Innovazione e tradizione nella Matematica e nel suo insegnamento

# Strategie matematiche

Sara Nicoloso [1] Marco Liverani [2]

[1] IASI – Istituto di Analisi dei Sistemi e Informatica del CNR

[2] Facoltà di Scienze M.F.N. – Università Roma Tre

Roma, 30 Novembre 2009

# Sommario

# Problemi (1)

## I matematici non si occupano solo di numeri

- Si associa frequentemente l'idea del matematico, o di colui che risolve *problemi di matematica*, come di un esperto di numeri e calcoli numerici
- Naturalmente "fare matematica" significa anche lavorare con i numeri, ma più spesso con formule e procedimenti che permettono di affrontare i problemi **a prescindere dal valore numerico** delle *variabili* in gioco
- Talvolta si parla di matematica e dei **matematici** anche nel cinema e nei romanzi, spesso se ne parla a sproposito, e un trattamento peggiore viene spesso riservato agli **informatici**

# Problemi (2)

## I matematici non si occupano solo di numeri

Qualche volta invece il cinema o la letteratura riesce a darne un'immagine efficace...

Ad esempio, scriveva Thomas Mann in un suo romanzo ("*Altezza reale*"):

> — *E i suoi studi, signorina, se posso informarmene? Matematica, a quanto so. Non la stanca? Non è terribilmente faticoso per il cervello?*
>
> — *Niente affatto, –ella rispose– non conosco nulla di più carino. È un* **gioco nell'aria**, *per dir così. O addirittura fuori dall'aria, in* **regioni senza polvere**, *comunque.*

# Problemi (3)

**Si occupano anche di questioni ancora più astratte dei numeri**

In particolare per *applicare* la matematica a problemi che matematici non sono, il matematico deve

- progettare un'**astrazione** del problema (spostandosi "*nell'aria o, addirittura, fuori dall'aria*")
- costruendo un **modello matematico** del contesto che sta affrontando (una "*regione senza polvere*")
- sul modello può poi gettare le basi di una **strategia di calcolo** che lo conduca in breve ad una soluzione del problema

L'approccio al problema varia da un *tipo di problema* all'altro...

... **tipo di problema?!?**

Ebbene sì, ne esistono molti tipi diversi. E come si distingue un "tipo" di problema da un altro? Dal "**tipo di soluzione**" che si deve trovare!

# Problemi (4)

## Diversi tipi di problema

- È vero che...? Esiste un oggetto tale che...? È possibile che...? L'equazione ammette una soluzione reale?

  *Sono* **problemi di decisione** *o* **esistenza***: si chiede solo di dire se esiste una soluzione al problema, la risposta è solo "sì/no", "vero/falso"*

- Trovare un oggetto tale che... Calcolare una soluzione tale che...

  *Sono* **problemi di ricerca***: si chiede di individuare* **una** *soluzione*

- Trovare tutti gli oggetti tali che... Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione...

  *Sono* **problemi di enumerazione***: si richiede di individuare* **tutte** *le soluzioni ammissibili*

# Problemi (5)

## Diversi tipi di problema

- Trovare l'oggetto che renda massimo il guadagno... Trovare la strada che renda minimo il costo... Calcolare la soluzione che renda minimo/massimo il valore della funzione...

  *Sono* **problemi di ottimizzazione***: si richiede di trovare le soluzioni* **migliori**

Questi ultimi sono forse i problemi più difficili da affrontare, ma anche quelli che si avvicinano di più a problemi "reali"

Questo tipo di problema si dice di **ottimizzazione combinatoria** se l'insieme delle soluzioni ammissibili (tra le quali scegliere quelle *ottime*) è di cardinalità finita

