

Cammini di costo minimo su un grafo pesato

Algoritmo di Floyd-Warshall
con la tecnica della programmazione dinamica

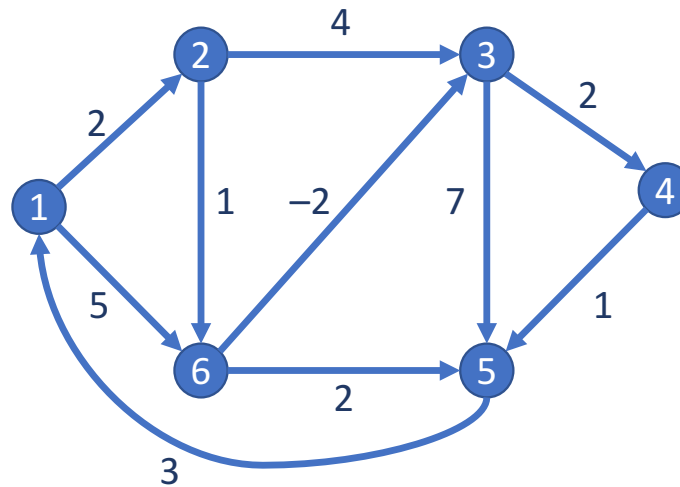
Prof. M. Liverani – Ottimizzazione Combinatoria (IN440)

a.a. 2017 / 2018

Dati in input

- Un grafo $G = (V, E)$
- Una funzione w che assegna pesi agli spigoli del grafo (i pesi possono essere anche negativi, ma non sono consentiti cicli di costo negativo)

$$w : E(G) \rightarrow \mathbf{R}$$



- Sia $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Output dell'algoritmo

- Una matrice quadrata $n \times n$ con i costi dei cammini minimi per ogni coppia di vertici del grafo:

$D^{(n)}$ con $d_{i,j}^{(n)}$ pari al costo di un cammino di costo minimo da i a j

