Le cupole geodetiche

Una cupola geodetica é una struttura semisferica composta da aste che si intersecano in triangoli. Dal punto di vista matematico possiamo definire cupola geodetica un tipo di triangolazione della sfera, in particolare tra tutte le divisioni in triangoli di una superificie sferica, si chiamano geodetiche quelle in cui i lati dei triangoli giaccioni sui cerchi massimi della sfera. I cerchi massimi giocano un ruolo fondamentale nella geometria sferica, sono i cammini "geodetici", ovvero che minimizzano la distanza tra due punti. Da un punto di vista matematico le triangolazioni piú studiate sono quelle con vertici di grado 5 e 6, in altre parole le cupole che abbiano solo vertici da cui partono 5 o 6 spigoli. Triangolazioni di questo tipo sono state classificate e molto studiate, é questo il motivo per cui la definizione che troviamo sugli articoli di matematica che trattano le cupole geodetiche é esattamente "triangolazione della sfera con vertici di grado 5 e 6. Infatti le cupole con queste caratteristiche hanno una simmetria icosaedrica, sono state classificate e studiate piú di altre perché questa simmetria é presente in natura (alcune molecole di virus hanno la forma di piccole cupole geodetiche). Pertanto ci occuperemo di triangolazioni dai cui vertici partono 5 o 6 spigoli. (i triangoli si compongono in esagoni e pentagoni)

Poiché stiamo parlando di una triangolazione della sfera, i lati dei triangoli devono necessariamente poggiare su grandi cerchi. Possiamo pensare ad una cupola geodetica anche come ad un poliedro inscritto in una sfera, che abbia vertici di grado 5 e 6 unicamente. Dalla formula di Eulero si deduce che i vertici di grado 5 sono esattamente 12. Per dimostrare questa proprietá é conveniente definire un nuovo oggetto: il Fullerene. Un Fullerene é un solido composto da sole facce pentagonali ed esagonali. Una cupola geodetica e un Fullerene sono una la duale dell'altro.

Ricordiamo al Formula di Eulero

$$V - S + F = 2$$

questa formula vale per tutti i solidi topologicamente equivalenti ad una sfera.
Supponiamo di avere a che fare con un solido le cui facce siano unicamente pentagoni ed esagoni. Sia F_5 il numero delle facce pentagonali e F_6 il numero delle facce esagonali. Il numero totale di facce é $F = F_5 + F_6$. Ogni spigolo é condiviso da due facce, quindi, contando 5 spigoli per ogni pentagono e 6 spigoli per ogni esagono, il numero totale degli spigoli é $S = \frac{1}{2}(5F_5 + 6F_6)$.
In ogni vertice si incontrano esattamente tre facce, quindi $V = \frac{1}{3}(5f_5 + 6F_6)$. Facciamo i conti sostituendo tutto nella formula:

$$\frac{1}{3}(5f_5 + 6F_6) - \frac{1}{2}(5F_5 + 6F_6) + 6F_5 + 6F_6 = 12$$

quindi

$$10F_5 - 15F_5 + 6F_5 + 12F_6 - 18F_6 + 6F_6 = 12$$

i termini F_6 scompaiono, rimane solo $F_5 = 12$.

Il numero dei vertici di grado 6 puó variare, ed é possibile trovare una relazione che lega tale numero con il numero dei vertici o degli spigoli, nel seguente modo: sostituiamo nella formula di Eulero 12 al posto di F_5, usiamo la stessa relazione tra spigoli e facce e ricaviamo una relazione che leghi tra loro facce esagonali e vertici:

$$V - \frac{1}{2}(60 + 6F_6) + F_6 + 10 = 0 \ \Leftrightarrow 2V - 4F_6 - 60 + 20 = 0,$$

da cui $F_6 = \frac{V}{2} - 10$.

Per dualitá possiamo trasferire queste proprietá sulle cupole geodetiche: una cupola geodetica ha esattamente 12 vertici di grado 5, puó non avere alcun vertice di grado 6 (in questo caso la cupola é un icosaedro) e se ne ha questi soddisfano la relazione $V_6 = \frac{F}{2} - 10$.

Quanti triangoli in una cupola? Una cupola geodetica si puó classificare in base alla frequenza della triangolazione, ovvero in base a quanti triangoli sono presenti in ogni faccia triangolare che possiamo tracciare unendo tre vertici di grado 5 (ce ne sono 12!!) adiacenti (figura 1).

