Ottimizzazione Combinatoria

Prof. Marco Liverani

Problemi

- Ad una festa Alberto, Bruno e Carlo hanno conosciuto Diana, Elena e Francesca. Ognuno dei sei ragazzi prova una certa simpatia per gli altri, seppur in diversa misura, e ben presto si formeranno delle coppie...

  Problema: *possiamo fare in modo che le coppie siano «durevoli» nel tempo e che non si vengano a creare delle situazioni di infedeltà e di tradimento che possano incrinare le coppie e le amicizie tra i sei ragazzi?*

- L'iscrizione ai corsi di laurea offerti da una prestigiosa università sono a numero chiuso. Gli studenti indicano la propria preferenza per i diversi corsi di laurea e svolgono dei test attitudinali per i diversi indirizzi.

  Problema: *possiamo fare in modo che la distribuzione degli studenti nei corsi di laurea sia la migliore possibile, senza superare il numero chiuso e tenendo conto sia delle preferenze che delle attitudini degli studenti?*

- È stata aperta una nuova ASL nel comune e bisogna assegnare i pazienti ai medici di base, tenendo conto delle preferenze di ciascuno e senza sovraccaricare nessun medico o assegnandogli pazienti troppo lontani.

  Problema: *possiamo soddisfare le preferenze di tutti senza fare ingiustizie nell'assegnazione dei medici?*

Altri problemi

- Nel comune di una grande città presto si terranno le elezioni per eleggere il nuovo sindaco. I cittadini sono sfiniti da uno dei principali problemi che li assilla quotidianamente: la congestione del traffico!

  Problema: *possiamo aiutare il nuovo sindaco a capire quali tratti della rete stradale della città sono i reali «colli di bottiglia» per la circolazione e dove (e di quanto) è opportuno incrementare la rete stradale o i trasporti pubblici per diminuire la congestione del traffico stradale?*

- Per dimensionare opportunamente le centrali di raffinazione, una grande società petrolifera deve calcolare quanto petrolio può trasferire attraverso i propri oleodotti dai centri di estrazione fino alle grandi raffinerie.

  Problema: *possiamo aiutare il Direttore Operations della società nel calcolare esattamente la quantità di petrolio che arriverà in raffineria ogni giorno?*

- Per progettare una rete di telecomunicazione efficiente, un grande provider di servizi digitali on-line deve tenere conto della quantità di dati che deve trasferire verso i propri clienti.

  Problema: *possiamo aiutare i progettisti nel dimensionare correttamente la rete di trasmissione, calcolandone la capacità trasmissiva?*

Altri problemi ancora

- Marco deve recarsi tutti i giorni all'Università ed è sempre in ritardo: anticipare la sveglia la mattina è impossibile, arriverebbe a lezione completamente rimbambito.

  Problema: *possiamo aiutarlo a trovare la via più veloce per percorrere la strada da casa all'Università?*

- Un'azienda telefonica deve attivare il proprio servizio su un nuovo territorio nazionale, dove sono presenti altri operatori concorrenti. Questi sono ben disposti ad affittare le proprie linee di trasmissione in modo che il nuovo operatore possa offrire il servizio «in roaming».

  Problema: *come possiamo aiutare il nuovo operatore a scegliere quali linee affittare in modo da raggiungere tutti i propri clienti, limitando le spese?*

- In una rete di comunicazione tra computer, i router devono scegliere la via più veloce per trasferire dati da un computer all'altro.

  Problema: *quale meccanismo possono utilizzare per scegliere la via più veloce per indirizzare la comunicazione tra due nodi della rete?*

… e ancora

- L'agenzia spaziale invia immagini satellitari ad altissima definizione del pianeta; per poterle stampare su una pubblicazione periodica, la risoluzione delle immagini deve essere ridotta, limitando anche il numero di colori utilizzati per riprodurre le immagini.

  Problema: *come possiamo scegliere i colori da stampare, senza rendere l'immagine illeggibile e aumentando al massimo il contrasto dei colori?*

- Per contrastare l'infiltrazione sul mercato di «cartelli» di aziende che monopolizzino determinati settori, l'autorità per la concorrenza deve individuare aziende che indirettamente fanno riferimento agli stessi investitori/proprietari.

