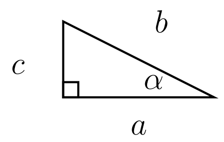
Capitolo 4

Appendice

4.1 Richiami di trigonometria

Iniziamo introducendo alcune funzioni trigonometriche, partendo dai triangoli rettangoli:

Definizione 4.1.1 ***Definizione delle funzioni trigonometriche 1***
Dato una angolo α costruiamo un triangolo rettangolo T dove α sia l'angolo tra un cateto (diciamo la base) e l'ipotenusa.



1. *il "seno" dell'angolo α è definito come il rapporto tra l'ipotenusa del triangolo e il cateto opposto, cioè:*
$$\sin(\alpha) = \frac{c}{b};$$
2. *il "coseno" dell'angolo α è definito come il rapporto tra l'ipotenusa del triangolo e il cateto adiacente, cioè:*
$$\cos(\alpha) = \frac{a}{b};$$

3. *la "tangente" dell'angolo α è definita come il rapporto tra cateto opposto e il cateto adiacente, cioè:*

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{c}{a}.$$

Osserviamo che in questo modo abbiamo definito le funzioni seno, coseno e tangente per angoli compresi tra 0 e 90 gradi.

Esercizio 4.1.2 *Calcolare (usando la definizione data)*

(a) *seno di zero gradi;*

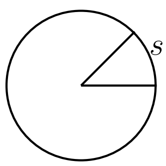
(b) *coseno di zero gradi;*

(c) *seno di 45 gradi;*

(d) *tangente di zero gradi.*

Introduciamo ora la definizione di radiante. La ragione di ciò appare chiara se vogliamo pensare alle funzioni trigonometriche appena definite come funzioni di variabile reale (gli angoli espressi in gradi non sono, ovviamente, numeri reali).

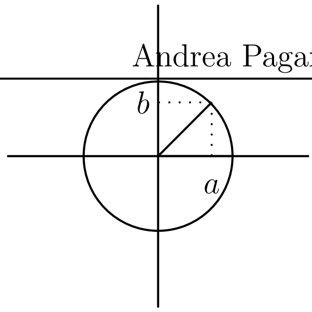
Definizione 4.1.3 ***Definizione di radiante***
Sia C un cerchio di raggio R e sia α un angolo al centro.



il radiante è il rapporto tra la lunghezza d'arco sotteso all'angolo e il raggio della sfera, cioè:

$$\theta = \frac{s}{R}.$$

Definizione 4.1.4 ***Definizione delle funzioni trigonometriche 2***
Sia C un cerchio di raggio R. Dalle definizioni appena date, segue che:



1. *il seno dell'angolo θ è definito come il rapporto tra l'ordinata del raggio vettore che identifica l'angolo e il raggio, cioè:*

$$\sin(\theta) = \frac{b}{R};$$

2. *il coseno dell'angolo θ è definito come il rapporto tra l'ascissa del raggio vettore che identifica l'angolo e il raggio, cioè:*

$$\sin(\theta) = \frac{a}{R};$$

3. *la tangente dell'angolo α è definita come il rapporto tra il seno e il coseno, , cioè:*

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Osservazione 1 **(i)** Se $R = 1$ (cerchio goniometrico) allora $sin(\theta) = b$, $\cos(\theta) = a$.

(ii) La funzione seno e la funzione coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π, la funzione tangente è periodica di periodo π.

(iii) L'insieme dei valori assunti (codominio) dalla funzione seno e dalla funzione coseno è $[-1, 1]$

(iv) La funzione seno e la funzione coseno sono continue e derivabili su $\mathbb{R}$, la funzione tangente è continua e derivabile in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

