Capitolo 2

La sfera

“Geometria” è un vocabolo greco che significa “misura della terra”. Per Pitagora, che inserisce la geometria nelle scienze del quadrivio, la geometria equivale alla geografia: quindi la nascita e lo sviluppo della geometria sono legati alla terra e alla sua descrizione, e in particolare alle misure su di essa .

Siamo davvero sicuri di saper effettuare misure sulla terra?

Siamo cioè sicuri di saper rappresentare con esattezza una sfera, o almeno con la stessa accuratezza che vorremmo, poi, nelle nostre misurazioni?

Quello di cui abbiamo bisogno è un “modello”, su cui pensare le nostre domande, ed eventualmente proporre alcune risposte, un modello su cui “immaginare” esperimenti.

2.1 Modelli di sfera

Forse l’unico modello di sfera esistente in natura è dato dalle bolle di sapone, dotate di tutte le simmetrie di cui immaginiamo dotato un oggetto sferico.

Ogni altro modello fornisce solo una approssimazione della sfera e presenta con chiarezza solo alcune delle caratteristiche di tale spazio.

2.1.1 Modelli di carta

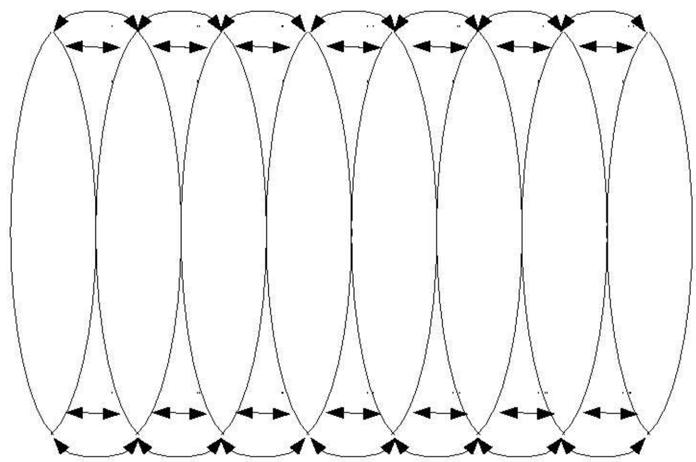
Per prima cosa proviamo a realizzare una sfera utilizzando un foglio di carta. Vedremo che questo è, a priori, impossibile, ma che renderà via via chiare le misurazioni che si possono effettuare.

Osserviamo, ove ve ne fosse bisogno, che la sfera è una superficie, cioè separa due regioni dello spazio tridimensionale. Questa considerazione ci impedisce, ad esempio, di costruire un modello di sfera "appallottolando" il foglio di carta. Ciò che si vuole sottolineare è che per noi la sfera è la superficie che divide lo spazio tridimensionale in due parti: una "esterna" e una "interna".

Chiediamo al lettore di prendere due fogli di carta, di costruire una sfera con il primo, e di scrivere sul secondo tutte le istruzioni necessarie ad un estraneo per ricostruire questo modello di sfera. Stiamo, cioè, chiedendo di *progettare* una sfera.

Ovviamente vi sono molte soluzioni e possibilità, ne proponiamo due.

Esempio 2.1.1 *(a) Sfera a spicchi*



Istruzioni: Ritagliare la figura e incollare i punti identificati dalle frecce e i bordi relativi. I bordi degli spicchi possono essere costruiti con un compasso. Osservate che aumentando il numero degli spicchi si ottiene un modello sempre più fedele di sfera.

Commenti: Alcuni meridiani sono facilmente identificabili. E' possibile identificare l'equatore?

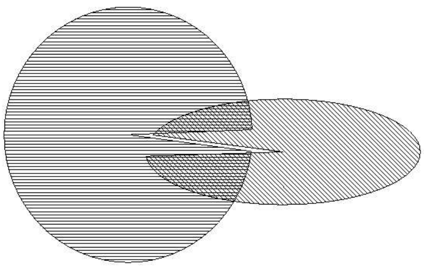
(b) Pallone da calcio

Istruzioni: Prendete un foglio di carta e ritagliate 20 esagoni regolari e 12 pentagoni regolari e incollateli in modo da costruire un pallone da calcio.

Commenti: E' chiaramente un poliedro. Le sue facce sono due possibili poligoni regolare, ed in ogni vertice si ripete la stessa combinazione (un pentagono e due esagoni). Un poliedro di questo tipo si chiama *semi-regolare*. E' possibile identificare, seguendo le linee di incollamento di esagoni e pentagoni, l'equatore? e un meridiano?

Esercizio 2.1.2 *Costruite una sfera con quadrati e triangoli.*

Esempio 2.1.3 ***Sfera in sezione***



Istruzioni: Usando del cartoncino costruite due dischi di uguale raggio e incastrateli tra loro, tagliando entrambi lungo un raggio.

Commenti: Costruite una seconda sfera in sezione utilizzando dischi di diverso raggio.

In entrambi i casi, l'equatore e almeno un meridiano sono facilmente identificabili. Nel secondo caso dovrebbero essere, inoltre, identificabili alcuni paralleli.

2.1.2 Altri modelli

Esempio 2.1.4 ***Modello per l'immaginario*** *Prendete un filo e immaginatene un estremo fisso in un punto. Immaginate che all'estremità libera del filo vi sia una fonte luminosa. Tutte le posizioni della luce sono su una sfera, e la sfera è l'insieme di tutte le possibili posizioni della luce.*

Commenti: Sempre attraverso un processo mentale, cercate di immaginare quali possano essere i percorsi della luce tra due punti sulla sfera.

Esempio 2.1.5 ***Bolla di sapone***

2.1.3 Modelli matematici

Esempio 2.1.6 ***Modello matematico 0*** *Dalle aule della scuola dell'obbligo tutti noi conserviamo il ricordo di frasi del tipo: "la sfera è il luogo dei punti nello spazio equidistanti da un punto fissato detto centro".*

Questo tipo di informazioni sono assolutamente corrette da un punto di vista formale, ma non contengono alcuna indicazione sul modo di "costruire" e di "misurare" gli oggetti, e in geometria questo rappresenta un serio problema.

Dobbiamo perciò introdurre strumenti. Per i matemetici un ottimo strumento è rappresentato da definizioni espresse attraverso formule. Quindi, per i matematici, un modello chiaro di sfera è dato da ...

Esempio 2.1.7 ***Modello matematico 1***

$$S(O,r) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = r^2\right\}.$$

sfera di centro l'origine di $\mathbb{R}^3$ *e raggio* r

Esercizio 2.1.8 **(a)** *Scrivere l'equazione cartesiana della sfera* $S(O,2)$ *di centro* $O = (0,0,0)$ *e di raggio 2.*

Soluzione: $x^2+y^2+z^2 = 4$

(b) *Scrivere l'equazione cartesiana della sfera* $S(O,2)$ *di centro* $O = (0,0,0)$ *e di raggio 4.*

(c) *Scrivere l'equazione cartesiana della sfera $S(P, 2)$ di centro $P = (1, 0, 1)$ e di raggio 2.*

Esercizio 2.1.9 (a) *Quale trasformazione dello spazio trasforma la sfera $S(O, 2)$ nella sfera $S(O, 4)$*

Soluzione: Il centro rimane fisso, mentre il raggio cambia, quindi la trasformazione è una dilatazione di ragione 2. Scrivete la matrice associata (vedi Appendice “Le trasformazioni nello spazio”).

(b) *Quale movimento dello spazio trasforma la sfera $S(O, 2)$ nella sfera $S(P, 2)$*

(c) *Considerate la sfera di raggio 1 e di centro il punto $P = (5, 3, -1)$. Cosa succede se ruotiamo la sfera attorno all'asse z di un angolo pari a $\frac{\pi}{4}$?*
Soluzione: Occorre applicare ai punti dello spazio la trasformazione data dalla matrice:

$$T^z_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

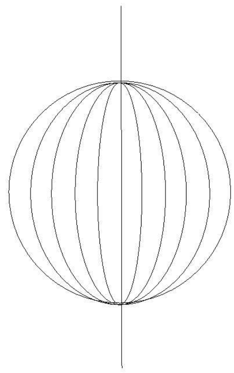
e verificare se l'immagine della sfera è ancora una sfera (vedi Appendice “Le trasformazioni nello spazio”.

(d) *E se la stessa sfera viene ruotata, sempre attorno all'asse z di un angolo generico θ?*

Un diverso modo di costruire un modello per i matematici è quello di stabilire una relazione (dapprima solo a parole, poi formalizzata attraverso formule) tra altri oggetti matematici.

Ad esempio la sfera è ...

Esempio 2.1.10 ***Modello matematico 2*** *... il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare una circonferenza attorno ad un asse fissato.*



Oppure facendo ruotare una semicirconferenza attorno ad un asse fissato.

Esercizio 2.1.11 **(a)** *Verificate che la sfera $S(O, r)$ può essere descritta come la rotazione della circonferenza di raggio r nel piano xz attorno all'asse z. Verificate, inoltre, che è sufficiente una rotazione di π.*

Soluzione: Le informazioni contenute nella scrittura $S(O, r)$ sono relative alla posizione del centro e alla lunghezza del raggio della sfera. Quindi volendo descrivere al sfera come una superficie di rotazione, occore verificare che l'asse di rotazione passi per il centro della sfera, e che la circonferenza che facciamo ruotare abbia raggio r.

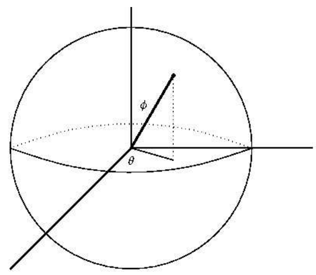
La limitazione della rotazione a π è collegata al fatto che stiamo facendo ruotare una circonferenza, quindi dopo una rotazione di π ci si ritrova sugli stessi punti.