# Algoritmi (1)

## Per risolvere un problema non basta una formula

- I problemi di cui si occupano i matematici richiedono quindi ben più di una semplice "formula risolutiva" per essere affrontati
- Spesso è necessario progettare una **strategia risolutiva** complessa, molto articolata, per risolvere il problema
- La strategia si poggia su un **modello matematico** che semplifichi il contesto, ma senza perdere le caratteristiche rilevanti del problema, e ne evidenzi gli aspetti chiave
- Il modello può così consentire di affrontare il problema mediante **procedimenti di calcolo numerico**, oppure sfruttando **ben note proprietà matematiche** (che qualcuno ha dimostrato essere vere) che non apparivano subito evidenti
- Dopo aver costruito un modello della realtà su cui è definito il problema, è necessario tradurre la strategia risolutiva in un **procedimento risolutivo puntuale**, che permetta di calcolare il risultato

# Algoritmi (2)

## Serve un procedimento di calcolo dettagliato

- Per realizzare una strategia risolutiva complessa non basta una **semplice formula**, spesso è necessario un **procedimento risolutivo** più articolato. Vediamo qualche esempio.
- Problema elementare: calcolare il valore della seguente espressione aritmetica:

$$5 - \frac{8+4}{3+1}$$

- Come si calcola? È semplice, un passo alla volta:
  1. $8 + 4 = 12$
  2. $3 + 1 = 4$
  3. $12/4 = 3$
  4. $5 - 3 = 2$

# Algoritmi (3)

## Serve un procedimento di calcolo dettagliato

- Altro problema (meno matematico): preparare un sugo al ragù:
  1. Sminuzzo carote, sedano e cipolla (*quanti?*)
  2. Soffriggo i pezzetti nell'olio ben caldo (*per quanto tempo?*)
  3. Aggiungo il macinato (*in che proporzione rispetto al soffritto?*)
  4. Aggiungo la salsa di pomodoro (*quanta?*)
  5. Lascio sobbollire (*per quanto tempo?*)

# Algoritmi (4)

## Serve un procedimento di calcolo dettagliato

- Talvolta è necessario usare espressioni più complicate:

$$y = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

- Un matematico la scriverebbe in una forma più "compatta", ma equivalente:

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Questa strana espressione mette in evidenza, per chi conosce il significato matematico del simbolo "$\Sigma$", un procedimento per passi elementari che ci permette di **costruire la soluzione**
- ... a volte la difficoltà principale è quella di entrare nel merito della **sintassi** e della **semantica** di un "sotto-codice" linguistico

# Algoritmi (5)

## Serve un procedimento di calcolo dettagliato

- Quindi, dato il problema "*sommare tutti gli elementi di un certo insieme* $X$"
- ... posso rappresentare l'insieme con un modello molto elementare, "mettendo in fila" i suoi elementi: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- ... e così posso adottare una "formulazione matematica" del problema, del tipo: $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$
- che ci permette di definire un procedimento risolutivo costruttivo (che costruisce la somma, il risultato, passo dopo passo):
  1. $y \leftarrow 0$
  2. $i \leftarrow 1$
  3. $y \leftarrow y + x_i$
  4. $i \leftarrow i + 1$
  5. se $i \leq n$ allora torna al passo n. 3, altrimenti fermati: il valore della somma è $y$

# Algoritmi (6)

## Un procedimento di calcolo dettagliato è un algoritmo

- Un **algoritmo** è una procedura per risolvere un problema (calcolare/costruire la soluzione di un problema), caratterizzata dalle seguenti proprietà:
  1. i passi della procedura devono essere **elementari** (in proporzioni alle capacità di chi dovrà eseguire l'algoritmo: ciascun passo deve poter essere eseguito singolarmente senza ulteriori spiegazioni)
  2. i passi della procedura devono essere in **numero finito** (una procedura con un numero infinito di passi nessuno potrebbe portarla a termine!)
  3. la procedura deve terminare dopo che sia stato eseguito un **numero finito di operazioni**

