UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N. – CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Tesi di Laurea in Matematica di

Barbara Burchielli

Studio del comportamento di grafi sotto all'applicazione iterata dell'operatore clique

Relatore
Prof. Marco Liverani

20 Ottobre 2004

Grafo clique e operatore *K*

- Un ***grafo*** *G*=(*V*,*E*) è una coppia in cui *V* è l'insieme dei vertici ed *E* è l'insieme degli spigoli
- Una ***clique*** *Q* di un grafo *G* è un **sottografo completo massimale**
- Un ***grafo clique*** di un grafo *G* è il grafo ***K***(*G*) ottenuto come intersezione delle clique di *G*
- Il grafo clique ***K***(*G*) ha come vertici le clique del grafo *G*; esiste uno spigolo tra due vertici in ***K***(*G*) se e soltanto se le corrispondenti clique in *G* hanno intersezione non vuota

Grafo clique iterato e *K*-comportamento

Il grafo ***clique-iterato*** $\mathbf{K}^n(G)$ è definito per ricorrenza come segue:

$$\mathrm{K}^{\mathrm{n}}(\mathrm{G}) = \begin{cases} \mathrm{G} & \text{se n} = 0 \\ \mathrm{K}(\mathrm{K}^{\mathrm{n-1}}(\mathrm{G})) & \text{se n } \geq 1 \end{cases}$$

Un grafo *G* è ***K****-divergente* se:

$$\lim_{n\to\infty} |V(K^n(G))| = \infty$$

Un grafo *G* è ***K****-convergente* se non è ***K***-divergente

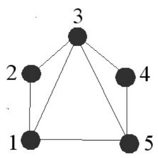
- ***K****-nullo*: *G* converge ad un grafo costituito da un unico vertice
- ***K****-periodico*: $\exists\ m,n$ interi t.c. $\mathbf{K}^m(G) \cong \mathbf{K}^n(G)$.

In particolare se $p=m-n=1$ e il grafo *G* è connesso, diremo che *G* è un grafo *self-clique* per il quale si ha: $\mathrm{K}(G) \cong G$

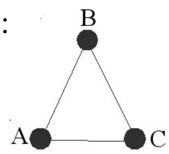
Esempi di grafi K-covergenti

- Esempio di grafo ***K****-nullo:*

G:



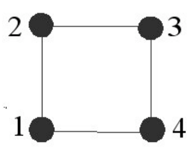
K(*G*):



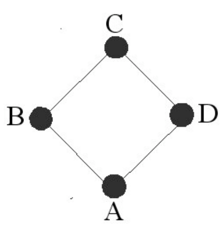
K^2(*G*):

- Esempio di grafo *self-clique*: $\boldsymbol{K}(C_4) \cong C_4$

C_4:



$\boldsymbol{K}(C_4)$:



Studio del *K*-comportamento di un grafo

- L'obiettivo della tesi è quello di studiare il *K*-comportamento (*K*-divergenza o *K*-convergenza) di alcune classi di grafi

- In particolare siamo interessati a studiare delle tecniche (algoritmi) per il **riconoscimento automatico del *K*-comportamento** di un grafo

- Visto che l'applicazione della definizione porterebbe ad algoritmi di complessità super-polinomiale, siamo interessati ad individuare **proprietà** di più semplice applicazione **che caratterizzino completamente il *K*-comportamento** di un grafo

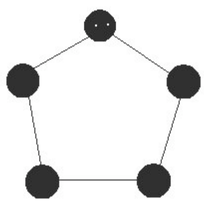
Proprietà Helly e grafi clique-Helly

- Diremo che una famiglia $\boldsymbol{F}$ di sottoinsiemi di un insieme X soddisfa la *proprietà Helly* se per ogni sottofamiglia $S \subseteq \boldsymbol{F}$, $S=\{S_1,\ldots, S_k\}$, tale che $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ $(i \neq j)$, risulta $\bigcap_{i=1,\ldots,k} S_i \neq \emptyset$