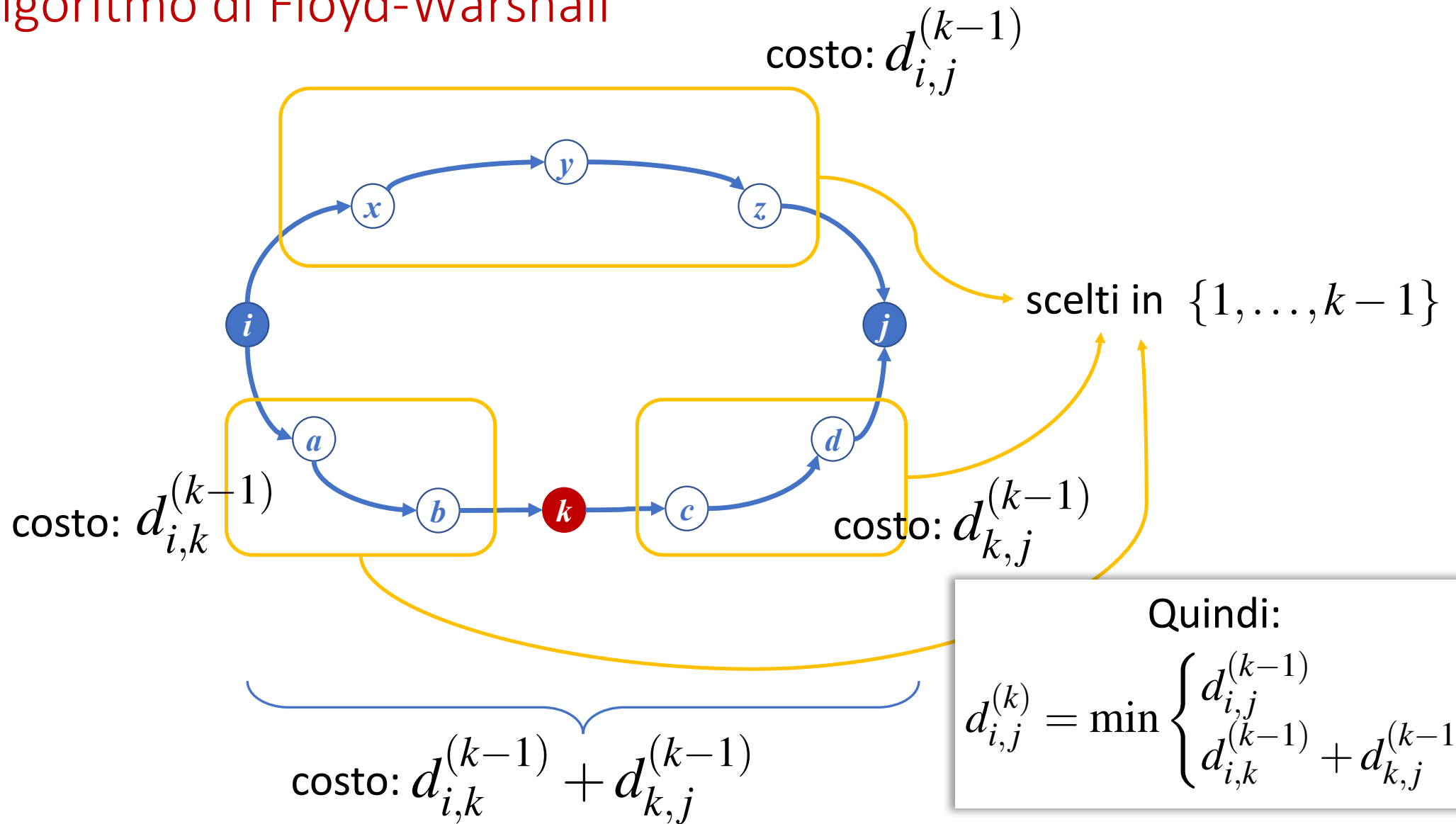
- Indichiamo con $D^{(k)}$ la matrice che riporta il **costo del cammino minimo** per ogni coppia di vertici i e j con vertici intermedi scelti nell'insieme $\{1, 2, 3, \dots, k\}$

Algoritmo di Floyd-Warshall

```
1:  $W := (w_{ij})$  con  $w_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w(i, j) & \text{se } (i, j) \in E(G) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$   
2:  $D^{(0)} := W$   
3: per  $k := 1, 2, \dots, n$  ripeti  
4:   per  $u := 1, 2, \dots, n$  ripeti  
5:     per  $v := 1, 2, \dots, n$  ripeti  
6:        $d_{uv}^{(k)} := \min \left\{ d_{uv}^{(k-1)}, d_{uk}^{(k-1)} + d_{kv}^{(k-1)} \right\}$   
7:     fine-ciclo  
8:   fine-ciclo  
9: fine-ciclo
```

- La matrice $D^{(0)}$ rappresenta il costo del cammino da i a j con nessun vertice intermedio: quindi è basata sul costo $W_{i,j}$ assegnato ad ogni spigolo del grafo (infinito se lo spigolo non esiste)
- L'algoritmo costruisce una sequenza di matrici: si passa dalla matrice $D^{(k-1)}$ alla matrice $D^{(k)}$ selezionando il minimo tra il costo del cammino minimo da i a j con vertici in $\{1, \dots, k-1\}$ e il costo del cammino di costo minimo da i a j passante per k con vertici intermedi in $\{1, \dots, k-1\}$

Algoritmo di Floyd-Warshall



Inizializzazione

1: $W := (w_{ij})$ con $w_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w(i, j) & \text{se } (i, j) \in E(G) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