# Algoritmi (7)

## Un procedimento di calcolo dettagliato è un algoritmo

- Problema: dato un numero $n$ calcolare la sua radice quadrata
- Strategia: se $x = \sqrt{n}$ allora $x^2 = n$...
- Algoritmo risolutivo:
  1. Sia $x = 1$
  2. Se $x^2 = n$ allora $x$ è la radice quadrata di $n$
  3. Altrimenti incrementa di $1$ il numero $x$ e torna al passo 2
- Vediamo un po': se $n = 9$...
  Se $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow 1$ non è la radice quadrata di $9$
  Se $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow 2$ non è la radice quadrata di $9$
  Se $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow 3$ **è la radice quadrata** di $9$!!! L'algoritmo funziona!
- Però se $n = 8$, proviamo ad applicare lo stesso algoritmo...
  Se $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$ infatti 1 non è la radice quadrata di $8$
  Se $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow$ infatti 2 non è la radice quadrata di $8$
  Se $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow$ caspita! Abbiamo superato $8$... e la sua radice dov'è?
- L'algoritmo è **sbagliato**: non risolve il problema per ogni sua istanza, ma soltanto per **alcune istanze** del problema!

# Algoritmi (8)

## Un procedimento di calcolo dettagliato è un algoritmo

- I **numeri primi** sono quei numeri naturali divisibili solo per 1 e per se stessi: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
- Problema: trovare un **numero pari** maggiore di 2 che **non sia somma di due numeri primi** (es.: $54 = 50 + 4$, ma anche $47 + 7 = 54$ e sia $7$ che $47$ sono primi)
- Vediamo un po':

$$4 = 2 + 2,\ 6 = 3 + 3,\ 8 = 3 + 5,\ 10 = 5 + 5,\ \ldots,\ 54 = 47 + 7,\ \ldots$$

# Algoritmi (9)

## Un procedimento di calcolo dettagliato è un algoritmo

- Algoritmo risolutivo:
  1. Sia $n \leftarrow 4$
  2. Sia $x \leftarrow 2$
  3. Se $x$ o $n - x$ non sono primi allora incrementa $x$ di $1$
  4. Se $x > n/2$ allora abbiamo trovato la soluzione: $n$ è pari e non è dato dalla somma di due numeri primi!!!
  5. Altrimenti $x$ e $n - x$ sono entrambi numeri primi e quindi $n$ è dato dalla somma di due numeri primi
  6. Incrementa di $2$ il numero $n$ e torna al passo 2
- L'algoritmo è composto da 6 passi elementari, ma ...
  ...**se non esiste** un numero pari maggiore di $2$ che non sia la somma di due numeri primi... l'algoritmo **non si fermerà mai!!!**
- La **congettura di Goldbach** afferma che un numero del genere non esiste, ma è una congettura, nessuno l'ha mai dimostrata: se fosse vera, l'algoritmo non avrebbe mai fine, se fosse falsa terminerebbe smentendo la congettura... interessante!

# Modelli e strategie risolutive (1)

- Gli algoritmi sono procedimenti di calcolo elementari, ma devono essere progettati con attenzione per evitare di incorrere in grosse "delusioni"
- Prima ancora della sequenza di operazioni elementari previste da un certo algoritmo è necessario progettare una **strategia risolutiva** con cui affrontare il problema
- Per "strategia risolutiva" intendiamo un **modello** (matematico) ed un **algoritmo** con cui procedere alla costruzione della soluzione del problema
- Vediamone alcune...

# Modelli e strategie risolutive (2)

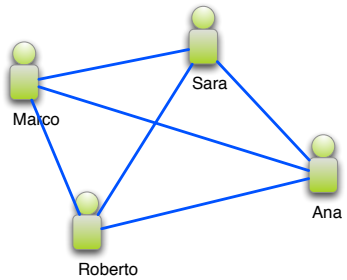
**Per cominciare... proviamole tutte!**

- La strategia di **ricerca esaustiva** è sicuramente la più naturale, quando cerchiamo, tra tutte le "configurazioni" possibili degli oggetti del nostro problema, quella che possa essere considerata una soluzione del problema stesso, una tra le soluzioni migliori o, addirittura, tutte le soluzioni del problema