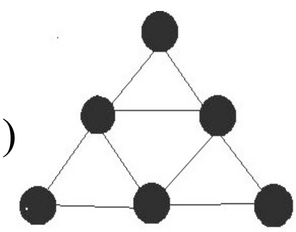
- Un grafo $G = (V,E)$ si dice *clique-Helly* se la famiglia di tutte le sue clique soddisfa la proprietà Helly

- Esempio

(A)



(B)



Proprietà dei grafi clique-Helly

- Un risultato fondamentale nello studio del ***K***-comportamento della classe dei grafi clique-Helly è il fatto che tale classe di grafi è **chiusa** rispetto all'operatore ***K***-iterato:

Teorema: ***K***("clique-Helly") = "clique-Helly"

- Una delle ragioni per le quali i grafi clique-Helly rivestono una notevole importanza nello studio del K-comportamento dei grafi, è dovuta al seguente risultato:

Teorema: I grafi clique-Helly sono ***K***-convergenti di periodo 1 o 2

Caratterizzazione dei grafi clique-Helly

- Sia T un *triangolo* di un grafo G
- Un triangolo esteso T_E di G relativo a T è il sottografo indotto in G dai vertici che formano un triangolo con almeno uno spigolo di T
- Un vertice v di G si dice *universale* in G se è adiacente ad ogni altro vertice del grafo

Teorema: Un grafo G è clique-Helly se e solo se ogni suo triangolo esteso contiene un vertice universale

- Questo teorema permette di costruire un **algoritmo di complessità polinomiale** che consente il riconoscimento di grafi clique-Helly (nel lavoro di Tesi, è stato progettato tale algoritmo ed è stato codificato in linguaggio C)

Retratti e K-divergenza

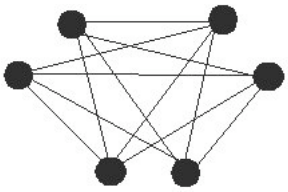
- Un *morfismo* $\alpha{:}G\rightarrow H$ è una funzione di vertici da $V(G)$ in $V(H)$ che manda vertici adiacenti in G in vertici adiacenti o uguali in H.
- Diremo che H è un retratto di G se $\alpha|_H = Id|_H$
- Un risultato che pone in relazione la retrazione con il K-comportamento è il seguente risultato dovuto a Neumann-Lara:

Teorema (di retrazione): Sia H un retratto di G. Allora $\boldsymbol{K}(H)$ è un retratto di $\boldsymbol{K}(G)$ ed inoltre, se il grafo H è $\boldsymbol{K}$-divergente, allora anche il grafo G è $\boldsymbol{K}$-divergente

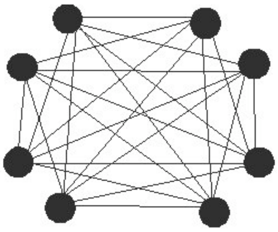
Un grafo K-divergente

- Il primo esempio di grafo $\boldsymbol{K}$-divergente è l'**ottaedro $\boldsymbol{n}$-dimensionale** O_n definito come il complementare di un *perfect matching* su $2n$ vertici, per n>2
- Abbiamo provato che $\mathbf{K}(O_n) \cong O_2{}^{n-1}$ e quindi per $n \geq 3$ l'ottaedro n-dimensionale O_n è $\boldsymbol{K}$-divergente in modo esponenziale
- Esempio

O_3



$\boldsymbol{K}(O_3)$



Studio della K-divergenza

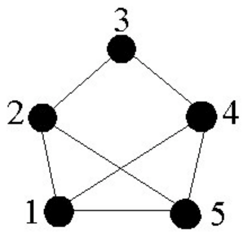
- Si può studiare il ***K***-comportamento di alcune classi di grafi riportandosi al ***K***-comportamento dell'ottaedro n-dimensionale tramite il concetto di retrazione introdotto in precedenza e quindi, per il *teorema di retrazione*, si può concludere che tali classi sono ***K***-divergenti