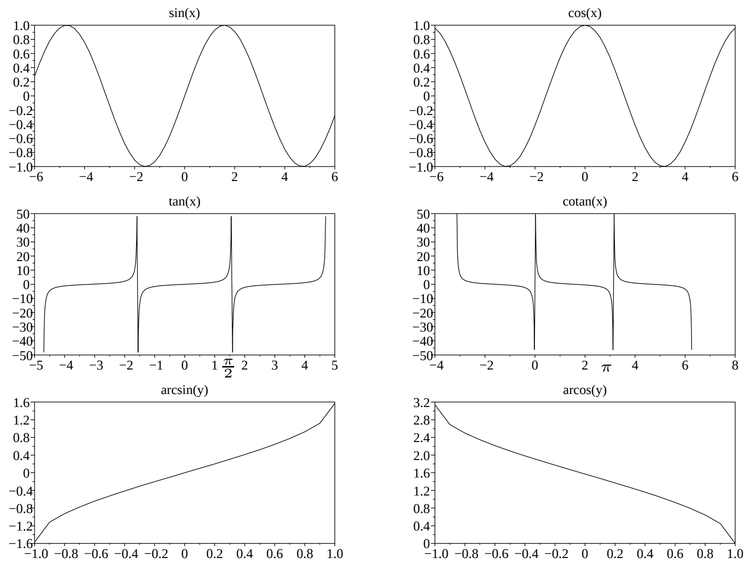
Definizione 4.1.5 ***Definizione delle funzioni trigonometriche 3***
E' utile ricordare che le funzioni seno e coseno possono a loro volta comporsi per ottenere altre funzioni goniometriche. Inoltre su tali funzioni è possibile calcolare le inverse.

1. *la funzione cotagente:* $\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$. *E' una funzione periodica di periodo* π*, continua e derivabile in* $(0, \pi)$

2. *la funzione arcoseno:* $\arcsin(x)$ *è l'inversa della funzione seno. Ricordiamo che l'inversa di una funzione esiste solo se la funzione di partenza è iniettiva (a ogni valore del codominio corrisponde un solo punto nel dominio). Quindi dobbiamo restringere la funzione seno a unintervallo della retta reale su cui la funzione seno sia iniettiva, ad esempio* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. *A questo punto la funzione inversa esiste e il suo dominio è* $[-1, 1]$ *mentre il codominio di arcoseno è (ovviamente)* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

3. *la funzione arcocoseno:* $\arccos(x)$ *è l'inversa della funzione coseno. Per le stesse ragioni esposte per la funzione seno restringiamo il dominio di definizione del coseno a* $[0, \pi]$ *in modo da ottenere una funzione iniettiva. In questo caso il dominio è* $[-1, 1]$. *Il codominio è* $[0, \pi]$.

Ecco i grafici delle funzioni trigonometriche.



4.2 Elementi di geometria tridimesionale

4.2.1 Piani e rette in $\mathbb{R}^3$

Consideriamo in questo sezione lo spazio tridimensionale come spazio vettoriale. Scegliamo come base di tale spazio la base canonica $\overline{e}_1 = (1,0,0), \overline{e}_2 = (0,1,0)$ e $\overline{e}_3(0,0,1)$ (rimandiamo a un qualsiasi testo di algebra lineare per la definizione di base di uno spazio vettoriale).

Un piano Π in $\mathbb{R}^3$ può essere descritto da una equazione lineare (polinomio di primo grado) nelle variabile x, y, x. Cioè

$$\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : Ax + By + Cz + D = 0\},$$

per una opportuna scelta dei coefficienti $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.2.1 **(a)** *Dimostrate che se $D = 0$ allora il piano Π passa per l'origine.*

(b) *Dimostrate che se i coefficienti sono proporzionali , cioè se esiste un numero reale k tale che $A_1 = kA, B_1 = kB, C_1 = kC, D_1 = kD$, allora il piano Π_1 definito da $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ e il piano Π definito da $Ax + By + Cz + D = 0$ coincidono.*

Alla luce dell'ultimo esercizio sono sufficienti tre informazioni per determinare completamente un piano.

Esempio 4.2.2 **(a)** *Dati tre punti P, Q, R non allineati esiste un solo piano che passa per P, Q, R.*

Esercizio 4.2.3 **(i)** *Trovare il piano passante per* $(0,0,0), (1,1,1), (1,0,1)$.

