

X tutorato di analisi matematica 1a

Gabriele Nocco Stefano Urbinati

15 dicembre 2005

Esercizio 1. Dimostrare che la seguente caratterizzazione equivale a quella di massimo limite:

l è massimo limite se

i) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu : \forall n \geq \nu \quad a_n < l + \epsilon$

ii) esiste una sottosuccessione $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l$

Esercizio 2. Sia a_n tale che $\maxlim(a_n) = +\infty$ $\minlim(a_n) = -\infty$:

a) Dare un esempio di a_n come sopra

b) Dimostrare che

$\exists \{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$ tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = +\infty$

$\exists \{a_{n_h}\} \subseteq \{a_n\}$ tale che $\lim_{h \rightarrow +\infty} a_{n_h} = -\infty$

Esercizio 3. Sia a_n una successione qualunque. Dimostrare che se x_0 è un punto di accumulazione per a_n , allora esiste una sottosuccessione a_{n_k} estratta da a_n tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = x_0$

Esercizio 4. Trovare il massimo e il minimo limite delle seguenti successioni:

a) $a_n = 1 - \cos n$

b) $a_n = \arctan(-2)^n$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

d) $a_n = \frac{n!}{2^n} \sin n \frac{\pi}{2}$

e) $a_n = \sqrt[n]{(-1)^n n}$

f) $a_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$

g) $a_n = 1 + (-1)^n$

h) $a_n = \frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{10}$

i) $a_n = \sin^2 \left(\frac{n^2}{2n+1} \right) + \cos^2 \left(\frac{n^3+6n}{(n+2)^2} \right)$