  Problema: *come possiamo aiutarli a capire se indirettamente un certo gruppo di aziende fa riferimento ad uno stesso proprietario?*

- Il database di un grande istituto previdenziale contiene i dati di milioni di pagamenti per prestazioni pensionistiche e non pensionistiche eseguiti ogni mese a favore dei lavoratori e dei pensionati.

  Problema: *come possiamo migliorare la velocità con cui i programmi sono in grado di reperire i dati di loro interesse su un database che ogni mese diventa sempre più grande?*

Di che tipo di problemi si tratta?

- Sono «problemi di matematica»? In un certo senso sì, anche se non utilizzeremo le derivate e gli integrali per risolverli

  Sono problemi abbastanza semplici nella loro formalizzazione, che possono essere formulati facendo uso di **variabili a valori discreti** (es.: i numeri naturali da 1 a n, gli alberi o i grafi) e che per questo saremmo tentati di risolvere facendo qualche **combinazione** o qualche **permutazione** dei valori in gioco

  … e invece ben presto ci accorgeremo che in quel modo ci troveremo di fronte a situazioni di **esplosione combinatoria** per cui non basterebbero tutti gli anni che ci restano da vivere per risolvere una sola istanza non banale di un problema del genere

- Sono problemi in cui basta trovare *una soluzione qualsiasi*?

  No: ci viene sempre chiesto di individuare **la soluzione migliore**, la **soluzione ottima**, quella che **minimizza** una funzione di costo o **massimizza** una funzione che esprime il possibile «ricavo»

- In conclusione: si tratta di **problemi di ottimizzazione combinatoria**

Gli strumenti del (nostro) mestiere

- Thomas Mann, «Altezza Rale» (1909):

  – E i suoi studi, signorina, se posso informarmene? Matematica a quanto so. Non la stanca, non è terribilmente noioso per il cervello?

  – Nient'affatto – ella rispose – non conosco nulla di più carino. È un gioco nell'aria, per dir così. O addirittura fuori dall'aria, in regioni senza polvere, comunque.

- Invece di fare uso degli strumenti della *matematica del continuo*, useremo la **matematica discreta**, in particolare la **teoria dei grafi** e l'**analisi combinatoria** per costruire dei modelli (le nostre «regioni senza polvere») e la **teoria degli algoritmi** per produrre una soluzione costruttiva efficiente e che ci permetta di aggirare l'esplosione combinatoria
- Ci focalizzeremo sullo studio di **algoritmi classici**, che consentono di produrre in modo efficiente (bassa complessità computazionale) la soluzione dei problemi che affronteremo
- Di quegli algoritmi produrremo anche una implementazione in **linguaggio Python:** quindi ci dedicheremo anche a studiare le basi di questo linguaggio, non serve conoscerlo già!

Gli argomenti del corso

La **prima parte del corso** è dedicata a riprendere e ad ampliare alcuni argomenti di base che probabilmente sono stati già introdotti in altri corsi (Algoritmi e Strutture Dati, Algebra 1, Geometria 1, Analisi 1)

- Algoritmi e complessità computazionale

  Dovreste già conoscere questo argomento (Informatica 1 / Algoritmi e strutture dati), ma lo riprenderemo per riepilogare alcuni aspetti di base (programmazione strutturata, complessità computazionale di un algoritmo e di un problema, notazione «*O grande*», classi di complessità, problemi NP-completi)

- Insiemi e calcolo combinatorio

  Anche su questo tema riprenderemo solo alcuni concetti di base, certamente già visti in modo più ampio nei corsi di Algebra, introducendo un approccio algoritmico costruttivo (combinazioni, disposizioni, permutazioni, il problema dei Quadrati Latini)

- Introduzione alla Teoria dei Grafi

  Su questo argomento dovreste aver visto qualche cenno nel corso di Algoritmi e Strutture Dati; noi lo riprenderemo da capo, ma in modo più ampio, con una vista ancora una volta di taglio algoritmico e utile alla rappresentazione dei modelli su cui si basano i problemi di ottimizzazione combinatoria che affronteremo successivamente

- Algoritmi elementari sui grafi

  Riprendiamo alcuni algoritmi di base per la visita dei grafi (già visti nel corso di Algoritmi e Strutture Dati), li affrontiamo in modo unitario e li utilizziamo per risolvere altri problemi elementari sui grafi (componenti fortemente connesse, ordinamento topologico, punti di articolazione, ecc.)