2: $D^{(0)} := W$

3: **per** $k := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

4: **per** $i := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

5: **per** $j := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

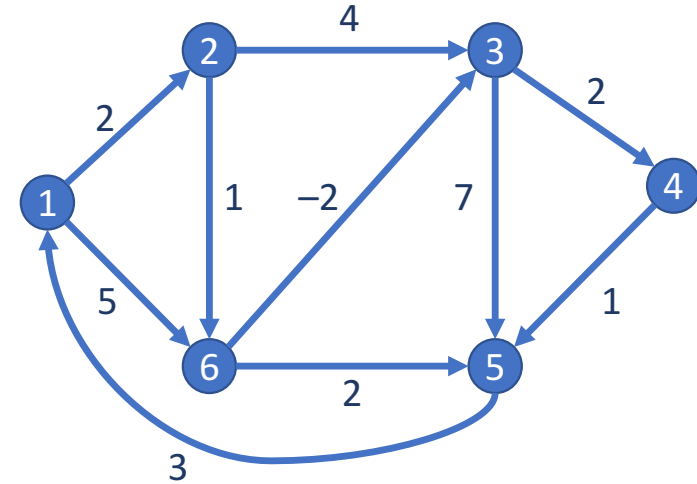
6: $d_{ij}^{(k)} := \min \{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \}$

7: **fine-ciclo**

8: **fine-ciclo**

9: **fine-ciclo**

- Viene inizializzata la matrice $D^{(0)}$ con i dati della matrice W



$$D^{(0)}$$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	∞	∞	5
2	∞	0	4	∞	∞	1
3	∞	∞	0	2	7	∞
4	∞	∞	∞	0	1	∞
5	3	∞	∞	∞	0	∞
6	∞	∞	-2	∞	2	0

Cammini di costo minimo con vertici intermedi in {1}

1: $W := (w_{ij})$ con $w_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w(i, j) & \text{se } (i, j) \in E(G) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

2: $D^{(0)} := W$

3: **per** $k := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

4: **per** $i := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

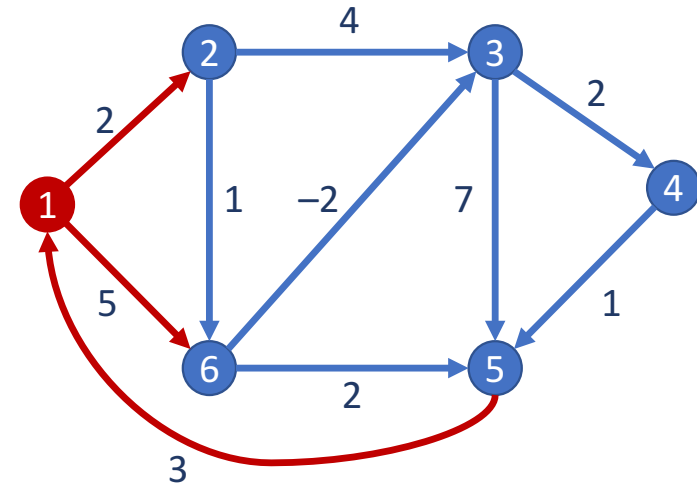
5: **per** $j := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

6: $d_{ij}^{(k)} := \min \{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \}$

7: **fine-ciclo**

8: **fine-ciclo**

9: **fine-ciclo**



$D^{(1)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	∞	∞	∞	5
2	∞	0	4	∞	∞	1
3	∞	∞	0	2	7	∞
4	∞	∞	∞	0	1	∞
5	3	5	∞	∞	0	8
6	∞	∞	-2	∞	2	0

- Viene calcolata la matrice $D^{(1)}$ con i costi degli eventuali cammini di costo minimo con vertici intermedi in {1}

Cammini di costo minimo con vertici intermedi in {1, 2}

1: $W := (w_{ij})$ con $w_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w(i, j) & \text{se } (i, j) \in E(G) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

