

NOME: _____ COGNOME: _____ MATRICOLA: _____

Attenzione: Svolgere i seguenti esercizi, utilizzando il retro dei fogli per i conti.
Non usare altri fogli. Riportare le risposte negli spazi.

1

2

3

4

5

ESERCIZIO 1.

$$i) f(x, y) = x \cos(y^2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \dots\dots\dots, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \dots\dots\dots$$

$$\nabla f(1, 2) = \dots\dots\dots$$

ii) Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione di $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - y^2}$;

iii) determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione di $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

iv) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^2 dx \int_{-1}^x xy dy.$$

ESERCIZIO 2.

Una superficie quadrica ha equazione $3z^2 - 2y^2 + x^2 + 1 = 0$.

i) Disegnare le sezioni con i piani $y = 0, y = 2, z = 0$.

Stabilire di quale quadrica si tratta e tracciarne uno schizzo in \mathbb{R}^3 .

ii) Una superficie quadrica presenta come sezioni con i piani $x = 1, 2$ rispettivamente le curve $\frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 2$, $\frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 8$. Disegnare le sezioni.

Varie superfici quadriche possono avere queste sezioni. Elencarle e farne uno schizzo con il nome.

iii) Sapendo inoltre che la sezione con $z = 0$ è la curva $2x^2 - \frac{y^2}{3} = 0$, stabilire di che quadrica si tratta, scriverne l'equazione e farne uno schizzo in \mathbb{R}^3 .

ESERCIZIO 3.

Data la funzione $f(x, y) = y^3 - 2y^2 + xe^x + 1$

(i) Determinare il dominio di esistenza della funzione f ;

(ii) Calcolare $\nabla f(x, y)$;

(iii) Trovare i punti critici.

(iv) Studiare la natura dei punti critici attraverso la matrice Hessiana.

v) determinare il piano tangente ad $f(x, y)$ nei punti critici.

vi) calcolare la derivata direzionale di $f(x, y)$ in direzione $\underline{u} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ nel punto $(0, 2)$

ESERCIZIO 4.

Sia T la regione del piano \mathbb{R}^2 delimitata dalle curve $y = 0$, $x = 2$, $y = x^2$.

i) Tracciare uno schizzo di T .

ii) Scrivere T come dominio verticalmente semplice e orizzontalmente semplice.

iii) Impostare l'integrale $\int \int_T x \cos y dx dy$ come integrale iterato in entrambe le descrizioni.

iv) Calcolarlo.

ESERCIZIO 5. Un giardino è progettato con una scarpata data dalla superficie di equazione $z = -3y + \sin x$ nel tratto $0 < x < 20$ e $-15 < y < 0$, ed è piano altrove.

i) Studiare e disegnare le curve di livello di questa scarpata per $z = 0, 1, 2, 3$;

ii) fare uno schizzo tridimensionale della scarpata;

iii) un ruscello passa per il punto $(3, -4, 12 + \sin(3))$. In che direzione scende l'acqua? Calcolarla.

iv) calcolare il volume di terriccio necessario per realizzare la scarpata.