(b) *Verificate che la sfera $S(O, r)$ può essere descritta come la rotazione della circonferenza di raggio r nel piano yz attorno all'asse z.*

(c) *Verificate che la sfera $S(O, r)$ può essere descritta come la rotazione della semicirconferenza di raggio r nel piano xz attorno all'asse z. Verificate inoltre che è necessaria una rotazione di 2π.*

2.2 Coordinate Intrinseche

E' chiaro dai modelli 2.1.10 che la sfera (cioè ogni punto sulla sfera) è completamente determinato da due coordinate definite come gli angoli θ rotazione attorno all'asse e ϕ angolo sulla semicirconferenza (vedi (c) dell'ultimo esercizio). Occorre scegliere come calcolare questi due angoli. Possiamo assumere che l'angolo ϕ sulla semicirconferenza sia calcolato come l'angolo che si forma tra l'asse attorno cui ruota la semicirconferenza (ad esempio l'asse delle z) e il raggio che identifica il punto sulla sfera. L'angolo θ può essere descritto come l'angolo che si forma tra la proiezione del punto sul piano perpendicolare all'asse di rotazione (ad esempio piano xy) e uno dei due assi di riferimento di questo piano (ad esempio l'asse x).



Da questo punto in poi definiamo i punti su S attraverso le *coordinate intrinseche* (ϕ, θ).

Tali coordinate definiscono uno spazio bidimensionale. Quindi gli enti geometrici sulla sfera possono essere rappresentati da relazioni matematiche tra queste due coordinate.

Ciascuno di noi ha ben chiaro il significato di termini quali meridiano o parallelo terrestre (ed in alcuni esercizi precedenti tali concetti sono stati già utilizzati).

Leghiamo ora questi concetti alla loro descrizione in termini di coordinate θ, ϕ.

Esercizio 2.2.1 **(a)** *Verificate che $\theta = \theta_o$ sono i "meridiani" della sfera.*

Soluzione: Fissare $\theta = \theta_o$ equivale a fissare l'angolo di rotazione attorno all'asse. Quindi tutti i punti di coordinate intrinsche $\theta = \theta_o$ sono sulla sfera e sul piano passante per il centro della sfera e per i punti di coordinate (ad esempio) $(0, \theta)$ e $(\frac{\pi}{2}, \theta)$.

(b) *Verificate che $\phi = \phi_o$ sono i "paralleli" della sfera.*

(c) *Quale valore di $\phi = \phi_o$ identifica l'equatore?*

Abbiamo precedentemente affermato che, almeno per la comunità dei matematici, un modello di sfera estremamente chiaro è quello dato dalla equazione (in coordinate cartesiane x, y, z):

$$S(O,r) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\right\}. \tag{2.1}$$

Vogliamo ora definire la relazione tra le coordinate cartesiane e le coordinate intrinseche.

Esercizio 2.2.2 *Verificate che, se gli angoli ϕ e θ sono definiti come nella figura, allora i punti della sfera (2.1) sono descritti da:*

$$\begin{aligned} x &= r \sin\phi \cos\theta \\ y &= r \sin\phi \sin\theta \\ z &= r \cos\phi \end{aligned}$$

Il dominio di variabilità delle coordinate intrinseche è $0 \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

2.3 Curve sulla sfera

Per descrivere una curva nello spazio $\mathbb{R}^3$ possiamo utilizzare sia le coordinate cartesiane, ed in questo caso la curva sarà data dalle soluzioni di un sistema di due equazioni (curva come intersezione di due superfici), oppure possiamo utilizzare una espressione parametrica (curva come funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^3$ cfr. Appendice).

Per descrivere una curva sulla sfera, quindi abbiamo due scelte

A In coordinate cartesiane si ha

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ &f(x,y,z) = 0. \end{aligned}$$

Nel caso di una circonferenza (ad esempio meridiani e paralleli)

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ &Ax + By + Cz + D = 0. \end{aligned}$$

Esercizio 2.3.1 *(a) Verificate che il piano che definisce un parallelo è della forma* $z + D = 0$.

Soluzione: i paralleli circonferenze parallele al piano perpendicolare all'asse di rotazione della sfera (che abbiamo scelto essere l'asse z).

(b) Dimostrate che un piano Π *definisce un parallelo se e solo se* $\Pi: z + D = 0$ *con* $|D| < r$.

(c) Determinare l'equazione del piano che definisce l'equatore sulla sfera $S(O, 3)$.

(d) Determinare l'equazione del piano che definisce l'equatore sulla sfera $S(P, 3)$ *dove* $P = (2, 0, 0)$.

(e) Determinare l'equazione del piano che definisce l'equatore sulla sfera $S(P, 3)$ *dove* $P = (3, 3, 3)$.

(f) Verificate che il piano che definisce un meridiano è della forma $Ax + By = 0$.

Soluzione: i meridiani giacciono su piani passanti per l'asse di rotazione (e in particolare passano per l'origine). Quindi $C = D = 0$

B In coordinate parametriche abbiamo gli angoli ϕ e θ funzioni di un parametro t, in altre parole $\phi = \phi(t), \theta = \theta(t)$. Quindi l'equazione parametrica di una curva sulla sfera è data da

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\phi(t))\cos(\theta(t)) \\ y &= r\sin(\phi(t))\sin(\theta(t)) \\ z &= r\cos(\phi(t)) \end{aligned}$$

Nel caso dei meridiani e dei paralleli abbiamo giè osservato che

- $\phi(t) =$ costante e $\theta(t) = t,\ t \in [0, 2\pi]$ per i paralleli
- $\theta(t) =$ costante e $\phi(t) = t,\ t \in [0, \pi]$ per i meridiani

Vogliamo ora descrivere i coefficienti dei piani che definiscono meridiani e paralleli in termini degli ancoli (ϕ, θ).

Esercizio 2.3.2 *(a) Verificate che il piano che definisce un parallelo ha equazione $z - r\cos\phi_o = 0$.*

Soluzione: Sappiamo che i paralleli sono definiti da piani paralleli all'asse xy, cioè da una equazione del tipo $z + D = 0$. D'altra parte, in coordinate parametriche abbiamo $z = r\cos\phi_o$.

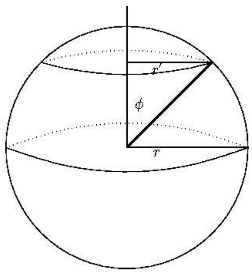
(b) Verificate che il piano che definisce un meridiano ha equazione $-sin\theta_o x + \cos\theta_o y = 0$

Soluzione: vedi soluzione esercizio precedente.

Sia, ora, S una sfera di raggio r. Il raggio r_1 di una circonferenza C parallela all'equatore è dato dalla formula

$$r_1 = r\sin\phi$$

dove ϕ è l'angolo che si forma tra il raggio (pensato come vettore) della circonferenza che definisce l'equatore e il raggio (sempre come vettore) del parallelo che definisce la circonferenza C.



Esercizio 2.3.3 *Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per il centro della sfera e per i punti di coordinate intrinseche $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $(\frac{\pi}{4}, 0)$.*

Esercizio 2.3.4 **(a)** *Verificate che almeno un piano passante per $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ definisce l'equatore. Quale?*

(b) *Verificate che almeno un piano passante per $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ definisce una circonferenza parallela all'equatore. Quale?*

(c) *Verificate che un piano passante per $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ e $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ definisce una circonferenza che interseca l'equatore in due punti. Trovate i due punti di intersezione.*

2.4 Grandi cerchi e loro misure

Supponiamo ora la retta passante per P, Q contenga anche il centro O della sfera. E' facile convincersi del fatto che esistono infiniti piani passanti per questi tre punti. I punti P, Q di una sfera che giacciono su una retta passante per il centro della sfera sono detti *antipodali*.

La ragione principale del nostro interesse verso le circonferenze sulla sfera è data dal fatto che alcune di esse (i "grandi cerchi") svolgono un ruolo analogo a quello delle rette in $\mathbb{R}^2$. Infatti, dati due punti non antipodali sulla sfera, se consideriamo il piano passante per il centro della sfera e per i due punti dati, esso definisce due archi sul grande cerchio di intersezione tra il piano e la sfera. Vedremo in seguito che l'arco di lunghezza minore rappresenta sulla sfera ciò che i segmenti rappresentano sul piano, cioè il percorso di lunghezza minore che unisce due punti. Occorre osservare che i due archi defininiti dall'intersezione piano-sfera sono di uguale lunghezza se e solo se i punti sono antipodali.

In questo paragrafo forniremo alcune tecniche per misurare lunghezze e angoli sulla sfera.

Iniziamo con

Definizione 2.4.1 *L'intersezione tra una sfera e un piano passante per il centro definisce definisce un grande cerchio sulla sfera stessa.*

2.4.1 Lunghezze di meridiani e parallleli

Abbiamo visto precedentemente che i meridiani e l'equatore (che sono cerchi di raggio massimo) possono essere facilmente descritti in termini di coordianate intrinseche. Da ciò segue che abbiamo a disposizione delle equazioni parametriche per descrivere queste curve in $\mathbb{R}^3$.

In questo modo possiamo (cfr. Appendice "La lunghezza d'arco") calcolare la loro lunghezza.