2: $D^{(0)} := W$

3: **per** $k := 1$ 2 3, 4, 5, 6 **ripeti**

4: **per** $i := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

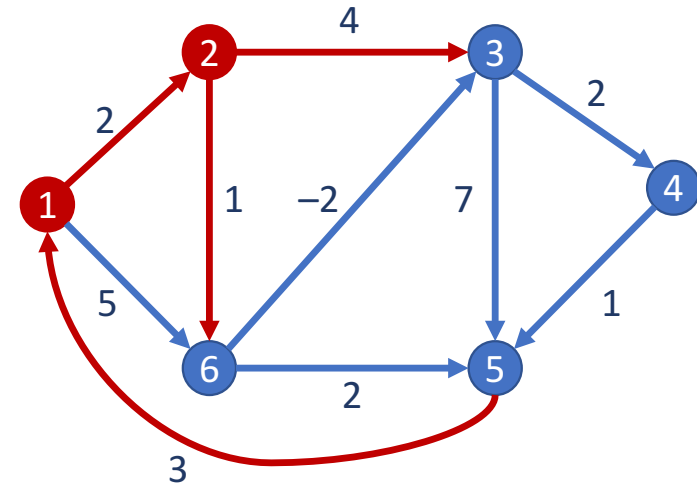
5: **per** $j := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

6: $d_{ij}^{(k)} := \min \{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \}$

7: **fine-ciclo**

8: **fine-ciclo**

9: **fine-ciclo**



- Viene calcolata la matrice $D^{(2)}$ con i costi degli eventuali cammini di costo minimo con vertici intermedi in {1, 2}

$D^{(2)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	∞	∞	3
2	∞	0	4	∞	∞	1
3	∞	∞	0	2	7	∞
4	∞	∞	∞	0	1	∞
5	3	5	9	∞	0	6
6	∞	∞	-2	∞	2	0

Cammini di costo minimo con vertici intermedi in $\{1, 2, 3\}$

1: $W := (w_{ij})$ con $w_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w(i, j) & \text{se } (i, j) \in E(G) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

2: $D^{(0)} := W$

3: **per** $k := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

4: **per** $i := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

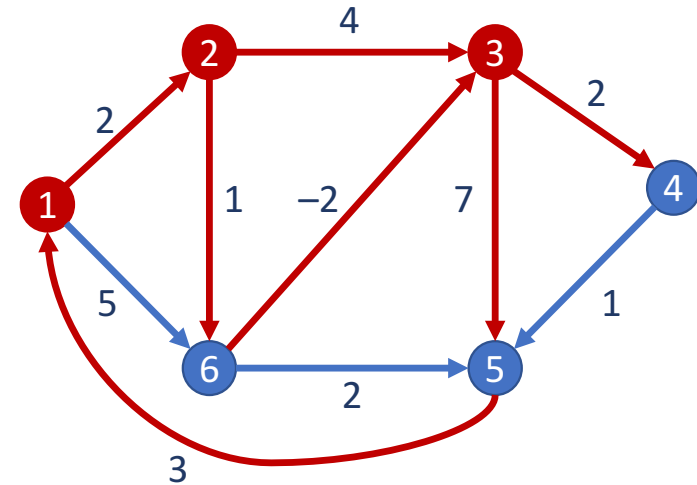
5: **per** $j := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

6: $d_{ij}^{(k)} := \min \{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \}$

7: **fine-ciclo**

8: **fine-ciclo**

9: **fine-ciclo**



- Viene calcolata la matrice $D^{(3)}$ con i costi degli eventuali cammini di costo minimo con vertici intermedi in $\{1, 2, 3\}$

$D^{(3)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	8	13	3
2	∞	0	4	6	11	1
3	∞	∞	0	2	7	∞
4	∞	∞	∞	0	1	∞
5	3	5	9	11	0	6
6	∞	∞	-2	0	2	0

Cammini di costo minimo con vertici intermedi in {1, 2, 3, 4}

1: $W := (w_{ij})$ con $w_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w(i, j) & \text{se } (i, j) \in E(G) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

