

NOME: \_\_\_\_\_ COGNOME: \_\_\_\_\_ MATRICOLA: \_\_\_\_\_

**Attenzione:** Svolgere i seguenti esercizi, utilizzando il retro dei fogli per i conti.  
Non usare altri fogli. Riportare le risposte negli spazi.

1

2

3

4

5

**Esercizio 1.**

(a) Date le seguenti rette di equazioni

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 2t + 1 \end{cases}$$

Stabilirne la mutua posizione.

(b) Dati i tre vettori

$$v_1 = (1, 1, 1),$$

$$v_2 = (0, 1, 2),$$

$$v_3 = (1, 0, \lambda).$$

(i) Calcolare il volume del parallelepipedo generato da questi 3 vettori applicati in uno stesso punto. Stabilire il valore del parametro  $\lambda$  per cui questo volume vale  $\frac{1}{2}$

(ii) Scrivere l'equazione del piano ortogonale a  $v_1$  e  $v_2$  e passante per il punto  $(3, 7, 10)$ .

**Esercizio 2.**

(i) Data la superficie quadrica di equazione

$$z^2 - x^2 + y^2 = 1,$$

dire di che tipo di quadrica si tratta e tracciarne uno schizzo in  $\mathbf{R}^3$ .

(ii) Una superficie quadrica ha le seguenti intersezioni con i piani coordinati:

con il piano  $z = 0$  la curva  $x^2 + 6y^2 - 4 = 0$ , con il piano  $x = 0$  la curva  $3z^2 + 3y^2 - 2 = 0$ .

- Scrivere l'equazione della quadrica,
- Dire di che tipo di quadrica si tratta.
- Tracciarne uno schizzo in  $\mathbf{R}^3$ .

**Esercizio 3.** Dato l'integrale doppio:

$$\iint_A x \cos(x+y) dx dy$$

dove  $A = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \times [0, \frac{\pi}{4}]$ .

(i) impostare l'integrale doppio come integrale iterato.

(ii) calcolarlo.

**Esercizio 4.** Data la funzione  $f(x, y) = x^4 - 4x^3 - 4xy + 2y^2$

(i) Calcolare il gradiente di  $f$ .

(ii) Calcolare i punti critici;

(ii) Classificare i punti critici attraverso lo studio della matrice Hessiana.

(iii) Calcolare la derivata direzionale di  $f$  lungo il vettore  $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  nel punto  $P = (-1, 2)$

**Esercizio 5.** Un vaso a sezione circolare ha come profilo verticale la curva di equazione  $f(z) = 2 + \sin(z)$ .

(i) Fare uno schizzo della superficie.

(ii) Scrivere l'equazione della superficie del vaso in coordinate cartesiane.

(iii) Calcolarne il volume in funzione dell'altezza. Ricordiamo da Istituzioni 1 che per columi racchiusi da superfici di questo tipo, si ha

$$V = \int_{z_0}^{z_1} \pi r^2 dz$$