Capitolo 1

Gli strumenti

Consideriamo un insieme X. In geometria siamo abituati a considerare insiemi i cui elementi sono punti ad esempio, la retta reale, il piano cartesiano. Più in generale i matematici hanno sviluppato la capacità di "pensare" a (e di lavorare con) insiemi dove gli elementi non manifestano chiaramente proprietà geometriche. Possiamo considerare, ad esempio, l'insieme di tutte le funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Anche per questi insiemi è comunque possibile costruire una "geometria".

Inoltre, qualunque sia l'insieme oggetto di studio, possiamo cercare di caratterizzare i suoi elementi rispetto a una relazione definitra tra di essi. Partendo da alcune di queste relazioni è possibile "costruire" nuove strutture.

1.1 Relazioni

Iniziamo con la definizione di "relazione"

Definizione 1.1.1 ***Relazione***

Siano E ed F due insiemi non vuoti. Si dice relazione tra elementi di E ed elementi di F ogni sottoinsieme R del prodotto cartesiano $E \times F$. Diciamo che x è in relazione con y se $(x, y) \in R \subset E \times F$.

Esempio 1.1.2 ***Relazione di ordinamento su*** $\mathbb{R}$

Sia $X = \mathbb{R}$. La relazione di ordinamento $\geq$ è una relazione su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Quindi diremo che $x \in \mathbb{R}$ è in relazione con $y \in \mathbb{R}$ se e solo se $x \geq y$.

Osservazione 1 La relazione di ordinamento soddisfa le seguenti proprietà:

Proprietà riflessiva : $x \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

Proprietà antisimmetrica : se $x \geq y$ allora $-y \geq -x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

Proprietà transitiva : se $x \geq y$ e $y \geq z$ allora $x \geq z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Relazione di equivalenza

Vogliamo ora introdurre alcune limitazioni alle relazioni che definiamo su un insieme. Come già osservato vogliamo fornire delgi strumenti che permettano di costruire nuove strutture matematiche. Quindi abbiamo bisogno di definire relazioni che consentano di isolare alcune caratteristiche degli elementi di un insieme dato.

Definizione 1.1.3 ***Relazione di equivalenza***
Consideriamo un insieme X e siano $x, y, z \in X$. Una relazione di equivalenza su X è una relazione tale che:

Proprietà riflessiva *: x è equivalente a x;*

Proprietà simmetrica *: se x è equivalente a y allora y è equivalente a x;*

Proprietà transitiva *: se x è equivalente a y e y è equivalente a z allora x è equivalente a z.*

Osservazione 2 Una relazione di equivalenza è un sottoinsieme R di $X \times X$ tale che

Proprietà riflessiva : $(x, x) \in R$, $\forall x \in X$;

Proprietà simmetrica : se $(x, y) \in R$ allora $(y, x) \in R$, $\forall x, y \in R$;

Proprietà transitiva : se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ allora $(x, z) \in R$, $\forall x, y, z \in R$.

Notazione 1.1.4 *Denoteremo la relazione di equivalenza con il simbolo $\sim$, cioè se x è equivalente a y scriveremo $x \sim y$.*

Osservazione 3 Osserviamo che se X è non vuoto, allora il sottoinsieme R è necessariamente non vuoto.

Esempio 1.1.5 **(a)** *Relazione di uguaglianza $x \sim y$ se e solo se $x = y$*

Esercizio 1.1.6 *Verificate che è una relazione di equivalenza.*

(b) *Interi modulo n Sia $X = \mathbb{N}$, definiamo $p \sim q$ se e solo se le divisioni, di p con n e di q con n, danno lo stesso resto. In altre parole $p \sim q$ se e solo se $p = hn + r$ e $q = kn + r$. Verifichiamo che è una relazione di equivalenza:*

Proprietà riflessiva *: la divisione di p con n da un unico valore, quindi $p \sim p$;*

Proprietà simmetrica *: supponiamo che $p \sim q$. Ciò vuol dire che la divisione di p con n da lo stesso resto della divisione di q con n. Ma tali risultati non dipendono dall'ordine con cui sono state fatte le divisioni, quindi $q \sim p$;*

