SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULLE SERIE NUMERICHE

Esercizio 1

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x-10}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2}$

Usando il criterio della rdice n-sima troviamo che la serie converge assolutamente (perché per applicare questo criterio dobbiamo inserire il modulo e quindi si studia la convergenza assoluta!) se $\left|\frac{3x-10}{2}\right| < 1$ e risolvendo si trova l'intervallo $x \in (\frac{8}{3}, 4)$. Possiamo provare a verificare se c'é convergenza semplice negli estremi. Per $x = \frac{8}{3}$ si ottiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$ che converge per il criterio di Leibniz (si veda l'esercizio 2), e per $x = 4$ si ottiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che converge.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\pi}{x-2}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$

Osserviamo innanzitutto che $\cos n\pi = (-1)^n$. Studiamo la convergenza assoluta con il criterio della radice. Si ottiene che la serie converge assolutamente se $\left|\frac{1}{x-2}\right| < 1$, quindi per $x > 3$ e $x < 1$. Se $x = 1$ si ottiene la serie armonica, che diverge, se $x = 3$ si ottiene $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ che converge per il criterio di Leibniz.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x + 4)^n, \; x > 0$

Di nuovo studiamo la convergenza assoluta con il criterio della radice. Risolvendo la disequazione $|\ln x + 4| < 1$ segue che la serie converge assolutamente per $x \in (e^{-5}, e^{-3})$. Non si ha convergenza semplice negli estremi.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-x} + \frac{3}{5}\right)^n$

Dal criterio della radice segue che si ha convergenza assoluta se $\left|e^{-x} + \frac{3}{5}\right| < 1$, quindi per $x > -\ln\frac{2}{5}$. Se $x = -\ln\frac{2}{5}$ si ottiene $\sum_{n=1}^{\infty}(1)^n$ che diverge. Quindi non si ha convergenza semplice dove non c'é quella assoluta.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{x^2-2} - 2\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

Dal criterio della radice segue che si ha convergenza assoluta se $|e^{x^2-2} - 2| < 1$, da cui si ha $x \in (-\sqrt{2+\ln 3}, -\sqrt{2}) \cup x \in (\sqrt{2}, \sqrt{2+\ln 3})$. Per $x = \pm\sqrt{2}$ si ha anche convergenza semplice.

Esercizio 2

In questa serie di esercizi si fa uso del criterio di convergenza di Leinbiz per serie a segni alterni. Le ipotesi da verificare sono: data una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e se a_n é decrescente, allora la serie converge.

$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$
$a_n = \frac{1}{\ln n} > 0$ é decrescente perché il logaritmo é crescente e tende a zero perché $\lim_{n\to\infty} \ln n = 0$ quindi la serie converge.
$(ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{e^n+3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n+3n}$.
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n+3n} = 0$, $e^n + 3n > 0$ e $\frac{1}{e^n+3n} > \frac{1}{e^{n+1}+3(n+1)}$ cioé é decrescente.
$(iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-20n+2}$
Il polinomio $n^2 - 20n + 2$ é crescente in n solo da un certo n in poi, peró possiamo comunque usareil criterio di Leibniz perché comunque l'importante é la crescenza per n grande. Infatti

$$n^2-20n+2 < (n+1)^2-20(n+1)+2 = n^2+2n+1-20n-20+2 \iff 2n > 19 \iff n > 10.$$

Quindi possiamo usare il criterio, perche' si ha decrescenza e ovviamente $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-20n+2} = 0$.
$(iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)}{\ln n} \cdot n$
Osserviamo che $\sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = (-1)^n$ quindi, sapendo che $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} \to 0$, verifichiamo la decrescenza:

$$\frac{n+1}{\ln n+1} < \frac{n}{\ln n} \iff n\ln(n+1) < (n+1)\ln n \iff \ln(n+1)^n < \ln n^{n+1} \iff$$

$$\iff (n+1)^n < n^{n+1} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n$$

l'ultima affermazione é vera perché $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$.