

1	
2	
3	
4	
5	

NOME: \_\_\_\_\_ COGNOME: \_\_\_\_\_ MATRICOLA: \_\_\_\_\_

**Attenzione:** Svolgere i seguenti esercizi, utilizzando il retro dei fogli per i conti.  
Non usare altri fogli. Riportare le risposte negli spazi.

**Esercizio 1.** Dato il piano  $\alpha$  in  $\mathbf{R}^3$  di equazione  $3x - y + 5z = 1$

(i) scrivere l'equazione della retta  $r$  perpendicolare al piano  $\alpha$  e passante per l'origine;

(ii) stabilire se il punto  $P(2, 2, 1)$  appartiene alla retta  $r$  di cui al punto (i);

(iii) calcolare la distanza tra il punto  $P(2, 2, 1)$  e la retta  $r$ , trovata in (i).

**Esercizio 2.** Date le seguenti rette di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad q : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = -t \end{cases}$$

(i) disegnare le tre rette in  $\mathbb{R}^3$ ;

(ii) due coppie di queste rette sono incidenti rispettivamente in due punti  $P$  e  $Q$ . Stabilire quali sono queste coppie di rette incidenti e trovare le coordinate dei punti  $P$  e  $Q$ ;

(iii) calcolare la distanza tra  $P$  e  $Q$ .

**Esercizio 3.** Data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = e^{y^2}(x^2 + 1) + y^2$$

(i) determinare il dominio di esistenza della funzione  $f$ ;

(ii) calcolare  $\vec{\nabla}f(x, y)$ ;

(iii) trovare i punti critici;

(iv) studiare la natura dei punti critici attraverso la matrice Hessiana;

(v) calcolare l'equazione del piano tangente nel punto  $P(2, 0)$ .

(vi) calcolare la derivata direzionale nel punto  $Q(-1, 1)$  e lungo la direzione  $\underline{v} \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

**Esercizio 4.** Sia  $T$  la regione del piano  $\mathbb{R}^2$  nel primo quadrante, compresa tra le circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 2.

(i) disegnare il dominio  $T$

(ii) scrivere  $T$  come dominio verticalmente semplice;

(iii) impostare l'integrale  $\iint_T 3x^2y \, (dx dy)$  come integrale iterato;

(iv) calcolarlo;

**Esercizio 5.** Data la superficie quadrica di equazione

$$2z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(i) studiarne le sezioni con i piani  $(z, x)$ ,  $(x, y)$  e  $z = 3$ ;

(ii) dire di che quadrica si tratta.

(iii) tracciarne uno schizzo in  $\mathbf{R}^3$

Una superficie quadrica ha le seguenti sezioni con i piani coordinati: con il piano  $x = 0$  la curva  $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}z^2 = 1$ , con il piano  $y = 0$  la curva  $-\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{3} = 1$ ,

(i) disegnare le sezioni indicate;

(ii) tracciarne uno schizzo in  $\mathbf{R}^3$ ;

(iii) scriverne l'equazione.