# Modelli e strategie risolutive (2)

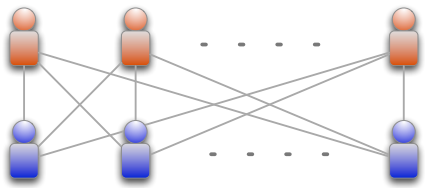
**Per cominciare... proviamole tutte!**

- **Stringiamoci la mano**! È il primo giorno di scuola, bisogna salutarsi per conoscersi... In classe ci sono $22$ bambini, quante saranno le strette di mano?
- Strategia: usare un **modello matematico** che ci aiuti a capire il problema: ci vuole un **grafo**!




E poi un **algoritmo** "facile" di conteggio *sul* grafo: gli archi (le strette di mano) sono $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1=\frac{(n-1)n}{2}$

- Perché i $22$ calciatori in campo impiegano poco? perché sono $11$ vs $11$ e agiscono (quasi completamente in parallelo!)



# Modelli e strategie risolutive (3)

**Per cominciare... proviamole tutte!**

- I bambini escono in fila indiana dalla scuola, ogni giorno in un ordine diverso... entro la fine dell'anno le avremo provate tutte?

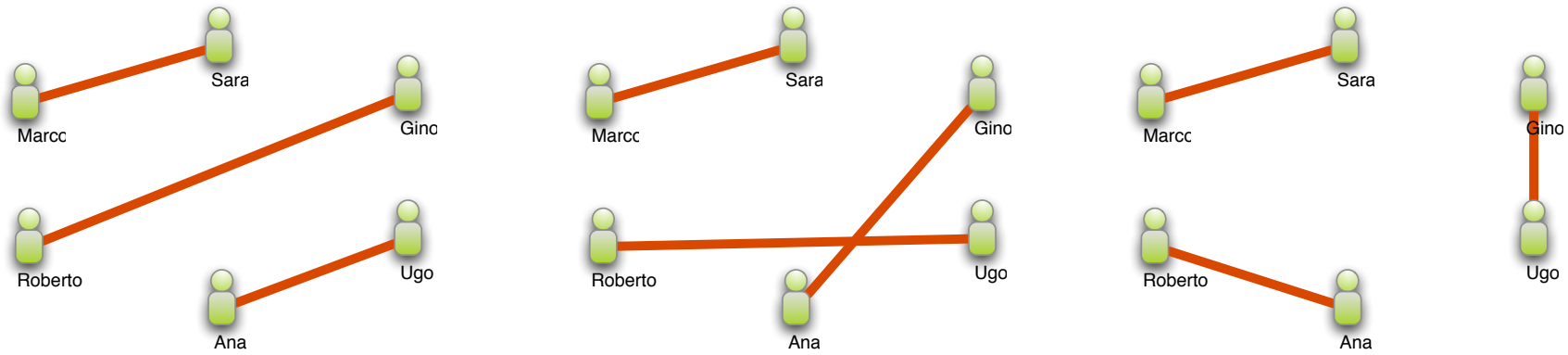

In questo caso, siamo solo in $3$... le possibili "file indiane" sono $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$

- Se i ragazzi sono 22... $22! = 1,12 \cdot 10^{21}$ ... servirebbero miliardi di miliardi di giorni di scuola...sono troppe! **Non può andare!**

# Modelli e strategie risolutive (4)

## Per cominciare... proviamole tutte!

- Proviamo a vedere se possiamo almeno fare tutte le possibili combinazioni di coppie di bambini... ogni giorno i banchi sono occupati da almeno una coppia di bambini diversa dal giorno prima
  Un grafo ci può aiutare a definire un algoritmo per questo calcolo.




  Il grafo è "compatto" ... ma quante soluzioni!

