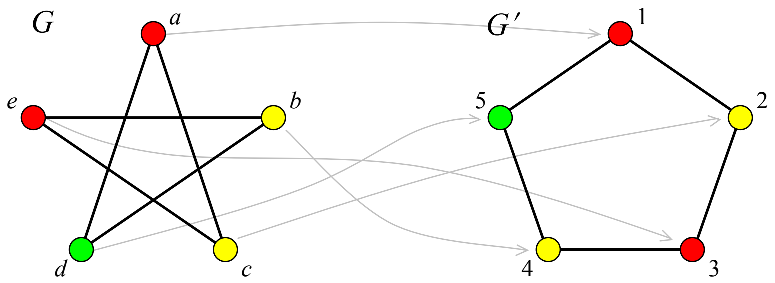

Figura 16: Due grafi "isomorfi"

Un grafo che possa essere disegnato sul piano senza intersecare i suoi spigoli si dice *planare*. Entrambi i grafi di Figura 16 sono planari: il grafo G, infatti, che nel disegno riportato in figura presenta numerose intersezioni tra i suoi spigoli, può anche essere disegnato diversamente, ad esempio come il grafo G' della stessa figura, evitando ogni intersezione tra gli spigoli.

I grafi planari costituiscono un insieme con un numero infinito di elementi: non esiste limite alla possibilità di immaginare grafi planari con un numero di vertici arbitrario e sempre più grande, sebbene finito. D'altra parte i grafi planari sono spesso assai utili nella pratica: ad esempio nel tracciare i contatti di un circuito elettronico stampato che devono collegare fra loro centinaia di componenti miniaturizzate; i contatti elettrici non devono mai intersecarsi per non mandare in "cortocircuito" l'intero sistema, e dunque costituiscono gli spigoli di un grafo i cui vertici sono le componenti del circuito elettronico. Ma non solo: spesso nel disegnare con un grafo un diagramma o uno schema molto complesso che mette in relazione numerosi oggetti, si guadagna in leggibilità e in efficacia facendo in modo che le linee che collegano gli oggetti, gli spigoli che connettono i vertici del grafo, non si intersechino. Questo è possibile solo se il disegno può essere ricondotto ad un grafo planare.

Largo alla matematica!

Riconoscere se un grafo è o meno planare è dunque un'operazione di una certa rilevanza dal punto di vista applicativo. Esistono infatti diversi risultati matematici, espressi sotto forma di teorema, che ci permettono di caratterizzare i grafi che sono planari. È chiaro che se un certo grafo è planare, allora anche tutti i suoi "sottografi" (ossia i grafi più piccoli ottenuti eliminando alcuni vertici e alcuni spigoli) sono planari; e viceversa è facile convincersi che se un grafo non è planare, allora non saranno planari neanche tutti i grafi ottenuti da questo aggiungendo altri vertici ed altri spigoli (i suoi "supergrafi"). Partendo da questa osservazione abbastanza evidente Kuratowski dimostrò una proprietà molto forte che caratterizza i grafi planari, affermando che **tutti e soli** i grafi che contengono come sottografi il grafo completo con cinque vertici (di solito lo si indica con K_5) o il grafo completo bipartito $K_{3,3}$, non sono planari. In effetti sia K_5 che $K_{3,3}$ (rappresentati entrambi in Figura 17) non sono planari, e il Teorema di Kuratowski sembra voler affermare che questi due piccoli grafi non planari costituiscono il nucleo, l'essenza, di qualunque altro grafo non planare.

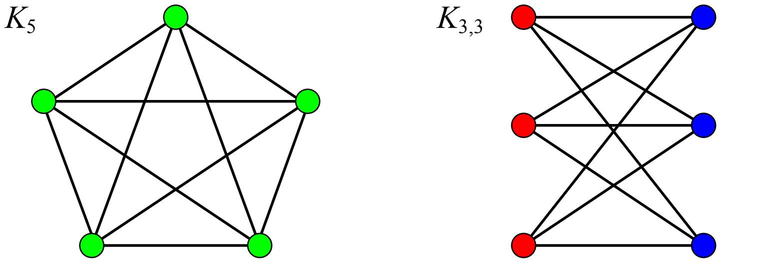

Figura 17: Il grafo completo con cinque vertici K_5 ed il grafo completo bipartito $K_{3,3}$

Anche Eulero, il grande matematico del '700, espresse in un famoso teorema una proprietà che caratterizza in modo molto forte i grafi planari. Sostanzialmente Eulero suggerì di vedere un grafo come la rappresentazione di un poliedro solido, costituito da facce, lati e vertici. Ad esempio il cubo può essere visto come un grafo con 8 vertici, 12 lati (gli spigoli del grafo) e 6 facce, come in Figura 18. Nel grafo le facce sono le aree chiuse delimitate dagli spigoli; naturalmente deve essere considerata anche la "faccia esterna" al grafo (altrimenti, rispetto alla figura solida, si perderebbe una delle facce). Eulero dimostrò che, indicando con v il numero dei vertici del grafo, con l il numero dei suoi lati e con f il numero delle sue facce, per tutti i grafi G planari e connessi risulta $v + f - l = 2$.