Proprietà transitiva *: supponiamo ora che $p \sim q$, e $q \sim w$, cioè: $p = hn + r$, $q = kn + r$ (p e q sono equivalenti) e $w = ln + r$ (q e w sono equivalenti). Allora $p \sim w$.*

(c) *Controesempio relazione non riflessiva*

Sia E l'insieme degli elettori di una determinata elezione. Diciamo che $e, f \in E$ sono in relazione se e solo se e, f hanno votato per lo stesso partito. Vogliamo verificare se la relazione cosi definita è riflessiva. Il problema nasce da come abbiamo defrinito la relazione. Infatti, cosa possiamo dire di un elettore che ha annullato la sua scheda? Secondo la definizione tale elemento di E non è in relazione con se stesso.

(d) *Controesempio relazione non simmetrica*

Le relazioni di ordinamento offrono un esempio di relazioni non simmetriche.

(e) *Controesempio relazione non transitiva*

Sia E l'insieme degli esseri umani. Diciamo che $e, f \in E$ sono in relazione se e solo se sono fratelli. E' una relazione? Anche in questo caso i problemi sorgono dalla scarsa attenzione che abbiamo posto nel momento di definire la relazione. Cerchiamo di essere più precisi. Diciamo che e, f sono in relazione se e solo se hanno un genitore in comune. In tal caso non abbiamo una relazione di equivalenza dal momento che non soddisfa la prorietà transitiva. Se cambiamo la definizione dicendo *che* e, f *sono in relazione se e solo se hanno due genitori in comune, allora si ha una relazione di equivalenza.*

Il passo successivo è quello di raggruppare gli elementi che sono in relazione tra loro.

Definizione 1.1.7 ***Classi di equivalenza***
Consideriamo un insieme X *e una relazione di equivalenza* $\sim$ *su* X*. Sia* $x \in X$*. La classe di equivalenza di* x *è il sottoinsieme di* $[x] \subset X$ *tale che*

$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}.$$

Esempio 1.1.8 **(a)** *Relazione di uguaglianza* $[x] = \{x\}$

(b) *Interi modulo n Sia* $n = 12$*. Allora* $[1] = \{1, 13, 25, 37, \ldots\}$*,* $[2] = \{3, 14, 26, 38, \ldots\}$ *e, in generale, se* $0 \leq p \leq 11$ $[p] = \{p + 12, 2p + 12, 3p + 12, \ldots\}$*.*

(c) *Numeri pari e numeri dispari Gli insiemi dei numeri pari e dei numeri dispari possono essere pensati come le classi di equivalenza della relazione precedente coin* $n = 2$*. Se un numero è pari allora dividendolo per 2 darà resto nullo, se, invece è dispari, allora la divisione darà resto uguale a 1. Abbiamo cosi due classi di equivalenza la cui unione è l'insieme dei numeri interi.*

Osservazione 4 Il rappresentante di una classe di equivalenza non è unico. Nell'esempio delle classi modulo 12, abbiamo $[1] = [13]$

Dall'esempio dei numeri pari e dei numeri dispari ci accorgiamo facilmente che

- la classe di equivalenza dei numeri pari e la classe di equivalenza dei numeri dispari non hanno elementi in comune (un numero o è pari o è dispari)
- l'unione delle due classi coincide con l'insieme dei numeri naturali

Definizione 1.1.9 *Due insiemi* A*,* B *si dicono disgiunti se non hanno alcun elemento in comune, cioè se* $A \cap B = \emptyset$ *(il simbolo* $\emptyset$ *indica l'insieme vuoto).*

Vale in generale il seguente:

Teorema 1.1.10 *Una relazione di equivalenza su un insieme X determina una partizione di X (unione disgiunta di sottoinsiemi di X) i cui elementi sono le classi di equivalenza.*

Dimostrazione. La proprietà riflessiva dice che ogni elemento di X è equivalente ad almeno un elemento di X (se stesso). Quindi ogni elemento appariene a una classe di equivalenza, e di conseguenza X è contenuto nell'unione delle classi di equivalenza. E' altresi ovvio che X contiene ogni classe di equivalenza, quindi contiene la loro unione.