Soluzione: Occorre sostituire le coordinate dei tre punti nell'equazione che definisce il piano. Si ha in questop modo un sistema lineare:

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ A + B + C + D &= 0 \\ A + C + D &= 0 \end{aligned}$$

o, equivalentemente

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ B &= 0 \\ A &= -C. \end{aligned}$$

Quindi basta porre $A = -C = 1$, *e l'equazione del piano è data da* $x - z = 0$.

(ii) *Trovare il piano passante per* $(0, 0, 0), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$.

(b) *Dati due vettori* $\overline{v}, \overline{w}$ *e un punto* P *esiste un solo piano passante per* P *e parallelo a* $\overline{v}$ *e a* $\overline{w}$.

Esercizio 4.2.4 **(i)** *Trovare il piano passante per* $P = (1, 0, 1)$ *e parallelo ai vettori* $\overline{v} = (1, 1, 1), \overline{w} = (2, 1, 1)$.

Soluzione: usiamo (e allo stesso tempo introduciamo) l'equazione parametrica del piano:

$$\begin{aligned} x &= P_1 + sv_1 + tw_1 \\ y &= P_2 + sv_2 + tw_2 \\ z &= P_3 + sv_3 + tw_3 \\ &\text{con} \quad s, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dove $P = (P_1, P_2, P_3)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *e* $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Nel nostro caso si ha

$$\begin{aligned} x &= 1 + s + 2t \\ y &= t + t \\ z &= 1 + s + t. \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a s, t *si ha l'equazione cartesiana. In particolare* $y - z + 1 = 0$.

(ii) *Trovare il piano passante per* $P = (0, 0, 1)$ *e parallelo ai vettori* $\overline{v} = (1, 0, 1), \overline{w} = (0, 1, 2)$.

(c) *Dato un punto* P *e un vettore* $\overline{n}$ *esiste un solo piano passante per* P *e perpendicolare a* $\overline{n}$.

Esercizio 4.2.5 **(i)** *Trovare il piano passante per* $P = (0, 0, 0)$ *e perpendicolare al vettore* $\overline{n} = (1, 1, 1)$.

Soluzione: poichè il piano passa per l'origine sappiamo che $D = 0$. *Inoltre, sappiamo dai corsi di calcolo, che il vettore perpendicolare* *a una superficie è dato dal gradiente della funzione che desacrive la superficie. nel nostro caso la funzione è data da* $F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0$, *quindi* $F_x = A, F_y = B, F_z = C$. *A questo punto sappiamo che* $A = 1, B = 1, C = 1$, *da cui segue che il piano è dato da* $x + y + z = 0$.

(ii) *Trovare il piano passante per* $P = (1, 1, 1)$ *e perpendicolare a* $\overline{n} = (2, 1, 1)$

(d) *Dato un punto* P *e due vettori* $\overline{v}, \overline{w}$ *esiste un solo piano passante per* P *e parallelo a* v, w.

Esercizio 4.2.6 **(i)** *Trovare il piano passante per* $P = (0, 0, 0)$ *e parallelo ai vettori* $\overline{v} = (0, 1, 0)$ *e* $\overline{w} = (1, 1, 1)$.

Soluzione: come nell'esempio precedente,si ha $D = 0$. *Dall'algebra lineare sappiamo che il prodotto vettoriale tra due vettori è un vettore perpendicolare ad entrambi, quindi possiamo calcolare il prodotto vettoriale* $\overline{v} \times \overline{w}$ *e ricondurci all'esempio preceente. In particolare si ha:* $\overline{v} \times \overline{w} = (1, 0, -1)$, *da cui segue che* $A = 1, B = 0, C = -1$. *Il piano cercato ha equazione:* $x - z = 0$

(ii) *Trovare il piano passante per* $P = (1, 1, 1)$ *e parallelo a* $\overline{v} = (2, 1, 1), \overline{w} = (0, 0, 1)$

Una retta in $\mathbb{R}^3$ può essere descritta come l'inetrsezione di due piani, cioè come la soluzione del sistema lineare:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$

Un secondo modo per descrivere una retta in $\mathbb{R}^3$ è dato dall'equazione parametrica

$$\begin{aligned} x &= x_o + tv_1 \\ y &= y_o + tv_2 \\ z &= z_o + tv_3 \\ &\text{con} \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dove $P = (x_o, y_o, z_o)$ sono le coordinate di un punto sulla retta e $v = (v_1, v_2, v_3)$ sono le coordinate di un vettore parallelo alla retta.