La notazione di Schlafli di un poliedro regolare ha la forma $\{p, q\}$ e segnala che le sue facce sono p-agoni e in ogni suo vertice incidono q facce. L'icosaedro $\{3, 5\}$, il dodecaedro $\{5, 3\}$, infatti sono duali, vertici e faccie si invertono nei loro rispettivi ruoli. Quindi al tetraedro é associata la coppia $\{3, 3\}$, a cubo e ottaedro associamo rispettivamente $\{4, 3\}$ e $\{3, 4\}$. Per classificare (e quindi arrivare a contare i triangoli) di una

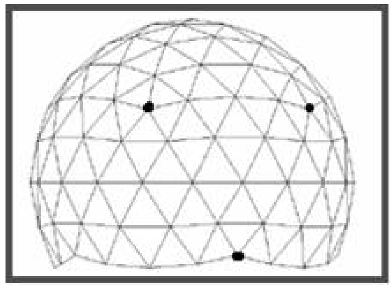

Figure 1: Tre vertici di grado 5 adiacenti

cupola geodetica, servono altri due parametri, che chiameremo (b, c) e che usualmente vengono posti come pedici nella notazione di Schlafli dell'icosaedro:

$$\{3, 5\}_{(b,c)}$$

questa é la notazione introdotta da Coxeter ([1]) per classificare una delle tre possibili triangolazioni della sfera (figura 2).

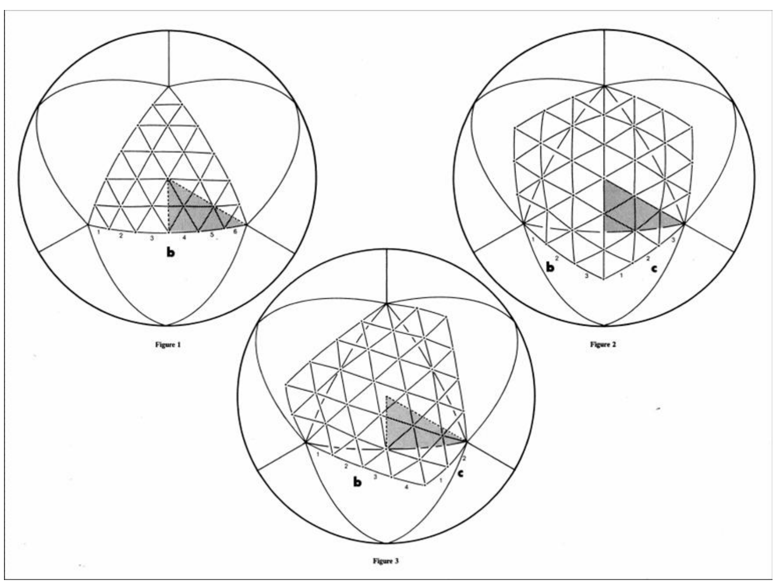

Figure 2: Le tre possibili cupole geodetiche

Piú precisamente la frequenza (b, c) indica che, volendo andare da un vertice dell'icosaedro ad un altro ADIACENTE (con uno spigolo in comune), procedendo SUI VERTICI DELLA TASSELLAZIONE, dovremo fare b passi sui vertici (della tassellazione) in una direzione, poi cambiare la direzione di 60 gradi e fare altri c passi.(figura 3)

I vari tipi di frequenza si raggruppano in tre principali: $b > 0, c = 0$, $b = c > 0$, b e c entrambi non nulli e diversi tra loro (figura 2).