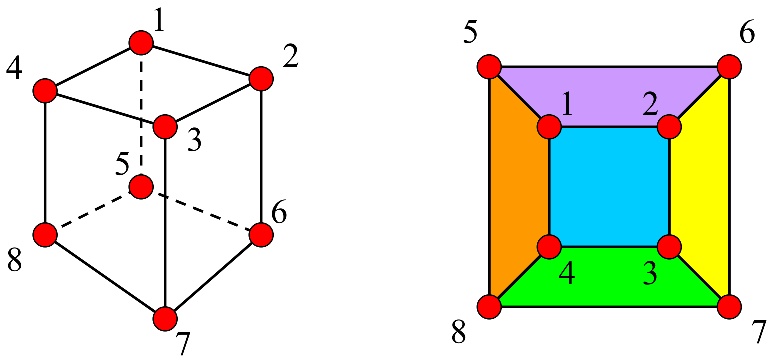

Figura 18: Il grafo che rappresenta i vertici, i lati e le facce (colorate, tranne la "faccia esterna") di un cubo

Il grafo che rappresenta il cubo disegnato in Figura 18 è planare e infatti, visto che v=8, l=12 e f=6, risulta proprio $v + f - l = 2$.

Nonostante questi interessanti risultati teorici, calcolare il minimo numero di colori necessario per colorare i vertici di un grafo qualsiasi in modo tale che due vertici adiacenti non abbiano mai lo stesso colore, risulta essere un problema tra i più difficili dal punto di vista computazionale. A dire il vero ad oggi non esiste un algoritmo efficiente per calcolare il numero minimo di colori per ottenere una "buona colorazione" di un grafo qualsiasi: l'unico modo, ancora una volta, è tentare tutte le combinazioni possibili, ma si tratta senza dubbio di una strada che è impossibile percorrere anche per grafi non molto grandi.

Dunque il problema della colorazione delle carte geografiche politiche rimane irrisolto? Non è possibile sapere se effettivamente quattro colori sono sufficienti per colorare una carta geografica qualsiasi?

Ebbene, il problema venne effettivamente risolto nel 1976 da due matematici dell'Università dell'Illinois, negli Stati Uniti: Haken e Appel riuscirono a dimostrare che il numero di combinazioni con cui è possibile costruire dei frammenti essenziali di carte geografiche è un numero finito e che quindi tutte le possibili carte geografiche non sono altro che la combinazione di tali frammenti essenziali. Quindi, con l'aiuto di un computer (che negli anni '70 non era molto potente) e di un buon algoritmo, calcolarono per tentativi successivi tutti i modi di colorare tali frammenti essenziali e ciò che venne fuori è oggi noto come il famoso **Teorema dei quattro colori**: Haken e Appel dimostrarono che quattro colori erano effettivamente sufficienti per colorare qualunque carta geografica o, in altri termini, per colorare i vertici di qualsiasi grafo planare. Per festeggiare l'evento, l'ufficio postale della loro Università emise un francobollo speciale su cui era impressa la frase: "Quattro colori bastano!"

Una dimostrazione con il computer?

Il Teorema dei Quattro Colori gode di una certa fama perché di dice che sia stato "dimostrato da un computer". In realtà questa affermazione è del tutto impropria. Appel e Hanken infatti sfruttarono un algoritmo ed un calcolatore per chiudere la dimostrazione del loro teorema, provando che non esisteva alcun controesempio alla loro ipotesi, ma il passaggio fondamentale, dimostrato non certo da un computer, fu ottenuto grazie ad alcune intuizioni brillanti dei due matematici e al loro lungo e meticoloso lavoro di studio e ricerca.

Bibliografia essenziale

[1] Ottavio D'Antona, *Introduzione alla matematica discreta*, Apogeo, 1999.

[2] Peter Gritzmann, René Brandenberg, *Alla ricerca della via più breve*, Springer, 2005.

[3] Frank Harary, *Graph Theory*, Perseus Books, 1969.

[4] Richard J. Trudeau, *Introduction to Graph Theory*, Dover Publications, 1993.