Esempio 4.2.7 **(i)** *Dati due punti P, Q esiste una ed una sola retta passante per P, Q*

Esercizio 4.2.8 **(a)** *Trovare la retta passante per $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 0, 0)$.*

Soluzione 1: poichè la retta è data dall'intersezione dei due piani ogni punto sulla retta appartiene a entrambi ii piani. Quindi i piani contengono sia P che Q. Da questo segue immediatamente che $D = 0$.

Per determinare i coefficienti AB, C dobbiamo sostituire i punti P, Q nelle equazioni dei piani:

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ A + C &= 0 \end{aligned}$$

da cui segue che i piani hanno equazione: $\Pi_1 : x - z = 0$ e $\Pi_2 : y = 0$.

Soluzione 2: utilizziamo ora l'espressione parametrica. Poniamo $\overline{v} = P - Q = (1, 0, 1)$. In tal caso l'equazione della retta è data da:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 0 \\ z &= 1 + t. \end{aligned}$$

Risolvendo per t si ha $x = z$ e $y = 0$ (come già visto).

(b) *Trovare la retta passante per $P = (1, 1, 1)$ e $Q = (2, 1, 0)$.*

(ii) Dato un punto P e un vettore $\overline{v}$ esiste una sola retta passante per P e di direzione v.

(a) *Trovare la retta passante per $P = (1, 0, 1)$ e di direzione $\overline{v} = (1, 1, 1)$.*

Soluzione: in questo caso è ovvio che è molto più semplice utilizzare l'equazione parametrica della retta. Si ha:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= t \\ z &= 1 + t. \end{aligned}$$

Per determinare l'equazione cartesiana (come intersezione di due piani) occorre risolvere rispetto alla variabile t. In particolare, $x = z$ e $x = y + 1$ sono le equazioni dei due piani.

(b) *Trovare la retta passante per $P = (1, 1, 1)$ e parallela al vettore $\overline{v} = (2, 1, 0)$.*

Prodotto scalare e prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Ricordiamo che dati due vettori in $\mathbb{R}^3$ possiamo definire due operazioni: il prodotto scalare e il prodotto vettoriale. Osserviamo che se il prodotto scalare può essere definito su $\mathbb{R}^n$ il prodotto vettoriale esiste solo in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 4.2.9 *Dati due vettori $\overline{v} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\overline{w} = (y_1, y_2, y_3)$ il prodotto scalare $\overline{v} \cdot \overline{w} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.*

Proprietà 4.2.10 *Per il prodotto scalare vale la seguente formula*

$$\overline{v} \cdot \overline{w} = |\overline{v}||\overline{w}| \cos\theta$$

dove $|\overline{v}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ è la lunghezza del vettore $\overline{v}$ e θ è l'angolo compreso tra i vettori $\overline{v}$ e $\overline{w}$.

Dimostrazione. Si usa il teorema del coseno (o Teorema di Carnot) □

Quindi il prodotto scalare può essere utilizzato per misuare gli angoli.

Esercizio 4.2.11 *Calcolare l'angolo tra i vettori $\overline{v} = (1, 2, 1)$ e $\overline{w} = (0, 1, 3)$*
Soluzione: $|\overline{v}| = \sqrt{6}$, $|\overline{w}| = \sqrt{10}$e $\overline{v} \cdot \overline{w} = 5$. Quindi l'angolo tra $\overline{v}$ e $\overline{w}$ ha cos pari a $\frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{10}}$.