Esercizio 2.4.2 *Considerate la sfera di centro l'origine e di raggio r.*

(a) *Calcolate la lunghezza del meridiano definito da $\theta = \frac{\pi}{4}$.*

Soluzione: l'equazione parametrica del meridiano è data da:

$$x = x(\phi) = r \sin\phi \cos(\frac{\pi}{4}) = r\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\phi$$

$$
\begin{aligned}
y &= y(\phi) = r\sin\phi\sin(\frac{\pi}{4}) = r\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\phi \\
z &= z(\phi) = r\cos\phi.
\end{aligned}
$$

Dobbiamo calcolare le derivate (rispetto a ϕ) di $x(\phi), y(\phi), z(\phi)$. In particolare

$$
\begin{aligned}
x'(\phi) &= r\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\phi \\
y'(\phi) &= r\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\phi \\
z'(\phi) &= -r\sin\phi.
\end{aligned}
$$

La lunghezza L di metà meridiano (calcoliamo solo metà del meridiano per come abbiamo scelto le coordinate intrinseche) è, quindi, data da:

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^\pi \sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2 + (z'(\phi))^2}\, d\phi \\
&= \int_0^\pi \sqrt{\frac{r^2}{2}\cos^2\phi + \frac{r^2}{2}\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi}\, d\phi \\
&= \int_0^\pi \sqrt{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi}\, d\phi \\
&= \int_0^\pi \sqrt{r^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}\, d\phi \\
&= \int_0^\pi \sqrt{r^2}\, d\phi \\
&= r\int_0^\pi d\phi \\
&= r\ \phi\Big]_0^\pi = r\pi
\end{aligned}
$$

(b) Calcolate la lunghezza del meridiano definito da $\theta = \theta_o$.

(c) Calcolate la lunghezza dell'equatore.

(d) Calcolate la lunghezza del parallelo definito da $\phi = \frac{\pi}{4}$.

(e) Calcolate la lunghezza del parallelo definito da $\phi = \phi_o$.

2.4.2 Misure di angoli tra grandi cerchi

Continuando il nostro percorso, avendo in mente che i grandi cerchi rappresentano sulla sfera ciò che le rette rappresentano nel caso euclideo, consideriamo angoli sulla superficie sferica, che si formano nel punto di intersezione di due grandi cerchi. Per derfinire il valore di tale angolo abbiamo due possibili modi:

(A) il valore di tale angolo è pari al valore dell'angolo piano che si forma tra i vettori tangenti alle due curve nel punto di intersezione;

(B) il valore di tale angolo è pari al valore dell'angolo piano che si forma tra i vettori normali ai piani che definiscono i due grandi cerchi;

.

Per i meridiani e i paralleli è semplice calcolare i vettori tangenti in un punto. Infatti le espressioni parametriche sono molto semplici per queste curve.

Esercizio 2.4.3 **(a)** *Calcolate il vettore tangente al meridiano $\theta = \pi$.*

Soluzione: Il meridiano $\theta = \pi$ ha equazione parametrica

$$\begin{aligned} x &= -r\sin\phi \\ y &= 0 \\ z &= r\cos\phi. \end{aligned}$$

Quindi il vettore tangente ha equazione parametrica

$$\begin{aligned} x' &= -r\cos\phi = -z \\ y' &= 0 \\ z' &= -r\sin\phi = x. \end{aligned}$$

(b) *Calcolate il vettore tangente all'equatore.*

(c) *Calcolate il vettore tangente al parallelo $\phi = \frac{\pi}{4}$.*

(d) *Calcolate il vettore tangente al meridiano $\theta = \theta_o$.*

(e) *Calcolate il vettore tangente al parallelo $\phi = \phi_o$.*

Vogliamo ora calcolare l'angolo che si forma tra due circonfeerenze sulla sfera. Iniziamo con il caso di un parallelo e un meridiano.

Esercizio 2.4.4 **(a)** *Calcolate l'angolo tra il meridiano $\theta = \pi$ e l'equatore.*

Soluzione: Dobbiamo calcolare il vettore tangente per il meridiano e per l'equatore nel punto di intersezione tra queste due curve sulla sfera. L'equatore è definito da $\phi = \frac{\pi}{2}$. Quindi il punto di intersezione è dato, in coordinate intrinseche, da $(\phi = \frac{\pi}{2}, \theta = \pi)$. Il vettore tangente al meridiano, nel punto $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ è dato da

$$\begin{aligned} x' &= -r \\ y' &= 0 \\ z' &= 0. \end{aligned}$$

Dobbiamo calcolare il vettore tangente all'equatore

$$\begin{aligned} x' &= (r\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\theta))' = -r\sin(\theta) \\ y' &= (r\sin(\frac{\pi}{2})\sin(\theta))' = r\cos(\theta) \\ z' &= 0. \end{aligned}$$

Quindi nel punto di intersezione $(\phi = \frac{\pi}{2}, \theta = \pi)$ si ha:

$$\begin{aligned} x' &= = 0 \\ y' &= = -r \\ z' &= 0. \end{aligned}$$

Per calcolare l'angolo usiamo il prodotto scalare. In particolare si ha $(-r, 0, 0) \cdot (0, -r, 0) = 0$, quindi sono perpendicolari.

(b) *Verificate che l'angolo tra il meridiano $\theta = \theta_o$ e l'equatore è zero.*

(c) *Verificate che l'angolo tra il meridiano $\theta = \theta_o$ e il parallelo $\phi = \frac{\pi}{4}$ è zero.*

(d) *Verificate che l'angolo tra il meridiano $\theta = \theta_o$ e il meridiano $\theta = \theta_1$ è $|\theta_o - \theta_1|$.*

Osservazione: i meridiani si incontrano in due punti (polo nord e polo sud). Scegliete uno dei due punti di intersezione.

Abbiamo a disposizione un secondo modo per calcolare il vettore tangente a una circonferenza sulla sfera. Infatti ad ogni punto della circonferenza sono associati due piani: il primo è il piano tangente alla superficie sferica in quel punto mentre il secondo altro non è che il piano che definisce la circonferenza. In questo modo il vettore tangente alla circonferenza è dato dalla direzione della retta definita dall'intersezione dei due piani.

Esercizio 2.4.5 (a) *Trovate la direzione della retta tangente ad un meridiano.*

Soluzione: I meridiani sono definiti da piani di equazione $Ax+By=0$. Il piano tangente alla superficie sferica può essere calcolato utilizzando il gradiente della funzione $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r^2 = 0$, quindi $\nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, 2z)$. La retta che stiamo cercando è quindi data dal sistema:

$$\begin{aligned} Ax + By &= 0 \\ x_o x + y_o y + z_o z &= r^2 \end{aligned}$$

Dobbiamo ora risolvere il sistema, o in altre parole, scrivere l'equazione parametrica della retta (Vedi Appendice). Scegliamo $x = t$ come parametro. Il sistema diventa:

$$\begin{aligned} By &= -At \\ y_o y + z_o z &= r^2 - x_o t \quad \text{se } B \neq 0 \\ y &= -\frac{A}{B}t \\ z_o z &= r^2 - (x_o - y_o \frac{A}{B})t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{A}{B}t \\ z &= \frac{r^2}{z_o} - \frac{1}{z_o}(x_o - y_o\frac{A}{B})t. \end{aligned}$$

Ne segue che la direzione della retta tangente è $(1, -\frac{A}{B}, -\frac{1}{z_o}(x_o - y_o\frac{A}{B}))$, o $(Bz_o, -Az_o, Ay_o - Bx_o)$.

(b) *Verificate che la retta tangente ad un grande cerchio definito dal piano di equazione* $Ax+By+Cz=0$ *ha direzione* $(Bz_o-Cy_o, Cx_o-Az_o, Ay_o-Bx_o)$.

(c) *Verificate che la retta tangente ad una circonferenza definita dal piano di equazione* $Ax+By+Cz+D=0$ *ha direzione* $(Bz_o-Cy_o, Cx_o-Az_o, Ay_o-Bx_o)$.

Esercizio 2.4.6 *Ripetere gli esercizi precendenti calcolando l'angolo utilizzando i vettori normali ai piani che definiscono le circonferenze sulla sfera.*

Ancora una volta, attraverso un modello di sfera, abbiamo la possibilità di investigare le proprietà della geometria che stiamo costruendo sulla sfera e di metterle a confronto con quelle analoghe della geometria euclidea.

Nella geometria euclidea è un ben noto risultato il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a π. Inoltre, sempre negli spazi euclidei un quadrilatero i cui lati sono perpendicolari ha lati opoosti della stessa lunghezza. E sulla sfera? Vedremo attraverso il prossimo esercizio qualche risultato che ci mostra come la geometria che stiamo costruendo sulla sfera non sia euclidea, lasciando la dimostrazione rigorosa della disuglianza per la somma degli angoli interni di un triangolo al paragrafo "Triangoli sulla sfera".

Esercizio 2.4.7 **(a)** *Dimostrate che la somma degli angoli interni del triangolo sferico formato dall'equatore e da due meridiani è maggiore di* π.

Soluzione: Abbiamo verificato, in un precedente esercizio, che gli angoli tra l'equatore e i meridiani sono pari a $\frac{\pi}{2}$. D'altra parte l'angolo tra due meridiani è certamente maggiore di 0.

(b) *Considerate il quadrilatero sferico formato dall'equatore, dai meridiano* $\theta=0$ *e* $\theta=\frac{\pi}{2}$ *e dal parallelo* $\phi=\frac{\pi}{4}$. *Misurate i lati e gli angoli della figura.*

Vogliamo ora esplorare un'altra caratteristica dei grandi cerchi che presenta delle analogie con le rette negli spazi euclidei. Le rette hanno la proprietà (tra le tante) di avere vettore tangente costante (in realtà il vettore tangente a una retta coincide con il vettore direzione della retta stessa). Non possiamo certo chiedere la stessa proprietà ai grandi cerchi sulla sfera, ma per questi vale una condizione che può essere vista come generalizzazione della proprietà delle rette, nello spazio euclideo, appena descritta.