Gli argomenti del corso

La seconda parte del corso prevede lo studio di diversi problemi classici di ottimizzazione combinatoria (per lo più su grafi) e delle principali tecniche algoritmiche per il calcolo di una soluzione

- Ottimizzazione combinatoria e programmazione matematica

  Formalizziamo i problemi di ottimizzazione combinatoria e di programmazione matematica, alcuni esempi sulla programmazione lineare e il metodo del simplesso

- Alberi ricoprenti di costo minimo

  Problema della costruzione di un albero ricoprente di costo minimo su un grafo con pesi assegnati agli spigoli e studio degli algoritmi per il calcolo di una soluzione ottima

- Cammini di costo minimo

  Problemi per il calcolo dei cammini di costo minimo su un grafo con pesi assegnati agli spigoli, studio di algoritmi per il calcolo di una soluzione ottima, tecnica della programmazione dinamica

- Reti di flusso

  Problema del calcolo del flusso massimo su una rete con una misura di capacità assegnata agli spigoli, studio di approcci algoritmici differenti per il calcolo della soluzione ottima

Gli argomenti del corso

- Partizionamento di grafi in componenti connesse

  Tecniche algoritmiche per il partizionamento ottimo di grafi con pesi assegnati ai vertici in k componenti connesse; il problema viene definito con diverse funzioni obiettivo e applicato a classi di grafo differenti

- Problemi di matching e il matrimonio stabile

  Vengono definiti i problemi di matching su grafi e in particolare il problema del matrimonio stabile, che viene risolto per via algoritmica e poi generalizzato

- Codici di Huffman

  Costruzione di una codifica ottimale per la rappresentazione in formato compresso di una sequenza di dati, senza perdita di informazione

- Algoritmi approssimanti per problemi NP-completi

  A conclusione del corso, incentrato sulla ricerca di una soluzione esatta per problemi di ottimizzazione combinatoria attraverso algoritmi di bassa complessità, vedremo alcuni esempi in cui non essendo possibile calcolare con un tempo polinomiale la soluzione di un problema, se ne produce una soluzione approssimata, stimando l'errore rispetto alla soluzione esatta

Lezioni, esercitazioni, materiale didattico

- Nell'a.a. 2024/2025 le lezioni si svolgono dal 25/2/2025 al 5/6/2025 nel seguente orario:
  - martedì ore 9:00 – 11:00 (lezione, Aula L)
  - mercoledì ore 11:00 – 13:00 (esercitazione a cura del prof. Elia Onofri, Laboratorio informatico)
  - martedì ore 9:00 – 11:00 (lezione, Aula L)
- Sul sito del corso viene pubblicato il diario delle lezioni, il materiale didattico (dispense), i riferimenti bibliografici, gli avvisi ed altre informazioni sul corso; l'indirizzo del sito del corso è il seguente:

  http://www.mat.uniroma3.it/users/liverani/IN440
- Per qualsiasi dubbio, problema o chiarimento, scrivetemi all'indirizzo **marco.liverani@uniroma3.it** (se serve possiamo fissare un appuntamento per un incontro on-line o in presenza)
- Oltre alle dispense su diversi argomenti trattati a lezione, pubblicate sul sito web e sul canale Microsoft Teams del corso, si suggerisce di fare riferimento al seguente testo:

  Cormen, Leiserson, Rivest, Stein, ***Introduzione agli algoritmi e strutture dati***, Quarta edizione, McGraw-Hill

Esami

- L’esame consiste in una tesina scritta su un argomento specifico e in una prova orale su tutti gli argomenti trattati a lezione

- La tesina viene assegnata dal docente e consiste nella produzione di un elaborato scritto (in LATEX) e nello sviluppo di alcuni algoritmi in linguaggio Python, inerenti il tema assegnato

- Le prove d’esame si svolgeranno a giugno, luglio, settembre 2025 e gennaio-febbraio 2025
  - Inviare via mail la tesina scritta in LaTeX e i sorgenti dei programmi (in Python) una settimana prima della data concordata per l’esame; per concordare la data d’esame inviare una mail con una proposta indicativa
  - Gli esami saranno verbalizzati nelle date del calendario ufficiale pubblicato sul sito web del Corso di Laurea

- Non sono previste prove intermedie d’esonero

Cominciamo!