- La prima coppia posso formarla in $n-1$ modi diversi; la seconda in $n-3$ modi diversi... e così via...
  ... il numero di possibili coppie è quindi $(n-1)\cdot(n-3)\cdot(n-5)\cdot\ldots 3\cdot 1$
  se i bambini fossero solo 10 impiegheremmo **945 giorni** per provare tutte le disposizioni!

# Modelli e strategie risolutive (5)

**Per ottenere il massimo, scegliamo le migliori, le più ghiotte!**

- Si va in gita! Cosa portarsi nello zaino se c'è il sole?
  Ci possono essere utili un cappello da sole, una felpa, un giacca a vento, dei panini, dell'acqua...
  Ma lo zaino è piccolo e non ci sta tutto: cosa mi porto?
  Definisco delle **utilità** di ciascun oggetto e misuro quanto **spazio** occupa

| | cappello | felpa | giacca | panini | acqua |
|---|---|---|---|---|---|
| Utilità | 8 | 3 | 2 | 5 | 6 |
| Spazio | 4 | 9 | 5 | 7 | 6 |

  Lo zaino ha una capacità di 18

- **Elenco** tutti i possibili sottoinsiemi... li **valuto** e **scelgo** il migliore... ma quanti sono?
  ... facciamo una prova: {cappello}, {felpa}, {giacca}, ..., {cappello, felpa}, {cappello, giacca}, ..., {cappello, felpa, giacca, panini, acqua}
  ... sì, ma quanti sono? Se gli oggetti sono $n$... tutti i possibili sottoinsiemi sono $2^n$

# Modelli e strategie risolutive (5)

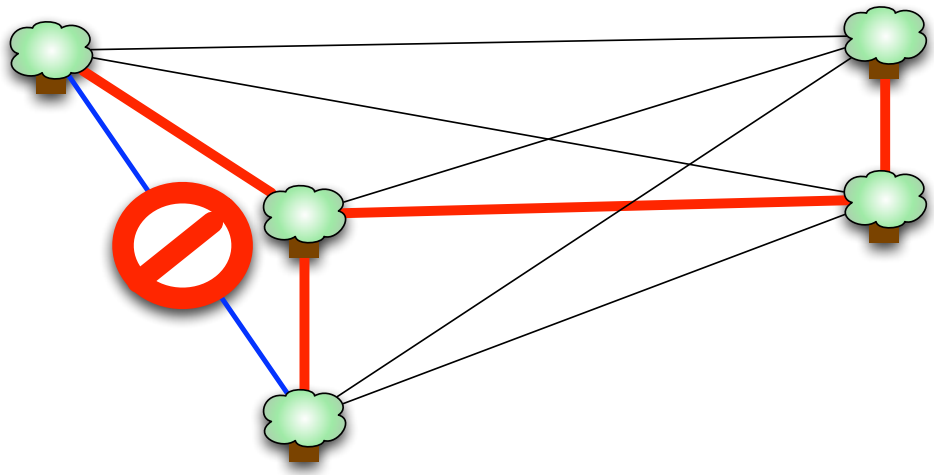
**Per ottenere il massimo, scegliamo le migliori, le più ghiotte!**

- Non possiamo provare tutti i modi di riempire lo zaino, serve una strategia più efficiente
- Proviamo l'algoritmo **goloso**: infilo ripetutamente nello zaino quello che ritengo più utile, se c'entra
  Prendo cappello, acqua e panini! L'utilità complessiva è 19 (la soluzione è ammissibile: lo spazio occupato è 17)
- Attenzione, la strategia non dà sempre la soluzione ottima per questo problema...