2: $D^{(0)} := W$

3: **per** $k := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

4: **per** $i := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

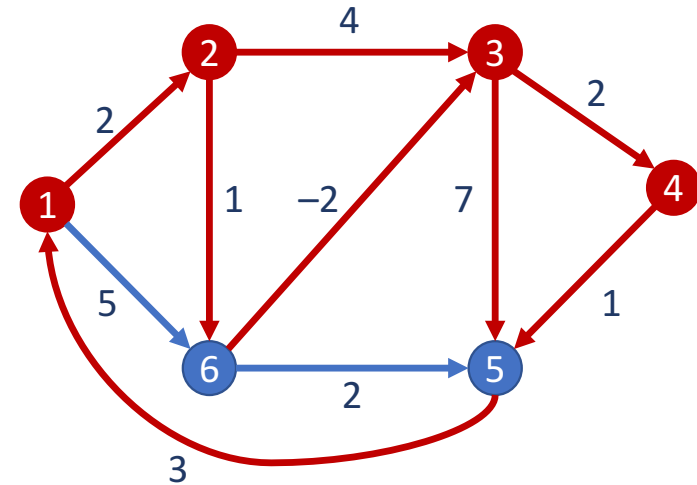
5: **per** $j := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

6: $d_{ij}^{(k)} := \min \{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \}$

7: **fine-ciclo**

8: **fine-ciclo**

9: **fine-ciclo**



- Viene calcolata la matrice $D^{(4)}$ con i costi degli eventuali cammini di costo minimo con vertici intermedi in {1, 2, 3, 4}

$D^{(4)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	8	9	3
2	∞	0	4	6	7	1
3	∞	∞	0	2	3	∞
4	∞	∞	∞	0	1	∞
5	3	5	9	11	0	6
6	∞	∞	-2	0	1	0

Cammini di costo minimo con vertici intermedi in $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

1: $W := (w_{ij})$ con $w_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w(i, j) & \text{se } (i, j) \in E(G) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

2: $D^{(0)} := W$

3: **per** $k := 1, 2, 3, 4, 5$ **6** **ripeti**

4: **per** $i := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

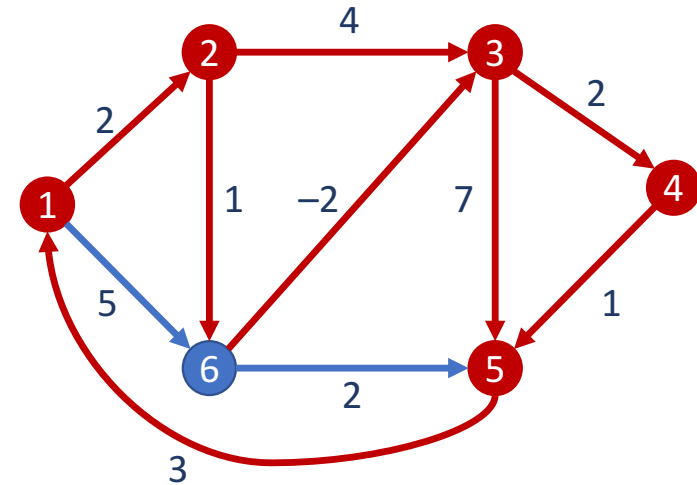
5: **per** $j := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

6: $d_{ij}^{(k)} := \min \left\{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right\}$

7: **fine-ciclo**

8: **fine-ciclo**

9: **fine-ciclo**



- Viene calcolata la matrice $D^{(5)}$ con i costi degli eventuali cammini di costo minimo con vertici intermedi in $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$D^{(5)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	6	8	9	3
2	10	0	4	6	7	1
3	6	8	0	2	3	9
4	4	6	10	0	1	7
5	3	5	9	11	0	6
6	4	6	-2	0	1	0

Cammini di costo minimo con vertici intermedi in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1: $W := (w_{ij})$ con $w_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w(i, j) & \text{se } (i, j) \in E(G) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

