Trasformazioni, simmetrie e tassellazioni del piano

Laura Tedeschini Lalli

I 17 gruppi di tassellazione del piano: riconoscimento e classificazione.

Questa che segue è la casistica completa dei 17 gruppi di tassellazione del piano. Così equipaggiati, potete fare "lavoro su campo", catalogando motivi simmetrici. Da questo lavoro possono nascere ulteriori problematiche. Seguiamo, nel fare la lista, la nomenclatura internazionale cristallografica, che a sua volta segue un criterio di classificazione dei 17 gruppi a seconda dei movimenti che vi compaiono. La prima classificazione dei 17 gruppi è ottenuta osservando la rotazione minima del piano che lascia invariato il motivo. Cerchiamo dunque l'angolo minimo di rotazione. All'interno dei gruppi che ammettono la stessa rotazione minima, distingueremo poi a seconda che ammettano anche altro tipo di trasformazioni, o simmetrie, che lasciano invariato il motivo.

Rotazione minima di $\frac{\pi}{3}$.

Ci si chiede se il gruppo ammette anche riflessioni. Nel caso di un angolo minimo di $\frac{\pi}{3}$, se esistono riflessioni, per ogni centro di rotazione passa un asse di riflessione.

P6 : Il motivo non presenta simmetrie di riflessione. In questo caso il gruppo si chiama “P6”, perchè è un gruppo periodico di ordine 6, ovvero la composizione consecutiva per sei volte di una rotazione di $\frac{\pi}{3}$ risulta nel movimento nullo, elemento identità del gruppo.

P6M : Il motivo grafico presenta simmetrie di riflessione. In questo caso si aggiunge la lettera “M”, nella notazione internazionale cristallografica, per “mirror”, letteralmente, appunto “specchio”.

Rotazione minima di $\frac{\pi}{2}$. Di nuovo, ci si chiede se esistano anche riflessioni, e vedremo che queste risultano in composizioni diverse a seconda che il loro asse passi o meno per un centro di rotazione.

P4 : Il motivo non presenta simmetrie di riflessione. Il gruppo finito è dunque costituito dalle possibili rotazioni consecutive di $\frac{\pi}{2}$, ed ammette 4 elementi, perché alla quarta rotazione si ottiene il movimento identico.

P4G : Esistono riflessioni, ma nessuno degli assi di riflessione passa per alcuno dei centri di rotazione di $\frac{\pi}{2}$. In questo caso, data la struttura di gruppo, necessariamente compaiono nel gruppo delle “glissoriflessioni”, il cui asse non è parallelo ad alcun asse di riflessione. Per questo si aggiunge la lettera “G”, da “glide reflection”, ovvero “riflessione scivolata”.

P4M : Analogamente al caso di P6M, questo è un gruppo di rotazione minima $\frac{\pi}{2}$, che ammette riflessioni il cui asse passa per centri di rotazione minima.

Rotazione minima di $\frac{2\pi}{3}$. Tutti i gruppi di movimenti che ammettono questa come rotazione minima, contiene come *sottogruppo* il gruppo generato da questa rotazione, che ha 3 elementi; essi vengono quindi tutti denotati con una sigla contenente P3. In questo caso, come nel caso dei gruppi P6, se esistono riflessioni, i loro assi necessariamente passano per un qualche centro di rotazione dell'angolo minimo di rotazione che caratterizza il gruppo. Le successive lettere nella sigla, d'altronde, distinguono se esistono o meno centri di rotazione per cui non passa alcun asse di riflessione

P3 : La parte finita del gruppo non presenta simmetrie tranne quelle rotazionali. Con tre rotazioni consecutive di un angolo di $\frac{2\pi}{3}$, si ottiene l'identità.

P31M : Esistono riflessioni, ma esistono anche centri di rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ per i quali non passa alcun asse di riflessione.

P3M1 : Per ogni centro di rotazione passano assi di riflessione.

Rotazione minima di π. Il minimo angolo di rotazione che lascia invariato il motivo misura π. Osserviamo ora se il gruppo ammette riflessioni; in questo caso, i loro assi posso passare per un qualche centro di rotazione, o anche possono non passare per alcun centro di rotazione. Questa volta la notazione si discosta

P2 : Il gruppo ammette soltanto rotazioni di π. Ripetendo 2 volte la rotazione si torna all'identità.

CMM : Vi sono assi di simmetria che passano per centri di rotazione, ed anche centri di rotazione per cui non passa alcun asse di dimmetria. La ragione per cui appaiono due lettere M nella sigla è che allora esistono riflessioni rispetto ad assi che vanno in direzioni diverse, e che si intersecano perpendicolarmente in centri di rotazione di π.

PMM : Per ogni centro di rotazione passano assi di riflessione. (Di nuovo, gli assi di simmetria si intersecno perpendicolarmente in un centro di rotazione).

PMG : Gli assi di riflessione non passano per alcun centro di rotazione. Infatti tutti gli assi di riflessione sono in questo caso paralleli, ed inoltre, in direzione ad essi perpendicolare, esistono assi di glissoriflessione.

PGG : Non esistono riflessioni, ma esistono glissoriflessioni. In questo caso, necessariamente vi sono due direzioni di glissoriflessione, perpendicolari tra loro.

Non esistono rotazioni che lasciano invariato il motivo. Dunque, per finire, i gruppi che ammettono solo riflessioni o glissoriflessioni, e benintesto le due traslazioni indipendenti che caratterizzano tutti i gruppi di tassellazione piana.

CM : Il motivo ammette sia riflessioni, che glissoriflessioni, con asse parallelo ma distinto da quelli di riflessione.

PM : Vi sono riflessioni; non vi sono glissoriflessioni, se non eventualmente quelle banalmente ottenute lungo lo stesso asse delle riflessioni, componendole con una traslazione.

PG : Vi sono glissoriflessioni, ma non riflessioni.

P1 : Il gruppo non ammette altra simmetria che le due traslazioni.