

## ESERCIZI SUGLI INTEGRALI

### ESERCIZIO I : integrali di funzioni razionali

$$1) \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx$$

Svolgimento:

Il discriminante del denominatore é negativo. Mi riconduco ad un integrale del tipo  $\int \frac{f'}{f}$  e poi integro la parte restante.

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \\ &= -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}, \end{aligned}$$

sostituendo nell'ultimo integrale  $t = x + 1$ , quindi  $dt = dx$ , si ha

$$\begin{aligned} -2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} &= -2 \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = -\int \frac{1}{t^2+2} + \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} \end{aligned}$$

L'ultimo integrale é uguale a

$$\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int t \left( \frac{2t}{(t^2+2)^2} \right) dt =$$

per parti

$$= -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}}$$

Ricapitolando e sostituendo  $t = x + 1$  si ha:

$$-\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{x+1}{2(x+1)^2+4} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} + C$$

In modo analogo risolvere:

$$2) \int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx \quad \left[ \mathbf{R.} \log \left| \frac{(x-2)^3}{x-1} \right| + C \right]$$

$$3) \int \frac{x dx}{(x+1)(x+3)(x+5)} \quad \left[ \mathbf{R.} \frac{1}{8} \log \frac{(x+3)^6}{|x+5|^5|x+1|} + C \right]$$

$$4) \int \frac{x^3-6 dx}{x^4+6x^2+8} \quad \left[ \mathbf{R.} \log \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2} \arctan \frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C \right]$$

$$5) \int \frac{x^5 dx}{x^3-1} \quad \left[ \mathbf{R.} \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} \log(x^3-1) + C \right]$$

$$6) \int \frac{4 dx}{x^4+1} \quad \left[ \mathbf{R.} \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \sqrt{2} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C \right]$$

### ESERCIZIO II : integrali di funzioni irrazionali

Sostituzioni utili:

Se  $k$  é un denominatore comune delle frazioni  $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ , esponenti della  $x$  nella funzione integranda, si può sostituire  $x = t^k$ ,  $dx = kt^{k-1}dt$ . Si ottiene una funzione razionale in  $t$ .

Se nell'integranda appaiono termini del tipo  $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}$ , estendendo quanto detto prima si può sostituire

$$t^k = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Si ottiene una funzione razionale in  $t$ .

Per integrali del tipo

$$\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$$

**prima sostituzione di Eulero:**  $a > 0$

si ponga  $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{ax} + t$ .

**seconda sostituzione di Eulero:**  $c > 0$

si ponga  $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ .

**terza sostituzione di Eulero:**  $ax^2+bx+c = (x-\alpha)(x-\beta)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

si ponga  $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{ax} + t$ .

Svolgere i seguenti esercizi:

$$7) \int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}} dx$$

Svolgimento:

usiamo la seconda sostituzione:  $\sqrt{1+x+x^2} = xt + 1$ , quindi  $x = \frac{2t-1}{1-t^2}$ ,  $dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}$ . Sostituendo nell'integrale si ha:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 - \sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2 \sqrt{1+x+x^2}} dx &= 2 \int \frac{t^2}{1-t^2} dt = \int -2 + \int \frac{1}{1-t^2} dt = \\ &= -2t - \int \frac{1}{1-t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt = -2t - \log|1-t| + \log|1+t| + C. \end{aligned}$$

Infine sostituendo  $t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$  otteniamo

$$-2 \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} + \log|2x + 2\sqrt{1+x+x^2} + 1| + C.$$

- 8)  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$   $\left[ \mathbf{R.} \frac{4}{3} [\sqrt[4]{x^3} - \log(\sqrt[4]{x^3} + 1)] + C \right]$
- 9)  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}$   $\left[ \mathbf{R.} \log \left| \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}} \right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C \right]$
- 10)  $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-x+3}}$   $\left[ \mathbf{R.} \frac{1}{\sqrt{3}} \log \left| \frac{\sqrt{x^2-x+3} - \sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right| + C \right]$
- 11)  $\int \frac{\sqrt{x^2+2x} dx}{x}$   $\left[ \mathbf{R.} \sqrt{x^2+2x} + \log|x+1 + \sqrt{x^2+2x}| + C \right]$
- 12)  $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2-1}}$   $\left[ \mathbf{R.} \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2} \log|x + \sqrt{x^2-1}| + C \right]$
- 13)  $\int \frac{(x+1) dx}{2x+x^2 \sqrt{2x+x^2}}$   $\left[ \mathbf{R.} - \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + C \right]$
- 14)  $\int \frac{\sqrt{x^2+4x} dx}{x^2}$   $\left[ \mathbf{R.} - \frac{8}{x^2 + \sqrt{4x+x^2}} + \log|x+2 + \sqrt{4x+x^2}| + C \right]$

### ESERCIZIO III : integrali di alcune classi di funzioni trigonometriche

Può essere utile la sostituzione:

$\tan \frac{x}{2} = t$ , quindi  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ .

Calcolare l'integrale

$$15) \int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Svolgimento: sostituiamo  $\tan \frac{x}{2} = t$  quindi

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int \frac{t dt}{t^4 + 1}$$

Procedendo analogamente all'esercizio 6 si ottiene  $\frac{2t}{t^4+1} = \frac{2t}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} \dots$

Svolgere i seguenti esercizi:

$$16) \int \sin^5 x dx \quad \left[ \mathbf{R.} -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} + C \right]$$

$$17) \int \cos^4 x \sin^3 x dx \quad \left[ \mathbf{R.} -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C \right]$$

$$18) \int \frac{dx}{4-5 \sin x} \quad \left[ \mathbf{R.} \frac{1}{3} \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 2}{2 \tan \frac{x}{2} - 1} \right| + C \right]$$

$$19) \int \frac{dx}{(1+\cos x)^2} \quad \left[ \mathbf{R.} \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{x}{2} + C \right]$$

$$20) \int \frac{\sin^2 x dx}{1+\cos^2 x} \quad \left[ \mathbf{R.} \sqrt{2} \arctan \left( \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) - x + C \right]$$