In particolare due vettori sono perpendicolari se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

Definizione 4.2.12 *Dati due vettori $\overline{v} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\overline{w} = (y_1, y_2, y_3)$ il prodotto vettoriale $\overline{v} \times \overline{w}$ è un vettore di coordinate*

$$(x_2y_3 - x_3 - y_2, -(x_1y_3 - x_3y_1), x_1y_2 - x_2y_1).$$

Proprietà 4.2.13 *Il prodotto vettoriale di $\overline{v}$ e $\overline{w}$ è un vettore perpendicolare al piano generato da $\overline{v}$ e $\overline{w}$*

Esercizio 4.2.14 **(a)** *Calcolare il prodotto vettoriale $\overline{z} = \overline{v} \times \overline{w}$tra i vettori $\overline{v} = (1, 2, 1)$ e $\overline{w} = (0, 1, 3)$*

(b) *Verificare che $\overline{z}$ è perpendicolare a $\overline{v}$ e a $\overline{w}$.*

4.2.2 Curve e superfici in $\mathbb{R}^3$

Dai corsi di calcolo sappiamo che una superficie in $\mathbb{R}^3$ è data da una equazione nelle incognite x, y, z di un riferimento cartesiano.

Esempio 4.2.15 *L'ellisoide è definito dall'equazione*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Possiamo definire una superficie attraverso equazioni parametriche. Ovviamente abbiamo bisogno di due parametri.

$$\begin{aligned} x &= f_1(s,t) \\ y &= f_2(s,t) \\ z &= f_3(s,t) \\ &\text{con} \quad (s,t) \in [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

dove f_1, f_2, f_3 sono tre funzioni, in generale non lineari, nei parametri s, t.

Esempio 4.2.16 *L'ellisoide dell'esempio precedente è ha equazione parametrica:*

$$\begin{aligned} x &= a\cos(s)\sin(t) \\ y &= b\sin(s)\sin(t) \\ z &= c\cos(t). \end{aligned}$$

Esercizio 4.2.17 *Verificate che*

$$\begin{aligned} x &= a\cos(s)\sin(t) \\ y &= b\sin(s)\sin(t) \\ z &= c\cos(t). \end{aligned}$$

verificano l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} &= \frac{a^2\cos^2(s)\sin^2(t)}{a^2}+\frac{b^2\sin^2(s)\sin^2(t)}{b^2}+\frac{c^2\cos^2(t)}{c^2}\\
&= \cos^2(s)\sin^2(t)+\sin^2(s)\sin^2(t)+\cos^2(t)\\
&= (\cos^2(s)+\sin^2(s))\sin^2(t)+\cos^2(t)\\
&= \sin^2(t)+\cos^2(t)=1
\end{aligned}$$

Esercizio 4.2.18 *Considerate l'equazione parametrica:*

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{(}s)\cos(t)\\
y &= \sqrt{(}s)\sin(t)\\
z &= s.
\end{aligned}$$

Dimostrate che x, y, z cosi definite soddisfano l'equazione cartesiana

$$z = x^2 + y^2.$$

Disegnate l'oggetto descritto.

Come già osservato nel caso delle rette in $\mathbb{R}^3$ una curva nello spazio tridimensionale è data dall'intersezione di due superfici, cioè dalla soluzione del sistema formato dalle equazioni che definiscono le superfici, o altrimenti, da una equazione parametrica (di un solo parametro).

Esempio 4.2.19 *La curva di equazione parametrica*

$$\begin{aligned}
x &= u\\
y &= u^2\\
z &= u^3
\end{aligned}$$

è detta cubica.

Esempio 4.2.20 *La curva di equazione parametrica*

$$\begin{aligned}
x &= a\cos(u)\\
y &= a\sin(u)\\
z &= bu
\end{aligned}$$

è detta elica circolare.

Esercizio 4.2.21 *Sapete immaginare su quali superfici giacciono le curve degli esempi precedenti?*

4.2.3 Lunghezza di una curva

Come possiamo calcolare la lunghezza di una curva in $\mathbb{R}^3$?