2: $D^{(0)} := W$

3: **per** $k := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

4: **per** $i := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

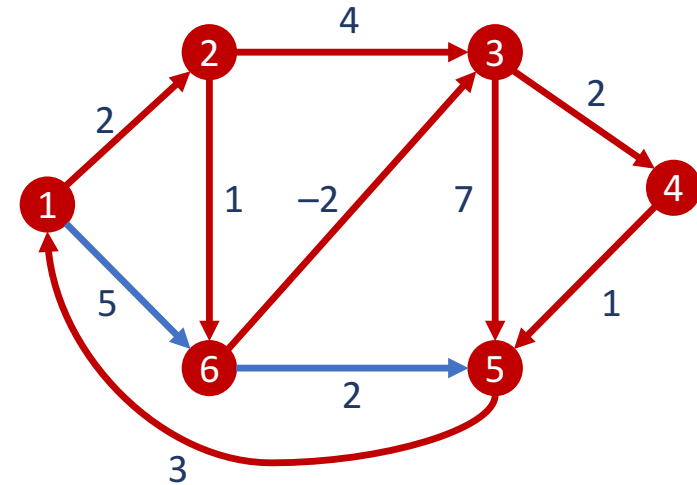
5: **per** $j := 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **ripeti**

6: $d_{ij}^{(k)} := \min \left\{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right\}$

7: **fine-ciclo**

8: **fine-ciclo**

9: **fine-ciclo**



- Viene calcolata la matrice $D^{(6)}$ con i costi degli eventuali cammini di costo minimo con vertici intermedi in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$D^{(6)}$

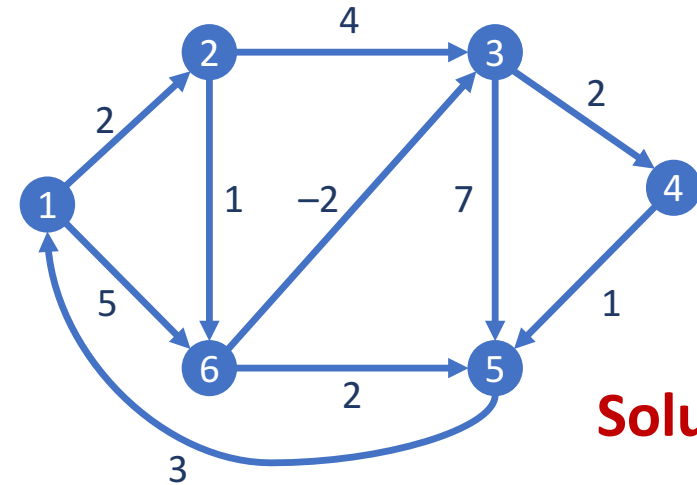
	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	3	4	3
2	6	0	-1	1	2	1
3	6	8	0	2	3	9
4	4	6	5	0	1	7
5	3	5	4	6	0	6
6	4	6	-2	0	1	0

Cammini di costo minimo con vertici intermedi in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

```

1:  $W := (w_{ij})$  con  $w_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w(i, j) & \text{se } (i, j) \in E(G) \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$ 
2:  $D^{(0)} := W$ 
3: per  $k := 1, 2, 3, 4, 5, 6$  ripeti
4:   per  $i := 1, 2, 3, 4, 5, 6$  ripeti
5:     per  $j := 1, 2, 3, 4, 5, 6$  ripeti
6:        $d_{ij}^{(k)} := \min \{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \}$ 
7:     fine-ciclo
8:   fine-ciclo
9: fine-ciclo

```



Soluzione!

$n = 6$

$D^{(6)}$

	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	3	4	3
2	6	0	-1	1	2	1
3	6	8	0	2	3	9
4	4	6	5	0	1	7
5	3	5	4	6	0	6
6	4	6	-2	0	1	0

- Viene calcolata la matrice $D^{(6)}$ con i costi degli eventuali cammini di costo minimo con vertici intermedi in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$