In particolare vale la seguente

Proposizione 2.4.8 *Sia C una circonferenza sulla sfera Σ. Sia $\overline{T}_P$ il vettore tangente alla curva C in P e siato vettoriale $\overline{N}_P$ il vettore normale alla sfera nel punto $P \in \Sigma$. Allora il prodotto $\overline{T}_P \times \overline{N}_P$ non varia al variare di P se e solo se C è un grande cerchio.*

Dimostrazione. Per prima cosa daremo una dimostrazione nel caso dei meridiani e del equatore e faremo vedere che la stessa non vale per i paralleli.

Sappiamo che per il meridiano $\theta = \theta_o$ il vettore tangente è dato da

$$\overline{T} = (r\cos\phi\cos\theta_o, r\cos\phi\sin\theta_o, -r\sin\phi).$$

Il vettore normale alla sfera può essere calcolato con il gradiente dell'equazione cartesiana che definisce la sfera stessa, cioè $\overline{N} = \nabla F_x, F_y, F_z$ dove $F(x,y,x) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$. Si ha, quindi, $\overline{N} = (2x, 2y, 2z)$.

Applicato nei punti del meridiano si ha:

$$\overline{N}_P = (2x, 2y, 2z) = 2r(\sin\phi\cos\theta_o, \sin\phi\sin\theta_o, \cos\phi).$$

Le componenti del prodotto vettoriale $\overline{T}_P \times \overline{N}_P$ sono

$$\begin{aligned}
&2r^2\cos^2\sin\theta_o + \sin^2\phi\sin\theta_o = 2r^2\sin\theta_o \\
&-2r^2\cos^2\cos\theta_o - \sin^2\phi\cos\theta_o = -2r^2\cos\theta_o \\
&2r^2\sin\phi\sin\theta_o\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta_o\cos\phi\cos\theta = 0
\end{aligned}$$

Si ha quindi che il vettore $\overline{T}_P \times \overline{N}_P$ è costante lungo i meridiani.

Consideriamo ora il parallelo di equazione $\phi = \phi_o$. Il vettore tangente al parallelo è dato da

$$\overline{T}_P = (-r\sin\phi_o\sin\theta, r\sin\phi_o\cos\theta_o, 0) = (-y, x, 0).$$

Il vettore normale applicato ai punti del parallelo è

$$\overline{N}_P = 2(\sin\phi_o\cos\theta, \sin\phi_o\sin\theta, \cos\phi_o).$$

In questo caso le componenti di $\overline{T}_P \times \overline{N}_P$ sono

$$\begin{aligned}
&-2r^2 \sin\phi_o \cos\theta \cos\phi_o \\
&-2r^2 \sin\phi_o \sin\theta \cos\phi_o \\
&-2r^2(\sin^2\phi_o \sin^2\theta - \sin^2\phi_o \cos^2\theta) = -2r^2(\sin^2\phi_o).
\end{aligned}$$

Quindi il vettore $\overline{T}_P \times \overline{N}_P$ non è costante, ma dipende dal punto sul parallelo in cui viene applicato.

Il caso dell'equatore è lasciato come esercizio al lettore.

Per la dimostrazione, valida per ogni circonferenza sulla sfera, ricordiamo che il vettore tangente ad una circonferenza definita dal piano di equazione $Ax + By + Cz + D = 0$ ha coordinate $(Bz_o - Cy_o, Cx_o - Az_o, Ay_o - Bx_o)$. Il prodotto vettoriale $\overline{T}_P \times \overline{N}_P$ ha coordinate

$$\begin{aligned}
&x_oD - A \\
&y_oD - B \\
&z_oD - C
\end{aligned}$$

(la verifica è lasciata al lettore).

Quindi abbiamo che $\overline{T}_P \times \overline{N}_P$ è costante se e solo se $D = 0$, cioè se e solo se il piano che definisce la circonferenza passa per il centro della sfera se e solo se la circonferenza è un grande cerchio. □

Esercizio 2.4.9 *Ripetete i calcoli della dimostrazione della Proposizione per*

(a) *il meridiano* $\theta = \frac{\pi}{2}$*;*

(b) *il parallelo* $\phi = \frac{\pi}{4}$*;*

(c) *l'equatore.*

Esercizio 2.4.10 *Descrivete quali oggetti geometrici sono descritti dal vettore* $\overline{T}_P \times \overline{N}_P$ *nel caso di*

(a) *un meridiano ;*

(b) *un parallelo;*

(c) *l'equatore.*

Esercizio 2.4.11 *Considerate la curva $\theta = \phi$.*

(a) *Disegnate la curva sulla sfera;*

(b) *Calcolate i vettori tangenti alla curva;*

(c) *Calcolate gli angoli tra i vettori tangenti alla curva e i meridiani;*

(d) *Calcolate gli angoli tra i vettori tangenti alla curva e i paralleli.*

2.4.3 Ancora sulle lunghezze di grandi cerchi

Come possiamo calcolare la lunghezza di un generico grande cerchio?

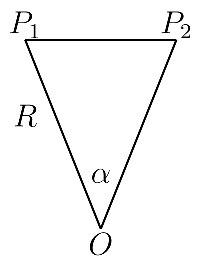
Differentemente da quanto succede per meridiani e paralleli la rappresentazione parametrica della circonferenza che si ottine intersecando la sfera con un generico piano per l'origine non è immediata. Quindi scegliamo un diverso approccio per misurare la lunghezza di un arco di grande cerchio.

Proponiamo un metodo geometrico che utilizza la rappresentazione della sfera come superficie immersa in $\mathbb{R}^3$).

Siano $P_1 = (\phi_1, \theta_1)$ e $P_2 = (\phi_2, \theta_2)$. Come punti di $\mathbb{R}^3$ le coordinate di tali punti sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin\phi_1 \cos\theta_1 \qquad & x_2 &= r \sin\phi_2 \cos\theta_2 \\ y_1 &= r \sin\phi_1 \sin\theta_1 \qquad & y_2 &= r \sin\phi_2 \sin\theta_2 \\ z_1 &= r \cos\phi_1 \qquad & z_2 &= r \cos\phi_2 \end{aligned}$$

Consideriamo il triangolo di vertici P_1, P_2, O dove O è il centro della sfera e coincide con l'origine del sistema di coordinate (ricordiamo che due vettori, nel nostro caso i lati OP_1 e OP_2 del triangolo, definiscono un piano in $\mathbb{R}^3$.


P_1
P_2
R
α
O

L'angolo α è l'angolo che definisce l'arco di grande cerchio la cui lunghezza è la distanza tra P_1 e P_2 sulla sfera ed è dunque $L = \alpha R$. Per calcolare α, dalla definizione di seno sappiamo che

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\text{dist}_{R^3}(P_1, P_2)}{r}$$

ovvero

$$\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{\text{dist}_{R^3}(P_1, P_2)}{r}\right)$$

A questo punto per calcolare la lunghezza dell'arco di raggio massimo è sufficiente moltiplicare α per il raggio della sfera.

Possiamo anche calcolare l'angolo α utilizzando il prodotto scalare dei vettori OP_1 e OP_2. In tal caso abbiamo che

$$OP_1 \cdot OP_2 = |OP_1||OP_2| \cos\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = \arccos(OP_1 \cdot OP_2).$$

Esercizio 2.4.12 **(a)** *Calcolate la distanza sulla sfera di raggio 1 tra i punti $P_1(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi)$ e $P_2 = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$*

Soluzione: in coordinate cartesiane si ha:

$$\begin{array}{ll} x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} & x_2 = \dfrac{1}{2} \\ y_1 = \frac{1}{2} & y_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1 = 0 & z_2 = 0 \end{array}$$

Quindi l'agolo tra OP_1 e OP_2 è pari a: $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$. Quindi la distanza tra P_1 e P_2 è $\frac{\pi}{2}$.

(b) *Calcolate la distanza sulla sfera di raggio 2 tra i punti $P_1(\frac{\pi}{3}, 0)$ e $P_2 = (\frac{\pi}{100}, 0)$*

Osservazione 1 Per gli esercizi che seguono ricordiamo che le coordinate che descrivono i punti su una superficie sferica identificano il polo nord attraverso la coppia $(0, 0)$. Quindi, ad esempio 30 gradi nord, equivale a $\phi = 60° = \frac{\pi}{3}$

Esercizio 2.4.13 **(a)** *Calcolate, sulla terra, la distanza tra i punti P_1 e P_2 localizzati sul parallelo posto a 45 gradi nord e, rispettivamente a sul meridiano di Greenwich (0 gradi est) e a 45 gradi est. Verificate che* *(i)* $\text{dist}_{R^3}(P_1, P_2) = 3448$ *chilometri*

(ii) $\alpha = 0.5480$

(iii) $\text{dist}_S(P_1, P_2) = 3491$ *chilometri*

(b) *Calcolate la lunghezza dell'arco che unisce P_1 e P_2 lungo il parallelo 45 gradi nord. Osserviamo che*

- *il raggio del parallelo è uguale a* $r = R\cos\frac{\pi}{4} = 4505$
- *l'angolo che definisce i punti P_1 e P_2 sul paparallelo è uguale a* $\frac{\pi}{4}$
- *la lunghezza d'arco sul parallelo è uguale a* $L = r * \frac{\pi}{4} = 3538$

Esercizio 2.4.14 **(a)** *Calcolate, sulla terra, la distanza tra i punti P_1 e P_2 localizzati sul parallelo posto a 60 gradi nord e, rispettivamente a sul meridiano di Greenwich (0 gradi est) e a 30 gradi est.* Soluzione: 1653 chilometri