Definizione 4.2.22 ***Lunghezza d'arco***
Sia Γ una curva di equazione parametrica

$$\begin{array}{rcl} x & = & f_1(u) \\ y & = & f_2(u) \\ z & = & f_3(u) \end{array}$$

con il parametro $u \in [a, b]$. La lunghezza della curva Γ tra due punti di coordinate $P_1 = (f_1(u_1), f_2(u_1), f_3(u_1))$ e $P_2 = (f_1(u_2), f_2(u_2), f_3(u_2))$ con $u_1, u_2 \in [a, b]$ è data da

$$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{(f_1'(u))^2 + (f_2'(u))^2 + (f_3'(u))^2}\, du.$$

Osservazione 2 *La derfinizione precedente ha senso se il vettore $(f_1'(u), f_2'(u), f_3'(u))$ è mai nullo.*

Esercizio 4.2.23 *Verificate che la lunghezza d'arco dell'elica circolare è data da:*

$$(u_2 - u_1)\sqrt{a^2 + b^2}.$$

4.3 Le trasformazioni dello spazio

Vogliamo ora dare alcuni cenni (o richiami) relativi alle trasformazioni dei punti dello spazio tridimensionale. Come già osservato pensiamo a $\mathbb{R}^3$ come a uno spazio vettoriale di dimensione 3 su cui abbiamo fissato una base: in particolare la base scelta è la base canonica $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per comodità di notazione scriveremo i vettori in colonna.

Definizione 4.3.1 ***Trasformazioni***
Una trasformazione di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ è una applicazione T che trasforma $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$ in $P' = \begin{pmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{pmatrix}$, cioè

$$TP = T \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che in uno spazio vettoriale (reale), scelta una base, i vettori sono $n-$uple di numeri (reali), e quindi le operazioni di somma tra vettori, e di moltiplicazione per uno scalare sono definite sulle componenti del vettore.

Tra le trasformazioni di $\mathbb{R}^3$ in sé alcune verificano le seguenti proprietà

- $T(P+Q) = T(P) + T(Q) \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^3$;
- $T(\lambda P) = \lambda T(P) \quad \forall P \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Definizione 4.3.2 ***Trasformazioni lineari*** *Le trasformazioni che verificano le proprietà precedenti sono dette lineari.*

Esempio 4.3.3 **(a)** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che*

$$T(P) = T \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3P_1 \\ P_2 - P_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 \end{pmatrix}$$

è lineare. Infatti:

- $$\begin{aligned} T(P+Q) &= T \begin{pmatrix} P_1 + Q_1 \\ P_2 + Q_2 \\ P_3 + Q_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(P_1 + Q_1) \\ (P_2 + Q_2) - (P_3 + Q_3) \\ (P_1 + Q_1) + (P_2 + Q_2) + (P_3 + Q_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3P_1 \\ P_2 - P_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3Q_1 \\ Q_2 - Q_3 \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 \end{pmatrix} \\ &= T(P) + T(Q) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} T(\lambda P) &= T\begin{pmatrix} \lambda P_1 \\ \lambda P_2 \\ \lambda P_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\lambda P_1 \\ (\lambda P_2 - \lambda P_3) \\ (\lambda P_1 + \lambda P_2 + \lambda P_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda 3 P_1 \\ (P_2 - Q_2) \\ (P_1 + P_2 + P_3) \end{pmatrix} \\ &= \lambda T(P). \end{aligned}$$

(b) *$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che*

$$T(P) = T\begin{pmatrix} \lambda P_1 \\ \lambda P_2 \\ \lambda P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda P_1 + 3 \\ \lambda P_2 - P_3 \\ \lambda P_1 + P_2 + P_3 \end{pmatrix}$$

non è lineare (è una traslazione). Infatti, ad esempio:

$$\begin{aligned} T(P+Q) &= T\begin{pmatrix} P_1 + Q_1 \\ P_2 + Q_2 \\ P_3 + Q_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_1 + Q_1 + 3 \\ (P_2 + Q_2) - (P_3 + Q_3) \\ (P_1 + Q_1) + (P_2 + Q_2) + (P_3 + Q_3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} T(P) + T(Q) &= T\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_1 + Q_1 + 6 \\ (P_2 + Q_2) - (P_3 + Q_3) \\ (P_1 + Q_1) + (P_2 + Q_2) + (P_3 + Q_3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che*

$$\begin{aligned} T(P) &= T\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + a_{13}P_3 \\ a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + a_{23}P_3 \\ a_{31}P_1 + a_{32}P_2 + a_{33}P_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è lineare comunque siano scelti i numeri reali a_{ij} $i, j = 1, 2, 3$