Dobbiamo ora dimostrare che le classi sono disgiunte. Supponiamo che $z \in [x]$ e $z \in [y]$ Poichè $x, z \in [x]$ si ha $x \sim z$. Allo stesso modo $y \sim z$. Per le proprietà simmetrica e transitiva, si ha $x \sim y$, da cui segue che $[x] = [y]$. In altre parole, se due classi di equivalenza, hanno un elemento in comune allora coincidono. □

Dopo avere definito una relazione di equivalenza su un insieme possiamo definire una nuova struttura "astratta": lo spazio quoziente.

Definizione 1.1.11 *Sia X un insieme e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X. L'insime delle classi di equivalenza è detto spazio quoziente ed è denotato con il simbolo $X/\sim$.*

Esempio 1.1.12 *Sia $X = \mathbb{N}$, $n = 2$. Consideriamo la relazione di equivalenza che definisce due numeri interi equivalenti se la loro divisione per 2 dà lo stesso resto. Lo spazio quoziente in questo caso è dato da*

$$\mathbb{N}/\sim = \{0, 1\}.$$

La classe $[0]$ è l'insieme dei numeri pari, mentre la classe $[1]$ è l'insiem dei numeri dispari.

1.2 Distanza

Definizione 1.2.1 *Sia X un insieme. Una funzione che associa a una coppia di elementi $a, b \in X$ un numero reale, si chiama "distanza" se soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $d(a, b) \geq 0 \qquad d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $d(a, b) = d(a, b)$

3. $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ *comunque sia scelto* $c \in X$.

Perché una misurazione possa essere chiamata "distanza" deve soddisfare le tre proprietà precedenti, e cioè:

1. è una funzione **positiva** ed è nulla se e solo se misura la distanza di un elemento da se stesso

2. è **simmetrica**

3. vale la **disuguaglianza triangolare**

Esempio 1.2.2 *Sia* $X = \mathbb{R}$ *e sia* $d(a,b) = |a-b|$. *Verifichiamo che è una distanza. L'unica aspetto che presenta qualche difficoltà è la dimostrazione della disuguaglianza triangolare, cioè che* $d(a,b) \leq d(a,c)+d(c,b)$, *o, in altre parole,* $|a-b| \leq |a-c|+|c-b|$. *Dalle proprietà del modulo sappiamo che* $|x+y| \leq |x|+|y|$. *Questa è il solo aiuto che possiamo utilizzare. Dall'esperienza di tanti problemi risolti nei corsi di Calcolo utilizziamo il seguente "trucco": aggiungiamo e sottraiamo lo stesso numero* c *a* $a-b$

$$|a-b| = |a-c+c-b| \leq |a-c| + |c-b|.$$

Esempio 1.2.3 *Nei seguenti esempi consideriamo* $X = \mathbb{R}^2$.

(a) *La distanza euclidea* $d_1(P,Q) = \sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}$ *dove* $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$.

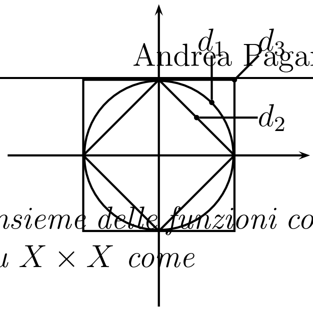
(b) $d_2(P,Q) = |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|$ *dove* $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$.

(c) $d_3(P,Q) = \max\{|x_P - x_Q|, |y_P - y_Q|\}$ *dove* $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$.

Esercizio 1.2.4 *Verificate dhe* d_1, d_2, d_3 *soddisfano le tre proprietà della distanza.*

Osservazione 5 Sempre in $\mathbb{R}^2$ la funzione $f(P,Q) = \min\{|x_P - x_Q|, |y_P - y_Q|\}$ non è una distanza. Perché?

Osservazione 6 I dischi unitari delle tre distanze sono



Esempio 1.2.5 *Sia X l'insieme delle funzioni continue sull'intervallo* $[0, 1]$*. Definiamo una funzione su $X \times X$ come*

$$d(f, g) = \max_{x \in [0,1]\{f(x)-g(x)\}} .$$

Esercizio 1.2.6 *Verificate che d è una distanza su X.*