(b) *Calcolate, sulla terra, la distanza tra i punti P_1 e P_2 localizzati sul parallelo posto a 30 gradi nord e, rispettivamente a sul meridiano di Greenwich (0 gradi est) e a 45 gradi est.* Soluzione: 4304 chilometri

(c) *Calcolate, sulla terra, la distanza tra i punti P_1 e P_2 localizzati, rispettivamente P_1 a 30 gradi nord e 0 gradi est, P_2 a 45 gradi nord e 30 gradi est.* Soluzione: 3100 chilometri

Esercizio 2.4.15 *Calcolate le seguenti distanza tra i punti P_1 e P_2 su una sfera Σ di raggio r:*

(a) $r = 3$, $P_1 = (0, \frac{\pi}{2})$ *e* $P_2 = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$*;*

(b) $r = 5$, $P_1 = (0, \frac{\pi}{2})$ *e* $P_2 = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$*;*

(c) $r = 3$, $P_1 = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *e* $P_2 = (\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$*;*

(d) $r = 4$, $P_1 = (\frac{5}{6}\pi, 0)$ *e* $P_2 = (\frac{\pi}{6}, 0)$*;*

http://www.palmod.uni-bremen.de/ anma/kugel-abstand.html

2.5 Una distanza sulla sfera

Per costruire una geometria abbiamo bisogno di un oggetto (per noi è la sfera) e della nozione di distanza (cfr. Strumenti). Relativamente alla distanza abbiamo cominciato a spargere alcuni indizi che ci porteranno verso gli archi di grande cerchio quali curve di lunghezza minima tra due punti.

Nella geometria euclidea, e poi nella geometria analitica dello spazio euclideo, si studiano le proprietà spaziali, a partire dalla nozione di lunghezza di un segmento.

Dunque, quello che rende la descrizione dello spazio "euclidea" è l'accettazione che la distanza tra due punti

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

sia la lunghezza del segmento $\overline{PQ}$ che li unisce.

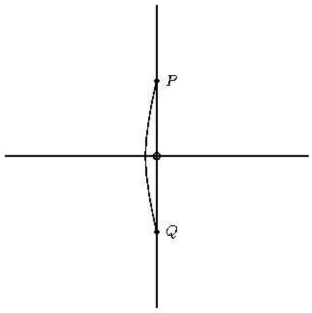
Cioè pensiamo che il segmento di retta è la via *più breve* tra due punti e questo struttura il nostro modo di pensare.

Ma se ci poniamo il problema della geometria sulla sfera, qual è la via più breve tra due punti? In altre parole quali sono le *geodesiche* sulla sfera?

Questo problema, su superfici di tipo generale, è di difficile soluzione, perchè equivale a cercare, tra tutte le possibile curve che giacciono sulla superficie, quella di lunghezza minima.

Prima ancora di definire lo strumento per misurare la lunghezza di una curva ci chiediamo se il minimo delle lunghezze di tutte le curve che uniscono due punti dati esiste? Nel caso di superfici immerse in uno spazio euclideo sappiamo, per certo, che esiste un limite inferiore dei valori di lunghezza di tali curve e che questo valore è dato dalla lunghezza del segmento di retta che li unisce (ovviamente questo valore non può essere un minimo dal momento che, in generale, il segmento di retta non giace sulla superficie).

Esempio 2.5.1 Considerate l'insieme S formato dai punti del piano cartesiano eccetto l'origine $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Siano $P = (0,2)$ e $Q = (0,-2)$. Tra le curve in S tra P e Q non c'è il segmento PQ dal momento che tale segmento deve necessariamente passare per l'origine. Quindi il valore numerico pari alla distanza euclidea $d(P,Q) = 4$ non è un minimo sull'insieme dei valori dati dalla lunghezza delle curve tra P e Q. D'altra parte, comunque scelto ε, esiste una curva tra P e Q la cui lunghezza è minore di $4 + \varepsilon$.



Esercizio 2.5.2 *Trovate una curva tra P e Q la cui lunghezza sia minore di 4.0001.*

Vogliamo, ora, definire la "lunghezza" di una curva. Poi, sull'insieme delle curve che possono essere misurate, determinare quale di queste ha il valore minimo. E' importante osservare che non stiamo cercando di risolvere un problema di minimo per funzioni di una variabile reale, cioè di funzioni:

$$\begin{aligned} f \quad : I \quad &\to \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

dove la variabile indipendente x è una variabile unidimensionale. Nel caso di minimo valore della lunghezza delle curve tra due punti il problema è sostanzialmente più complicato.

Gli elementi su cui vogliamo calcolare il minimo sono dati dall'insieme dei valori della lunghezza di una curva tra due punti fissati.

Dobbiamo ora formalizzare analiticamente tale problema.

Fissiamo due punti P e Q su una sfera Σ. Consideriamo ora l'insieme di tutte le curve che uniscono P e Q. In altre parole un elemento del nostro insieme è una funzione parametrica delle coordinate ϕ, θ

$$\begin{aligned} S \quad : [a,b] \quad &\to \Sigma \\ t \quad &\mapsto (\phi(t), \theta(t)) \end{aligned}$$

tali che

$$S(a) = P, \qquad S(b) = Q.$$

Sia $l(S)$ la lunghezza della curva S (vedi Appendice per la definizione della lunghezza d'arco). La "funzione" che associa a una curva la sua lunghezza è un *funzionale*, cioè una funzione per cui la variabile indipendente è essa stessa una funzione.

Ora, dobbiamo trovare un elemento che renda l minimo.

Cosi' posto, il probema trova soluzione (e dimostrazione) con il Calcolo delle Variazioni che è appunto la branca della matematica che affronta i problemi di minimo e massimo per funzionali.

L'ostacolo, per cui occorre passare a un altro modo di pensare e, di conseguenza a tecniche differenti, è che un'insieme di curve non è rappresentabile come intervallo di numeri (non è "parametrizzabile") e quindi non è possibile applicare la teoria delle funzioni di variabile reale.

Per la particolarità della sfera, proponiamo un'altra strada, più geometrica. Occorre pensare all'idea di distanza che abbiamo in $\mathbb{R}^3$ determinare le sue proprietà essenziali e costruire a partire da esse figure e poi teorie geometriche.

La distanza tra due punti, nello spazio tridimensionale euclideo, cioè la via più breve tra due punti, è data dalla lunghezza del segmento di retta. Torniamo ora alla sfera Σ di raggio r.

La sua geometria, cioè lo studio delle distanze sull'oggetto sfera, sarà costruita attraverso i *grandi cerchi*. Useremo la realizzazione ("modello") di sfera immersa in $\mathbb{R}^3$ per motivare la nostra scelta.

Esercizio 2.5.3 *Verificate che le circonferenze definite dall'intersezione di Σ con piani per l'origine hanno raggio r.*

Esercizio 2.5.4 *Verificate che per due punti antipodali, gli archi di grande cerchio che li uniscono hanno la stessa lunghezza (metà di un meridiano).*

Due punti $P, Q \in \Sigma$ definiscono un unico grande cerchio (tagliandolo in due archi).

Definizione 2.5.5 *Definiamo "distanza" tra due punti $P, Q \in \Sigma$ la lunghezza del minore tra i due archi. Nel caso essi siano uguali (punti antipodali) la loro distanza è la lunghezza di mezzo grande cerchio.*

L'importanza dei grandi cerchi è nel fatto che è possibile misurarne la lunghezza d'arco, e che queste (lunghezze) sono una "distanza" nel senso definito precedentemente. Infatti:

Teorema 2.5.6 *La lunghezza di un arco di grande cerchio su Σ passante per P e Q definisce una "distanza" su Σ.*

Dimostrazione.

Dobbiamo dimostrare che la lunghezza l di un arco di grande cerchio che unisce P e Q soddisfa le proprietà della definizione di distanza (cfr. Strumenti)

Per prima cosa osserviamo che $l(P,Q)$ è definita per ogni scelta di $P, Q \in \Sigma$, ed è qiuindi una funzione che associa ad ogni coppia di punti un numero reale. Inoltre:

1. $l(P,Q) \geq 0$ dal momento che è una lunghezza. $l(P,Q) = 0$ significa che l'arco che unisce P e Q ha lunghezza nulla, quindi $P = Q$.

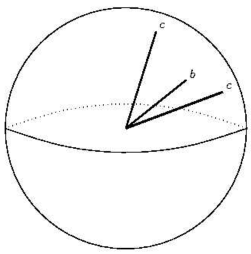
2. $l(P,Q) = l(Q,P)$ dal momento che l'arco che unisce due punti è definito dai punti stessi (e dal centro della sfera) e non dipende dall'ordine con cui vengono scelti i punti (o la lunghezza di una curva non dipende dal verso di percorrenza).

3. la dimostrazione della disuguaglianza triangolare

$$l(P,Q) \leq l(P,M) + l(M,Q)$$

   è un noto teorema di geometria sferica. Per dimostrarlo passiamo dalla misura degli archi che uniscono punti sulla sfera a misurare gli angoli corrispondenti al centro della sfera stessa.

   Sia r il raggio della sfera Σ. Ogni arco di grande cerchio su Σ è proporzionale all'angolo al centro della sfera misurato in radianti (vedi Appendice per la definizione di radiante).