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tale che*

$$T(P) = T\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3P_1 * P_2 \\ P_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 \end{pmatrix}$$

non è lineare

Esercizio 4.3.4 (a) *Dimostrare che se* T *è lineare allora* $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione: possiamo scrivere $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Da ciò, per le proprietà delle trasformazioni lineari segue che:*

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) *Dimostrare che* T *è lineare se e solo se*

$$T(\lambda P + \mu Q) = \lambda T(P) + \mu T(Q)$$

per ogni scelta di $P.Q \in \mathbb{R}^3$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Le trasformazioni lineari hanno una rappresentazione in forma di matrici, cioè

Proposizione 4.3.5 *Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è lineare allora esistono $a_{ij} \in \mathbb{R}\, i, j = 1, 2, 3$ tali che*

$$\begin{aligned} & T(P) = T(P_1, P_2, P_3) \\ = \quad & (a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + a_{13}P_3, a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + a_{23}P_3, a_{31}P_1 + a_{32}P_2 + a_{33}P_3) \end{aligned}$$

In questo caso usiamo la seguente notazione

$$T(P) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

Esempio 4.3.6 (a) *Dilatazioni. Vogliamo trasformare un vettore $\overline{v}$ in un vettore $\overline{v}'$ con la stessa direzione e lo stesso verso, ma di lunghezza doppia. Ricordiamo che la lunghezza di un vettore $\overline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ è data dalla formula:*

$$|\overline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{4.1}$$

Quindi cerchiamo un vettore $\overline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ tale che $v_1 = kw_1, v_2 = kw_2, v_3 = kw_3$ con $k > 0$ (stessa direzione e verso) e

$$\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} = \sqrt{(kv_1)^2 + (kv_2)^2 + (kv_3)^2} = k\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Ne segue che $k = 2$. La trasformazione lineare che cerchiamo è data da

$$T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \\ 2v_3 \end{pmatrix},$$

e la matrice associata è

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

In generale una dilatazione è data da:

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.3.7 *Verificate che*

(a) *se* $|\lambda| < 1$ *allora* $|T_\lambda(\overline{v})| < |\overline{v}|$*;*

(b) *se* $\lambda < 0$ *allora* $T_\lambda(\overline{v})$ *ha verso opposto a* $\overline{v}$*.*

(b) *Rotazione di un angolo* ϕ *rispetto all'asse* x

$$T^x_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

(c) *Rotazione di un angolo* ϕ *rispetto all'asse* y

$$T^y_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

(d) *Rotazioni di un angolo* ϕ *rispetto all'asse* z

$$T^z_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anche per le traslazioni che abbiamo giè visto non essere trasformazioni lineari, possiamo utilizzare una notazione più semplice: in particolare la traslazione di passo $Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$ è data da

$$T_Q(P) = \begin{pmatrix} P_1 + Q_1 \\ P_2 + Q_2 \\ P_3 + Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

4.3.1 Composizione di trasformazioni e prodotto tra matrici

Le trasformazioni nello spazio possono essere composte tra di loro dando origine a nuove trasformazioni. Nel caso delle trasformazioni lineari la composizione di trasformazioni può essere espressa come prodotto tra matrici. In altre parole, se $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ e $S = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, $T \circ S$ è la matrice data dal prodotto righe per colonne, cioè:

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{13}b_{33} \end{pmatrix}$$

Esercizio 4.3.8 *Calcolate la composizione di:*

(a) *una dilatazione di ragione* 4 *e una rotazione attorno all'asse* x *di angolo* $\frac{\pi}{4}$

(b) *una rotazione di angolo* θ *attorno all'asse* y *e una rotazione attorno all'asse* x *di angolo* ϕ.