- In particolare è stato dimostrato che la classe dei grafi completi multipartiti $K_{p_1,\ldots,p_n}$ con $n \geq 3$, $p_i \geq 2$, sono ***K***-divergenti in modo esponenziale, in quanto è possibile determinare una retrazione da un grafo completo multipartito $K_{p_1,\ldots,p_n}$ all'ottaedro n-dimensionale e poiché sappiamo che l'ottaedro O_n è K-divergente, il teorema di retrazione implica che anche $K_{p_1,\ldots,p_n}$ è K-divergente

Decomposizione modulare

- Un diverso modo di studiare il ***K***-comportamento di un grafo è suddividere il grafo in sottografi più semplici (***moduli***) e studiare, quindi, il ***K***-comportamento di questi ultimi
- Un *modulo* $M \subseteq V(G)$ di un grafo G è un insieme di vertici del grafo tale che ogni vertice di M è adiacente agli stessi vertici non appartenenti ad M
- Esempio

G



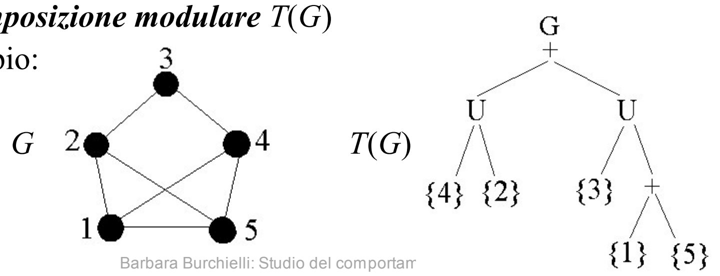
$M_1 = \{2,4\}$
$M_2 = \{1,3,5\}$

Composizione seriale e parallela

- Attraverso operazioni di *somma* e *unione* è possibile decomporre un grafo G in moduli (es.: i moduli M_1 e M_2 siano una partizione dei vertici di G)
- ***Unione*** (***Composizione parallela***): $G = G[M_1] \cup G[M_2]$ tale che:
  - $V(G) = V(\mathrm{G}[M_1]) \cup V(\mathrm{G}[M_2])$
  - $E(G) = E(\mathrm{G}[M_1]) \cup E(\mathrm{G}[M_2])$
- ***Somma*** (***Composizione seriale***): $G = G[M_1] + G[M_2]$ tale che:
  - $V(G) = V(\mathrm{G}[M_1]) \cup V(\mathrm{G}[M_2])$
  - $E(G) = E(\mathrm{G}[M_1]) \cup E(\mathrm{G}[M_2]) \cup V(\mathrm{G}[M_1]) \times V(\mathrm{G}[M_2])$

Decomposizione modulare

- In un grafo si possono ritrovare solo tre tipi di modulo:
  - ***Paralleli***: sono dati dalle componenti connesse di G, se G non è connesso
  - ***Seriali***: sono dati dalle componenti connesse del complementare di G, se G è connesso e il suo complementare non lo è
  - ***Neighborhood***: sono grafi (o sottografi) connessi il cui complementare è connesso
- Applicando ricorsivamente la decomposizione modulare appena descritta ad un grafo G, possiamo calcolare il suo ***albero di decomposizione modulare*** $T(G)$
- Esempio:



Cografi

- Un *cografo* è un grafo privo di sottografi indotti isomorfi a P_4 (cammino di lunghezza 3)
- Se G è un cografo allora:
  - L'albero di decomposizione modulare è unico
  - G si decompone esclusivamente in moduli seriali e paralleli (l'assenza di P_4 indotti implica l'assenza di moduli "neighborhood")
  - Abbiamo proposto un algoritmo di complessità polinomiale per determinare l'albero di decomposizione modulare di un cografo

K-comportamento dei cografi

- Il ***K***-comportamento dei cografi è stato completamente caratterizzato:

Teorema:

Un cografo G è ***K***-convergente <u>se e solo se</u> è clique-Helly

- Abbiamo quindi studiato (ed implementato in linguaggio C), un algoritmo di complessità polinomiale che permette di determinare se un grafo generico è un cografo