   Se α, β e γ sono rispettivamente gli angoli

$$\begin{aligned} P\widehat{O}Q &= \alpha \\ Q\widehat{O}M &= \beta \\ M\widehat{O}P &= \gamma, \end{aligned}$$

risulta:

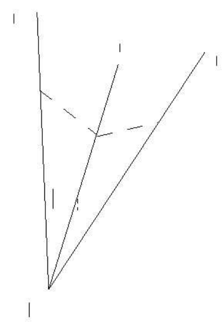
$$\begin{aligned} l(P,M) &= r\alpha \\ l(M,Q) &= r\beta \\ l(P,Q) &= r\gamma \end{aligned}$$

La dimostrazione della disuguaglianza triangolare (2.2) equivale, a questo punto, alla dimostrazione che

$$\alpha \leq \beta + \gamma$$

Per dimostrare la disuguaglianza sugli angoli al centro ricordiamo la seguente

Definizione 2.5.7 *Un triedro solido è definito da un vertice O e tre semirette a, b, c che hanno origine in O.*



Le tre semirette, scelte a due a due, individuano tre piani e tre angoli. Denotiamo questi tre angoli

$$\begin{aligned} \alpha &= \widehat{ab} \\ \beta &= \widehat{bc} \\ \gamma &= \widehat{ac} \end{aligned}$$

Risulta sempre

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 2\pi$$

Esercizio 2.5.8 *Prendete un foglio di carta e costruite un triedro.*

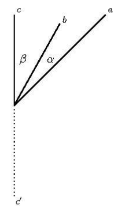
Per ottenere il triedro avete dovuto tagliare uno spicchio del foglio. Il settore angolare che avete eliminato è proprio la parte che manca per ottenere l'angolo giro (che in radianti misura appunto 2π). Da

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 2\pi$$

dimostriamo ora che

$$\alpha \leq \beta + \gamma$$

Infatti, proseguiamo la semiretta c dal lato opposto rispetto a O ottenendo una nuova semiretta c' e consideriamo il nuovo triedro $O_{abc'}$.



Confrontando gli angoli al centro di $O_{abc'}$ con quelli di O_{abc} risulta

$$\begin{aligned} \alpha &= \widehat{ab} \\ \pi - \beta &= \widehat{bc'} \\ \pi - \gamma &= \widehat{ac'} \end{aligned}$$

E vale per il triedro $O_{abc'}$la stessa disuguaglianza:

$$\begin{aligned} \alpha + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) &\leq 2\pi \\ \alpha - \beta - \gamma + 2\pi &\leq 2\pi \\ \alpha &\leq \beta + \gamma \end{aligned}$$

vale dunque la disuguaglianza triangolare per gli angoli al centro e di conseguenza per gli archi di grande cerchio.

Osservazione 2 Il caso di un triedro per cui la disuguaglianza $\alpha + \beta + \gamma \leq 2\pi$ sia in realtà una uguaglianza equivale al caso in cui la disuguaglianza triangolare è in realtà una uguaglianza. Infatti l'uguaglianza $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ si verifica se e solo se il triedro è piano cioè i quattro punti P, Q, M e il centro della sfera sono tutti sullo stesso piano. Questo significa che, visti sulla sfera, i punti estremi del triedro gracciono sullo stesso grande cerchio.

Esercizio 2.5.9 *Calcolate gli angoli tra i punti P, Q, M definiti da*

(a) $P = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $Q = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ *e* $M = (\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi)$

(b) $P = (0, \frac{\pi}{2})$, $Q = (\frac{3}{4}\pi, 0)$ *e* $M = (\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$

Osservazione 3 La nostra linea di *lavoro* è per il momento quella di cercare, utilizzando i modelli di sfera che riusciamo a "costruire", di evidenziare le caratteristiche che rendono la sfera (come oggetto astratto) una superficie non euclidea. Non deve sorprendere perciò che per dimostrare una proprietà che abbiamo deciso essere basilare nella costruzione della geometria sferica abbiamo abbiamo seguito ragionamenti di geometria euclidea nello spazio.

2.6 Il problema delle "geodesiche"

Abbiamo dunque dimostrato che la lunghezza di arco di grande cerchio tra due punti sulla superficie di una sfera definisce una distanza. E' una distanza minima. Cioè, esistono altre curve sulla sfera che, unendo due punti P e Q abbiano lunghezza inferiore a quella dell'arco di grande cerchio?

Prima di formalizzare il problema matematicamente consideriamo i seguenti esempi che invitiamo il lettore a svolgere in dettaglio.

Prendete un mappamondo (non troppo piccolo) ed una carta geografica piana della terra. Per le misurazioni richieste utilizziamo un metro di stoffa e un goniometro.

Vogliamo determinare la distanza più breve tra le città di Roma e di Los Angeles nelle due rappresentazioni della terra.

Iniziamo dalla rappresentazione piana (su carta): come sappiamo dalla geometria del piano euclideo la distanza tra due punti si calcola misurando la lunghezza del segmento che li unisce. Disegnamo quindi il segmento che unisce Roma a Los Angeles. Riportiamo ora lo stesso segmento sul mappamondo cercando di passare per gli stessi luoghi che sono sul segmento della rappresentazione piana. Fissate ora gli estremi di un filo (non elastico) sulle due città.

Osservazione 4 **(a)** E' possibile muovere il filo, tenendone fissi gli estremi?

(b) Il significato geometrico del punto (a), qualora la risposta sia affermativa) è che esiste un percorso più breve, cioè serve meno filo per collegare le due città sul mappamondo.

(c) Quindi devono esistere traiettorie che utilizzano una porzione minore di filo.

(d) Qual è la traiettoria sulla superficie del mappamondo che unisce Roma a Los Angeles che utilizza meno filo?

(e) Qual è la sua lunghezza?

(b) Disegnate sulla rappresentazione piana della terra il percorso minimo tra Roma e Los Angeles trovato sul mappamondo.

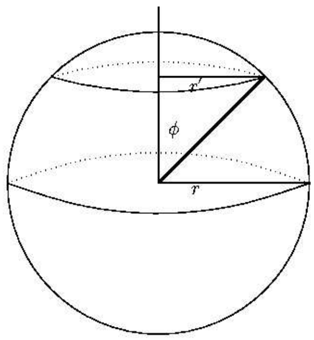
(f) Prolungate sul mappamondo la curva che definisce il percorso minimo tra Roma e Los Angeles. Verificate che i due estremi si incontrano e calcolate la lunghezza della curva chiusa ottenuta

(g) Confrontate la lunghezza della curva precedente con la lunghezza dell'equatore.

Ciò che è stato appena detto, offre alcune indicazioni, che vanno contro il senso comune. Per superare le difficoltà che sorgono quando il senso comune viene disatteso si può pensare di ricorrere al rigore di una dimostrazione matematica.

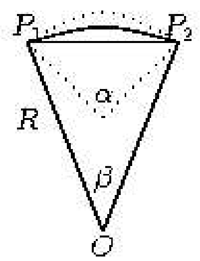
Iniziamo fornendo una "verifica" del fatto che, nel caso di due punti su uno stesso parallelo la lunghezza dell'arco di parallelo che li unisce è maggiore della lunghezza dell'arco di grande cercio passante per gli stessi punti..

Siano P e Q i punti di coordinate (intrinseche) rispettivamente (ϕ_o, θ_1) e (ϕ_o, θ_2)



Il raggio r' della circonferenza γ è uguale a $r\cos\phi_o$. Quindi la lunghezza dell'arco lungo il parallelo che unisce P e Q è uguale a $r'(\theta_2-\theta_1)=(\theta_2-\theta_1)r\cos\phi_o$.

Sia, ora, γ' la circonferenza definita dal cerchio di raggio massimo passante per P e Q. La nostra verifica si limita, al momento, alla seguente figura:



dove $\alpha=\theta_2-\theta_1$ e β è l'angolo sul cerchio di raggio massimo che identifica i punti p e Q su tale cerchio.

Abbiamo quindi una ulteriore indicazione di essere sulla strada giusta nel considerare gli archi di grande cerchio come "segmenti di retta" sulla sfera.

Per dimostrare rigorosamente questo fatto, proviamo a ripercorrere le considerazioni che ci hanno fatto accettare che, nello spazio euclideo tridimensionale, la curva di lunghezza minima tra due punti sia il segmento che li unisce. Le stesse considerazioni, osservazioni e astrazioni possono essere ripetute adattando i ragionamenti al nuovo ambiente in cui ci troviamo.

Teorema 2.6.1 *Le geodesiche sulla sfera sono archi di grandi cerchi.*

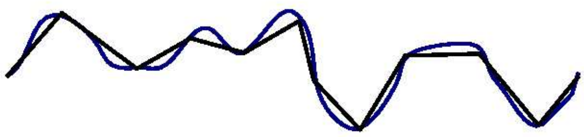
Dimostrazione.

1. Osservazione sul caso piano. Lo spazio ambiente è $\mathbb{R}^2$. Dati $P,Q\in\mathbb{R}^2$, il percorso più breve che li unisce è il segmento di retta $\overline{PQ}$. La dimostrazione di tale affermazione ha bisogno, come già osservato, di tecniche di Calcolo delle Variazioni; dunque molti di noi non ne vedono la dimostrazione fino a un corso universitario avanzato e tutti gli altri non la vedranno mai. Eppure tutti accettiamo questa affermazione come vera, nella maggior parte dei casi, non perchè sappiamo dell'esistenza di

una qualche teoria che la dimostra, ma perchè ci sembra ovvia, e cioè *compatibile con le nostre osservazioni*. La ragione per cui la accettiamo è una osservazione, ripetibile empiricamente, ma a sua volta basata su un'ipotesi astratta, ed è che le *curve siano approssimabili con spezzate di segmenti retti*.

In realtà noi non sappiamo misurare lunghezze di curve che non siano segmenti. La lunghezza di una generica curva è data da un integrale curvilineo come si impara nei corsi di calcolo, cioè da un procedimento di approssimazione della curva con segmenti di retta (vedi Appendice La lunghezza d'arco). Già nella geometria studiata a scuola la lunghezza della circonferenza è calcolata come *limite* dei perimetri dei poligoni regolari inscritti nella circonferenza.