# Modelli e strategie risolutive (6)

**Per ottenere il massimo, scegliamo le migliori, le più ghiotte!**

- ... ci sono altri problemi in cui la **strategia golosa** funziona sempre
- Il Rettore vuole costruire un impianto di irrigazione per innaffiare i cespugli del "parco"... vuole minimizzare la spesa, dunque usare la minor quantità di tubo possibile



- Questa strategia non prova tutti i possibili impianti idrici (sono tanti!), ma **costruiamo direttamente il migliore** scegliendo di volta in volta il collegamento (utile) più breve

# Modelli e strategie risolutive (7)

## Divide et impera!

- Giochiamo! Pensate un numero tra 1 e 32 ed io lo indovinerò con 5 domande al massimo!
- Solo cinque domande?!? Solo cinque domande! E non è una questione di fortuna...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

Il numero è minore o uguale di 16?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

Il numero è minore o uguale di 24?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

Il numero è minore o uguale di 20?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

Il numero è minore o uguale di 22?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

Il numero è minore o uguale di 21?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

Allora il numero è 21!

- Altro che fortuna, c'è sotto una buona **strategia**:
  ad ogni passo scartiamo metà delle possibili soluzioni rimaste

# Altri problemi, nuovi guai! (1)

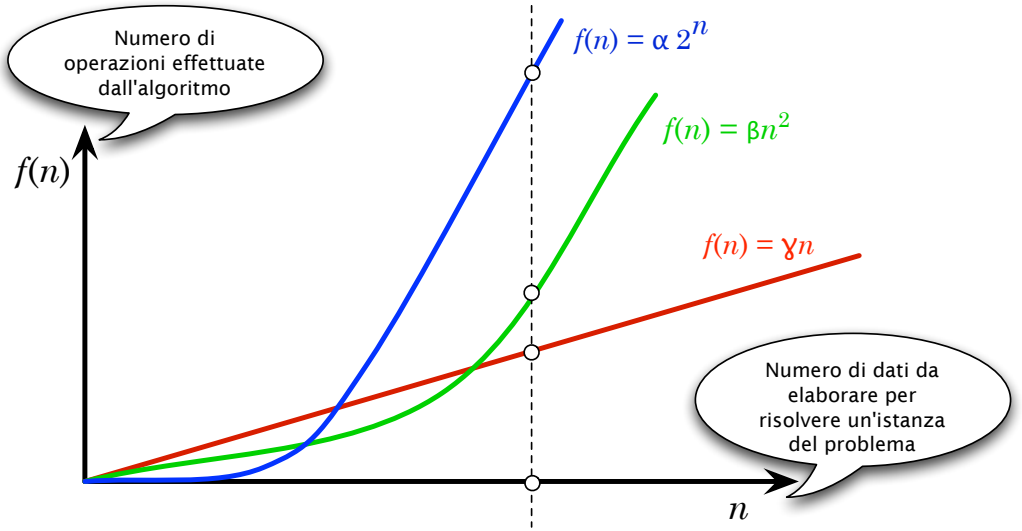
## Quanto è difficile calcolare la soluzione?

- Se i procedimenti di calcolo (algoritmi) sono composti da operazioni elementari, è semplice eseguire ciascun passo dell'algoritmo
- Tante più operazioni vengono eseguite, tanto maggiore è il **tempo** necessario per calcolare la soluzione
- Dunque, definita una procedura per risolvere un problema, possiamo definire come misura della **difficoltà** nel calcolare la soluzione, il numero di operazioni che devono essere eseguite
- Ma il numero di operazioni per necessarie per risolvere un certo problema dipende dal **numero di dati** che devono essere elaborati per calcolare la soluzione: trovare l'elemento massimo in un insieme con $10$ elementi richiede meno tempo (meno operazioni) che individuare l'elemento massimo in un insieme con $1.000$ elementi!
- Ossia: il numero di operazioni necessarie per calcolare la soluzione di una *istanza* del problema, dipende dalla **dimensione dell'istanza** del problema stesso

# Altri problemi, nuovi guai! (2)

## Quanto è difficile calcolare la soluzione?

- La **complessità computazionale** di un procedimento risolutivo (algoritmo) è dato da una *funzione* del numero di dati da elaborare (la *dimensione dell'istanza del problema*)