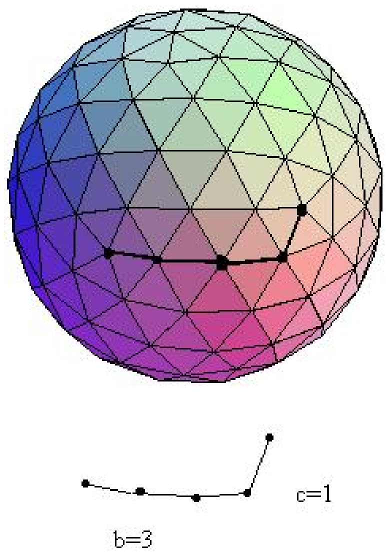

Figure 3: Esempio: b=3, c=1

A questo punto vogliamo calcolare la distanza tra due vertici di grado 5 della cupola utilizzando come unitá di misura il lato dei triangolini della tassellazione, ovvero vogliamo trovare una relazione tra il lato dell'icosaedro che otteniamo unendo tutti i vertici di grado 5 e il lato dei triangoli con cui abbiamo tassellato la sfera. Nel fare questo conto supporremo che tutti questi triangoli siano equilateri e identici tra loro. Cosa che é possibile fino a quando stiamo triangolando un icosaedro; nel momento in cui proiettiamo tutti i vertici sulla sfera circoscritta, i triangoli non sono piú né equilateri né uguali tra loro. Questo fatto NON influenza comunque il conto che andiamo a fare, visto che quello che vogliamo é CONTARE i triangoli, e tale numero non varia dal momento che proiettiamo i vertici sulla sfera. (cambiano i triangoli ma non il loro numero!!)

Riprendiamo uno schema simile a quello della figura 3, AB é il lato dell'icosaedro che vogliamo misurare. Nel caso che stiamo considerando avremo $b = 10$ e $c = 6$. (figura 4)

Tracciamo la perpendicolare da B, pertanto il triangolo ABH é rettangolo, cosí come il triangolo BDH. In particolare l' angolo $\widehat{BDH}$ misura $\frac{\pi}{3}$ e $\widehat{DBH}$ misura $\frac{\pi}{6}$, quindi poiché $BD = c$, deduciamo che $DH = \frac{c}{2}$, $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A questo punto

$$AH = AD + DH = b + \frac{c}{2}, \quad BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

usando il teorema di Pitagora si ha

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 = \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = b^2 + bc + c^2 := T.$$

L'ultima formula é un'espressione di AB (al quadrato) in termini di b e c, che sono noti dal momento che abbiamo il modo di calcolarli, osservando una cupola.

Rimane da calcolare ancora il numero di triangoli presenti su una faccia dell'icosaedro, noti i parametri b, c. Il numero dei triangoli presenti su una faccia dell'icosaedro á pari all'area della faccia diviso l'area di un triangolo piccolo. L'area della faccia é

$$\frac{AB}{2} \cdot \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}(AB)^2}{4} = \frac{\sqrt{3}T^2}{4}$$

mentre l'area di uno dei triangoli da cui é tassellata la faccia dell'icosaedro é (ricordiamoci che il latoé

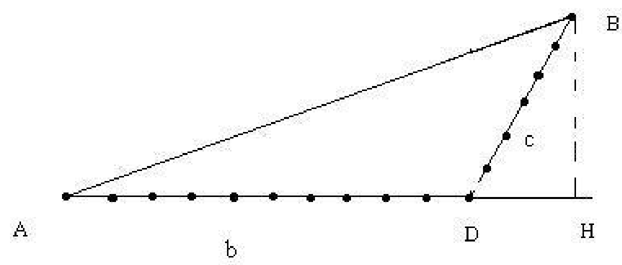

Figure 4: Calcolo di AB

unitario!!!)

$$\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Dividendo l'area della faccia per l'area del tiangolo otteniamo esattamente T. Un'icosaedro é composto esattamente da 20 facce, quindi $20T$ é il totale dei triangoli della sfera geodetica. Quindi noti b, c é possibile con un calcolo immediato conoscere il numero dei triangoli della cupola geodetica a cui si riferiscono i parametri.

Esercizio-esempio

Contare i triangoli della sfera geodetica in figura 5:

Individuiamo due vertici di grado 5. Calcoliamo b e c. Si ha $(b, c) = (3, 1)$. Pertanto

$$T = b^{+}bc + c^2 = 9 + 3 + 1 = 13$$

Il totale dei triangoli é $20T = 260$.

References

[1] M. Coxeter, Virus Macromolecules and Geodesic domes *A spectrum of Mathematics* Auckland University Press and Oxford University Press, 1972, 98–107.

[2] Luca Carlucci, Francesco D'Ippolito, Pierluigi Gallina R. Buckminster Fuller e le cupole reticolari geodetiche: metodi e modelli a confronto, tesina AA 2006\2007

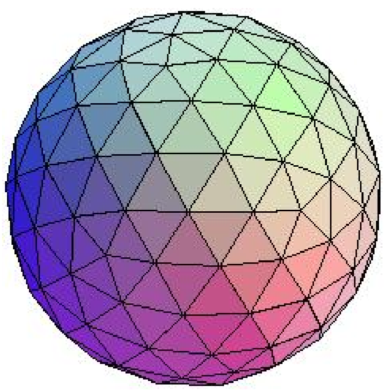

Figure 5: Sfera geodetica $(3, 1)$