Nel caso di una generica curva $\mathfrak{C}$ che unisce P e Q.



E' quindi necessario costruire una spezzata che approssima la curva $\mathfrak{C}$. In realtà noi non solo non sappiamo calcolare direttamente la lunghezza di una generica curva, ma non sappiamo nemmeno se ha senso parlare di lunghezza. Esistono infatti curve la cui lunghezza non può essere misurata e le curve che definiamo "misurabili" sono appunto quelle che possono essere approssimate attraverso spezzate e cioè misurate con procedimento di limite (o di approssimazioni successive).

Tali curve godono della proprietà che selezionando n punti

$$P_o = P, P_1, \ldots, P_n = Q$$

su $\mathfrak{C}$ la curva costituita dagli n segmenti

$$\overline{P_oP_1} \quad \overline{P_1P_2} \qquad \overline{P_{n-1}P_n}$$

approssima tanto meglio la curva $\mathfrak{C}$ quanto più numerosi sono i punti $P_o = P, P_1, \ldots, P_n = Q$, ovvero, in altre parole, quanto più piccoli sono i segmenti P_iP_{i+1} al variare di $i = 0, \ldots, n-1$. Attraverso un procedimento di limite (come nel caso della circonferenza e dei poligoni in esso iscritti) possiamo misurare la lunghezza di $\mathfrak{C}$.

$$l(\mathfrak{C}) = \lim_{n\to\infty} l(\overline{P_oP_1}) + \ldots + l(\overline{P_{n-1}P_n})$$

2. Caso della sfera

   Ripetiamo il ragionamento sulla superficie di una sfera Σ. Sappiamo misurare archi di grande cerchio dal momento che essi sono proporzionali all'angolo al centro per un fattore dato dal raggio della sfera. Sappiamo anche che questa lunghezza soddisfa le proprietà di una distanza.

   Ora consideriamo una curva $\mathfrak{C}$ su Σ che unisce P e Q e scegliamo n punti $P_o = P, P_1, \ldots, P_n = Q$.

   In questo caso uniamo i punti $P_o = P, P_1, \ldots, P_n = Q$ con archi di grandi cerchi (non con segmenti perché non giacciono sulla superficie di Σ). Diciamo, in anaolgia con il caso euclideo, che una curva è misurabile se è approssimabile per spezzate di archi di grandi cerchi (che sappiamo misurare). Per ogni coppia di punti su Σ esiste un unico grande cerchio che li contiene e di conseguenza l'esistenza di curve misurabili è assicurata.

Osservazione 5 Le curve che non vogliamo (o meglio non possiamo) considerare sono quelle molto frastagliate (anche in questo caso l'analogia con la situazione eucliudea è totale). Per tali curve non solo non è chiaro quale sia la loro lunghezza ma non è chiaro se esista il limite della lunghezza della spezzata al tendere del numero di punti che la formano all'infinito.

Nel caso di curve misurabili abbiamo una spezzata di archi di grande cerchio

$$\widehat{P_oP_1} \quad \widehat{P_1P_2} \qquad \widehat{P_{n-1}P_n}$$

la cui lunghezza

$$l = l(\widehat{P_oP_1}) + l(\widehat{P_1P_2}) + \ldots + l(\widehat{P_{n-1}P_n})$$

è vicina quanto vogliamo alla lunghezza L di $\mathfrak{C}$, per definizione.

Consideriamo ora la spezzata ottenuta ignorando un punto, ad esempio P_1 e denotiamo con l_1 la lunghezza di quest'ultima curva. Per la disuguaglianza triangolare si ha che

$$l(\widehat{P_oP_2}) \leq l(\widehat{P_oP_1}) + l(\widehat{P_1P_2})$$

da cui segue che

$$l_1 \leq l.$$

Procedendo in questo modo costruiamo spezzate che uniscono P e Q e la cui lunghezza e via via minore. Eliminando tutti i punti intermedi si ha

$$l(\widehat{PQ}) \leq l(\widehat{P_oP_1})l(\widehat{P_1P_2})l\ldots(\widehat{P_{n-1}P_n}) \approx L$$

con l'uguaglianza che vale se e solo se $\mathfrak{C}$ è già in partenza un cerchio di raggio massimo.

Abbiamo cosi' dimostrato che *la distanza* tra due punti su una sfera è misurata dalla lunghezza dell'arco di grande cerchio che li congiunge.

E' naturale a questo punto lasciare che i cerchi di raggio massimo svolgano, sulla sfera, un ruolo analogo a quello delle rette sul piano.

□

2.7 La geometria della sfera non è euclidea

Siamo ormai giunti alla costruzione della geometria della sfera. Abbiamo davvero costruito qualcosa di nuovo, oppure abbiamo solo chiamato con nomi diversi gli stessi "enti" che già conoscevamo della geometria euclidea.

2.7.1 Intersezione di rette sulla sfera

Ora che abbiamo a disposizione le "rette" sulla sfera possiamo chiederci come si intersecano. Cerchiamo indicazioni che possano convincerci di aver costruito una "nuova" geometria.

Sappiamo che nella geometria euclidea la mutua posizione di due rette è:

- le rette si intersecano in un punto;

- le rette sono parallele;
- le rette coincidono.

Tralasciando il caso di rette coincidenti vediamo cosa succede sulla sfera.

Proprietà 2.7.1 *Ogni coppia di grandi cerchi si interseca in due punti.*

Quindi sulla sfera tutte le rette si intersecano.
Ma in realtà la generalizzazione del concetto di parallelismo tra rette deve proprio basarsi sul concetto di autointersezione?

Esercizio 2.7.2 *Pensate a come generalizzare il concetto di parallelismo in modo che i cerchi di raggio massimo su una sfera conservino tale proprietà.*
Soluzione: Ad esempio potremmo considerare i meridiani come rette parallele tra loro dal momento che tutti i meridiani intersecano l'equatore formando angoli retti. Non è proprio in questo modo che possiamo definire due rette parallele in $\mathbb{R}^2$.

Proprietà 2.7.3 *Le rette sono di lunghezza finita e tutte hanno la stessa lunghezza.*

2.7.2 Triangoli sulla sfera

Vogliamo ora formalizzare in modo rigoroso le differenze tra la geometria della sfera e la geometria euclidea.
In precedenza (vedi Grandi cerchi e loro misure) abbiamo calcolato l'angolo tra due grandi cerchi come l'angolo che si forma tra i loro vettori tangenti, oppure come l'angolo tra i vettori normali ai piani che definiscono i grandi cerchi.
Siamo ora in grado di costruire una geometria sulla superficie di una sfera nel senso che siamo in grado di misurare distanze e angoli.

Osservazione 6 *Gli angoli adiacenti formano un angolo la cui ampiezza è data dalla somma delle ampiezze*

Uno dei primi teoremi della geometria euclidea piana è quello relativo alla somma degli angoli interni di un triangolo. Cosa succede sulla sfera?
Abbiamo già osservato (vedi Grandi cerchi e loro misure) che per il triangolo sferico formato dall'equatore e da due meridiani lal somma degli angoli interni è maggiore di π.

Esercizio 2.7.4 (a) *Disegnate sulla carta un triangolo i cui vertici siano posti nelle città di Milano, Stoccolma e Calcutta.*

(b) *Cercando di passsare per gli stessi luoghi rappresentate i lati del triangolo sul mappamondo. Che figura abbiamo di fronte?*

(c) *Calcolate le distanze nella rappresentazione piana.*

(d) *Con l'uso di un filo non elastico verificate che i lati del triangolo piano non sono le distanze minime sulla superficie sferica (mappamondo).*

(e) *Determinate le distanze minime sul mappamondo.*

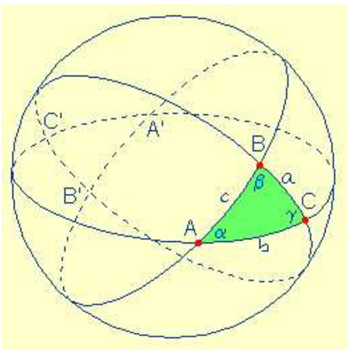
(f) *Riportate, nella rappresentazione piana, i lati del triangolo curvilineo ottenuto sulla sfera, come sempre cercando di passare per gli stessi luoghi. Che figura abbiamo di fronte?*

(g) *Calcoliamo gli angoli interni*

Dopo aver provato su un modello di sfera le proprietà degli angoli interni di un triangolo sferico dimostriamo il seguente:

Teorema 2.7.5 *In un triangolo sferico la somma degli angoli interni è maggiore di π.*

Dimostrazione.



Osserviamo per prima cosa che un triangolo sferico ha i lati definiti da archi di grande cerchio. Vogliamo dimostrare che

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi > 0$$

dove $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$, $\gamma = \widehat{C}$.

Estendiamo i lati $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ e $\widehat{BC}$ del triangolo agli interi cerchi. Tali cerchi si incontreranno a due a due nei punti A', B', C' rispettivamente antipodali a A, B, C.