- Ad esempio:
  - Calcolare il **minimo** su un insieme di $n$ elementi: richiede circa $n$ operazioni; la complessità è dell'ordine di $f(n) = n$
  - Ordinare in **ordine crescente** una sequenza di $n$ elementi richiede, con un algoritmo elementare, $n^2$ operazioni: la complessità è dell'ordine di $f(n) = n^2$
  - Calcolare **tutti i sottoinsiemi** di un insieme di $n$ elementi richiede almeno $2^n$ operazioni: la complessità dell'algoritmo è dell'ordine di $f(n) = 2^n$

# Altri problemi, nuovi guai! (3)

## Quanto è difficile calcolare la soluzione?

- Tanto più la funzione complessità cresce rapidamente, tante più operazioni dovrà compiere l'algoritmo per risolvere un'istanza di un problema di dimensione $n$...
- ... più operazioni = più tempo... Cosa significa in concreto?
- I computer sono molto veloci, ma impiegano pur sempre un tempo ben definito per compiere un'operazione anche semplice
- Supponiamo di usare un computer che esegue **100 milioni di operazioni al secondo**... per compiere una singola operazione impiega quindi

$$\frac{1}{100.000.000} = 0,00000001 \text{ sec.}$$

  È certamente un computer molto veloce!
- Eppure anche 100 milioni di operazioni al secondo possono essere poche... facciamo qualche esempio

# Altri problemi, nuovi guai! (3)

## Quanto è difficile calcolare la soluzione?

- Anche **100 milioni di operazioni al secondo** possono essere poche... facciamo qualche esempio
- Prendiamo in esame il comportamento di alcuni algoritmi ipotetici con funzioni di complessità differenti: $n^2$, $n^5$, $2^n$

| $n$ | $n^2$ | $n^5$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|
| 10 | $0,000001$ sec. | $0,001$ sec. | $0,00001$ sec. |
| 30 | $0,000009$ sec. | $0,243$ sec. | $10,7$ sec. |
| 40 | $0,000016$ sec. | $1,024$ sec. | 3 ore |
| 50 | $0,000025$ sec. | $3,125$ sec. | 130 giorni |
| 55 | $0,00003$ sec. | $5,03$ sec. | $11,4$ anni |
| 60 | $0,00004$ sec. | $7,8$ sec. | $3,7$ secoli |

- **Più di 3 secoli?!?** Nessuno avrebbe la possibilità di aspettare tutto questo tempo per vedere la soluzione del problema!

# Altri problemi, nuovi guai! (4)

## Conclusione

- Anche con il più veloce degli **esecutori** (calcolatori, super-computer, ecc.) alcune strategie risolutive diventano impraticabili
- Quali problemi richiedono algoritmi con complessità così elevate? Si tratta forse di problemi complicatissimi?
  Purtroppo no, alcuni esempi sono dati da problemi di **combinatoria** elementari:
  - **insieme delle parti** di un insieme di cardinalità $n$: $2^n$
    (se $n = 10$ allora $2^n = 1.024$, se $n = 20$ allora $2^n = 1.048.576$)
  - **permutazioni degli elementi** di un insieme di cardinalità $n$: $n!$
    (se $n = 10$ allora $n! = 3.628.800$, se $n = 13$ allora $n! = 6.227.020.800$)
  - ecc.

# Altri problemi, nuovi guai! (5)

## Conclusione

- L'approccio corretto è quindi quello di **migliorare le strategie risolutive** e non la potenza del calcolatore usato per eseguirle: se la strategia è inefficiente (viene tradotta in un algoritmo di complessità elevata) sarà praticabile solo per piccole istanze del problema
- Per alcuni problemi (i cosiddetti problemi **NP-completi**) nessuno è riuscito a migliorare a sufficienza la complessità dell'algoritmo risolutivo, anche se nessuno ha dimostrato che questo miglioramento sia impossibile da ottenere...!
- È possibile migliorare gli algoritmi risolutivi per questi problemi o sono "strutturalmente difficili"?

  Oggi è questo **il più grande problema irrisolto dell'informatica teorica!**