

3. ESERCIZI SUL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Ricordiamo l'enunciato del principio di induzione: Sia $\{P_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di proposizioni. Se :

- (i) P_1 é vera;
 - (ii) $P_k \Rightarrow P_{k+1} \quad \forall k \in \mathbf{N}$,
- Allora P_n é vera $\forall n \in \mathbf{N}$.

Esercizio 1

Dimostrare per induzione le seguenti uguaglianze e disuguaglianze:

- (a) $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$
- (b) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- (c) se $a \geq -1$, $(1+a)^n \geq 1+na$ (disuguaglianza di Bernoulli)
- (d) $n! \geq 2^{n-1}$
- (e) se $a \neq 1$, $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Esercizio 2

Se $x \geq 1$, usando la disuguaglianza di Bernoulli, dimostrare che

$$x^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{x-1}{n} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Esercizio 3

Dimostrare che $\forall n \in \mathbf{N}$ il numero $n + n^2$ é pari.