Misuriamo l'area dei settori di sfera Σ_A, Σ_B e Σ_C limitati ciascuno da questi cerchi di raggio massimo

L'area di ciascuno di questi settori è proporzionale alla superficie di Σ nello stesso modo in cui gli angoli in A e A' sono proporzionali all'angolo giro 2π. Poichè la superficie della sfera in oggetto è $4\pi r^2$ si ha:

$$\frac{\Sigma_A}{4\pi r^2} = \frac{2\widehat{A}}{2\pi}$$

e dunque

$$\Sigma_A = 4r^2\widehat{A}$$

e, analogamente,

$$\Sigma_B = 4r^2\widehat{B} \qquad \Sigma_C = 4r^2\widehat{C}.$$

Sommando le aree dei tre settori otteniamo l'intera superficie sferica, contando due volte i triangoli antipodali. Quindi

$$4\pi r^2 + 2\widehat{ABC} + 2\widehat{A'B'C'} = \Sigma_A + \Sigma_B + \Sigma_C = 4r^2(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}).$$

Poichè

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi = \frac{\widehat{ABC}}{r^2} > 0$$

2.7.3 Circonferenze sulla sfera

Sappiamo che per una circonferenza piana $C = 2\pi\tilde{r}$.

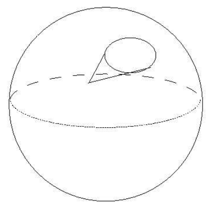
Nella geometria sferica sussiste il seguente

Teorema 2.7.6 *Sia C una circonferenza di raggio r' su Σ. Allora*

$$C < 2\pi r'.$$

Dimostrazione.

Anche sulla sfera la circonferenza è il luogo dei punti equidistanti da un centro.



Una circonferenza definisce quindi un cono di vertice O e apertura ψ con base piana il cerchio di cui vogliamo calcolare la circonferenza. Il raggio di tale cerchio è $r' = r \sin \psi$. Dunque si ha

$$C = 2\pi r' = r \sin \psi 2\pi.$$

D'altra parte la definizione di radiante ci dice che $r' = r\psi$ da cui si deduce che

$$C = 2\pi r \sin \psi < 2\pi r \psi = 2\pi r'$$

poiche $\sin \psi < \psi$ per $\psi > 0$.

Esercizio 2.7.7 *Verificate il teorema precedente prendendo come circonferenza l'equatore visto come luogo dei punti equidistanti dal polo nord*

Esercizio 2.7.8 *Verificate il teorema precedente prendendo come circonferenza il parallelo 30 gradi nord*

2.8 Tecniche di calcolo infinitesimale

Le considerazioni relative alla differenza tra la distanza tra due punti calcolata su un parallelo piuttosto che su un cerchio di raggio massimo possono essere formalizzate matematicamente attraverso tecniche di calcolo.

Proprietà 2.8.1 *Siano $P_1, P_2 \in \Sigma$, posti sullo stesso parallelo. La lunghezza dell'arco di parallelo che congiunge P_1 eP_2 è minore della lunghezza dell'arco di grande cerchio che congiunge P_1 eP_2*

Per dimostrare la proprietà utilizziamo le coordinate di latitudine e longitudine (vedi Coordinate intrinseche). Con queste coordianate la sfera è data da:

$$\Sigma \{(\phi, \theta) : 0 \leq \phi < \pi;\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

Essere sullo stesso parallelo equivale a scrivere

$$P_1 = (\phi_o, \theta_1) \qquad P_2 = (\phi_o, \theta_2)$$

Poniamo $\alpha = \theta_1 - \theta_2$ con $0 \leq \alpha < \pi$.

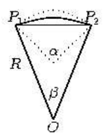
Sia $L = \mathrm{dist}_{\mathbb{R}^3}(P_1, P_2)$. La lunghezza dell'arco di parallelo è data da $C_p = r'\alpha$ mentre la lunghezza dell'arco di grande cerchio tra P_1 e P_2 è pari a $C = r\beta$ dove β è l'angolo che delimita l'arco tra P_1 e P_2 sul grande cerchio.

Ricordiamo che $r' = r \sin \phi_o$.

Vogliamo dimostrare che

$$\beta < \sin \phi_o \alpha$$

Il segmento $\overline{P_1 P_2}$ appartiene sia al piano del paralleo sia al piano che definisce il cerchio di raggio massimo passante per P_1 e P_2. Quindi consideriamo il triedro (che rappresentiamo su un unico piano)



Si ha

$$\begin{aligned} L &= 2r' \sin \frac{\alpha}{2} \\ &= 2r \sin \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

Da cui segue

$$\sin \phi_o \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\beta}{2}$$

D'altra parte

$$0 \leq \phi_o < \pi$$

da cui segue $\sin \phi_o \leq 0$.

Quindi

$$\sin \frac{\alpha}{2} \geq \sin \frac{\beta}{2}$$

Consideriamo ora la funzione implicita $\beta = \beta(\alpha)$ (ricordiamo che ϕ_o è costante). Si ha che

$$\begin{aligned} \beta(0) &= 0 \\ \beta(\pi) &= \pi - 2\phi_o \end{aligned}$$

quindi la funzione $F(\alpha) = \beta(\alpha) - \cos\phi_o\alpha$ agli estremi vale

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(\pi) &= \pi - 2\psi_o - \pi\sin\phi_o \end{aligned}$$

Calcoliamo, ora, la derivata implicita di F

$$F'(\alpha) = \beta'(\alpha) - \sin\phi_o$$

derivando $\sin\phi_o \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2}$ si ha

$$\beta'(\alpha) = \sin\phi_o \frac{\cos\alpha/2}{\cos\beta/2}$$

quindi

$$F'(\alpha) = \sin\phi_o \frac{\cos\alpha/2}{\cos\beta/2} - \sin\phi_o$$

Si ha che

$$F'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha/2}{\cos\beta/2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Poichè

$$\left|\cos\frac{\beta}{2}\right| > \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$$

si ha

$$\begin{aligned} F'(\alpha) &= \sin\phi_o \left[\frac{\cos\alpha/2}{\cos\beta/2} - 1\right] \\ &\leq \sin\phi_o \left[\left|\frac{\cos\alpha/2}{\cos\beta/2}\right| - 1\right] < 0 \end{aligned}$$

da cui segue

$$F(\alpha) \leq 0$$

o, equivalentemente

$$\beta \leq \sin\phi_o\alpha$$

2.9 Osservazioni locali e globali

Con i teoremi 2.6.1 e 2.7.5 vediamo che la geometria sferica non è in alcun modo equivalenete alla geometria piana: non solo cade il V postulato di Euclide, cioè la nozione di parallelismo come siamo abituati a consoderarlo, ma tutte le osservazioni su un'area quantunque piccola di superficie sferica riportano misurazioni non compatibili con la geometria euclidea,

D'altra parte sono proprio queste misurazioni che caratterizzano la geometria sferica.

'L'esperimento mentale' comune tra i matematici che descrive questo stato di cose è il seguente:

immaginate di essere in comunicazione con gli abitanti di un lontano pianeta. Essi possono effettuare misurazioni e osservazioni su aree limitate del loro pianeta e comunicare il risulatato, ma non conoscono la forma (globale) del loro pianeta e voi non potete osservarlo. Potete dunque chiedere di misurare circonferenze e raggi lungo la superficie del pianeta, oppure di sommmare gli angoli interni di un triangolo. Se le loro misurazioni danno sempre le disuguaglianze dei teoremi 2 e 3, i vostri lontani interlocutori vivono su un pianeta a geometria sferica.

Questa idea dell' abitante di una superficie, dovuta a Helmotz, comunica efficacemente il salto immaginario che i matematici avevano compiuto; è posssibile metter a punto osservazioni locali da cui dedurre informazioni globali sulla forma dell'oggetto la cui superficie è oggetto di studio.

Conseguenza dei teoremi 2.6.1 e 2.7.5 è che nessuna porzione di superficie sferica può essere rappresentata su una carta piana senza aberrazioni.

Questo però è in contrasto con la nostra esperienza, cosi' come senbrano esserlo i teoremi 2.6.1 e 2.7.5: guardno a una zona attorno a noi i triangoli, le circonferenze che misuriamo rispettano i dettati della geometria euclidea (che nasce d'altra parte da osservazioni fatte attorno a noi). Gli errori che possono essere commessi dipendono piuttosto dagli strumenti che utilizziamo o dal modo di rappresentare le figure.

I risulati dei teoremi 2.6.1 e 2.7.5 cioèle disuguaglianze espresse nei loro enunciati e quindi la non-equivalenza tra la geometria sferica e quella euclidea, sono ottenuti tramite delle formule, quindi è possibile calcolare l'errore.

Daremo ora la dimostrazione dell'errore che si commette pensando alla sfera come superficie eucildea.

2.9.1 Misura della circonferenza

Consideriamo una cirrconferenza C di raggio r su una sfera Σ di raggio R. Abbiamo due possibili modiper calcolare la lunghezza della circonferenza:

$$C = 2\pi r \sin\psi \tag{2.2}$$
$$2\pi r' = 2\pi r\psi \tag{2.3}$$

dunque l'errore commesso è dato da

$$\epsilon(\psi) = \left|\frac{2\pi R(\sin\psi - \psi)}{2\pi R\sin\psi}\right| = \left|1 - \frac{\psi}{\sin\psi}\right|.$$

Dal calcolo dei limiti notevoli sappiamo che

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\psi}{\sin\psi} = 1$$

e dunque

$$\lim_{\theta\to 0}\epsilon(\psi) = 0.$$

Ricordando $r' = r\psi$ per $r' << r$ l'errore è piccolo (percentualmente) se l'area osservata è piccola rispetto al raggio della sfera su cui si trova.

Misura degli angoli interni di un triangolo

Analogamente a quanto fatto per la misura della circonferenza, l'errore commesso identificando la somma degli angoli interni di un triangolo con l'angolo piano è dato da:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi = \frac{S_{ABC}}{r^2}$$

e in percentuale rispetto alla misurazione da effettuare

$$\frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi}{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC} + r^2}$$

e, anche in questo caso, tende a zero per triangoli piccoli rispetto alla sfera su cui giacciono.