

Capitolo 3

Geometrie localmente euclidee

Anche nei successivi capitoli il nostro tentativo sarà quello di fornire gli strumenti matematici adeguati a formalizzare il concetto di distanza su una superficie, passando per una intuizione geometrica e per la creazione di modelli.

Nel Capitolo relativo alla geometria sferica abbiamo imparato che tale geometria non soddisfa alcune proprietà euclidea quali:

- la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a π , un angolo piatto;
- per un punto esterno a una “retta“ passa una e una sola “retta” parallela.

Queste proprietà non sono verificate né globalmente (cioè per tutti i triangoli), né localmente (cioè per tutti i triangoli sufficientemente piccoli) sulla superficie di una sfera. E' vero d'altra parte che se consideriamo un triangolo molto piccolo rispetto alla superficie della sfera la somma dei suoi angoli interni non è molto distante dal valore di π (vedi Osservazioni locali e globali Capitolo 2). E questo rende conto in modo rigoroso della scelta della geometria euclidea per descrivere osservazioni “locali” cioè in zone limitate.

Ci chiediamo ora, se sia possibile pensare a superfici su cui le proprietà euclidee non siano soddisfatte per oggetti “grandi”, ma lo siano per oggetti piccoli?

Ed ancora: se riuscissimo a costruire tali superfici, almeno localmente la distanza sarebbe quella euclidea, e viceversa?

Oppure: se riuscissimo a costruire matematicamente (attraverso formule) tali superfici, allora dovrebbe essere possibile costruirle a partire da un foglio di carta?

Da matematici, volgiamo capire in quanti modi è possibile ricomporre globalmente delle osservazioni locali; quante geometrie, cioè, sono compatibili globalmente con una teoria euclidea locale, “in piccolo”, e come l’aspetto globale degli oggetti geometrici cambia da una all’altra.

Lo schema che proponiamo per tutte le geometrie localmente euclidee è:

- a. come oggetto immerso nello spazio tridimensionale (la visione globale), le coordinate intrinseche;
- b. come relazione di equivalenza sul piano (trasportare rigidamente un’osservazione locale da un posto all’altro: in quanti modi cioè possibile?);
- c. come legge di incollamento ai bordi di una regione piana (cioè mettiamo insieme a. e b.).

A sua volta il punto c. si presta, in linea di principio, a costruire effettivi modelli di carta, mentre il metodo b. ci fornisce tutti i modi compatibili con osservazioni piane (di un osservatore che si sposta). Vedremo che gli oggetti che “realizzano” queste osservazioni nello spazio tridimensionale sono a volte sorprendenti, e controintuitivi, a volte non realizzabili, ma certamente immaginabili.

Di volta in volta ci chiederemo come cambia l’aspetto di enti fondamentali, quali le rette, a seguito della ricomposizione globale.

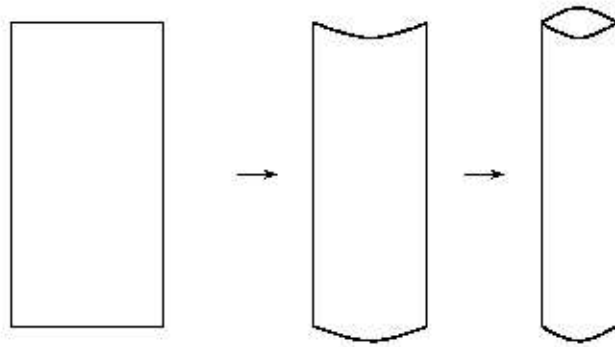
3.1 Il cilindro

3.1.1 Modelli di cilindro

Modelli di carta

Esempio 3.1.1 *Cilindro finito 1*

Il modello di cilindro finito che ciascuno può costruire è ottenuto incollando il lati opposti di un foglio rettangolare.



Naturalmente, se questo è il nostro modello di “cilindro”, non ha alcuna importanza che la sezione trasversale (la base) sia circolare.

Esercizio 3.1.1 (a) *Costruite un cilindro la cui circonferenza di base misuri 10 centimetri e la cui altezza misuri 20 centimetri.*

(b) *Costruite un poliedro cilindrico la cui base sia formata da un esagono regolare di lato 2 centimetri e la cui altezza misuri 20 centimetri*

(c) *Avete davanti a voi un foglio di carta rettangolare su cui sono disegnate tre rette: una orizzontale, una verticale ed una obliqua. Le curve che appaiono sul cilindro sono qualitativamente differenti tra loro. Come? (Per prima cosa cercate di visualizzare le operazioni manuali che dovrete compiere e solo in un secondo momento risolverete fisicamente l'esercizio).*

(e) *Avete davanti a voi un cilindro finito su cui è disegnata una circonferenza parallela alla base ed un foglio di carta rettangolare da cui si può ottenere lo stesso cilindro. Quali informazioni dovete riportare sul foglio rettangolare per ottenere la stessa circonferenza dopo aver incollato due dei lati paralleli?*

Esempio 3.1.2 Cilindro finito 2 *Dato un foglio di carta trasparente rettangolare costruite un cilindro incollando tra loro sia i lati verticali che il segmento verticale che unisce i punti medi delle basi. L'operazione più naturale è quella di avvolgere il foglio di carta su se stesso due volte.*



Esercizio 3.1.2 (a) *Se sul foglio di carta (dell'esempio precedente) è disegnata una retta verticale quale figura apparirà sul cilindro?*

(b) *E se vi è disegnata una retta orizzontale?*

(b) *E se vi è disegnata una retta obliqua?*

Avvolgendo il foglio di carta su se stesso due volte abbiamo “identificato”, non solo i punti sui tre segmenti verticali di riferimento, ma anche i punti che non sono su questi segmenti (cfr. Relazioni di equivalenza). In altre parole, una volta costruito il cilindro, i punti sovrapposti sono indistinguibili.

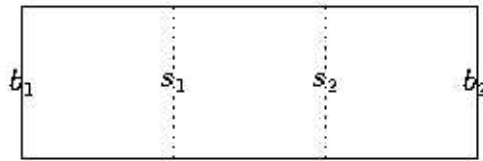
Esercizio 3.1.3 *Quali punti sul cilindro hanno tre rappresentanti sul foglio? Esistono punti sul cilindro che hanno due soli rappresentanti sul foglio? E punti con un solo rappresentante?*

Esercizio 3.1.4 (a) *Consideriamo un foglio rettangolare di base 20 centimetri e di altezza 10 centimetri su cui è disegnato un quadrato di lato 2 centimetri con i lati paralleli ai lati del rettangolo. Che figura si ottiene sul cilindro ottenuto incollando i lati verticali ed il segmento medio? Il risultato dipende dalla posizione del quadrato?*

(b) *Sullo stesso foglio di carta è disegnato un quadrato di lato 7 centimetri con i lati paralleli ai lati del rettangolo. Che figura si ottiene sul cilindro? Il risultato dipende dalla posizione del quadrato?*

(c) *Disegnare sul foglio di carta due quadrati in modo che la loro immagine sul cilindro, ottenuto incollando i lati verticali e il segmento medio, sia un unico quadrato.*

Esempio 3.1.3 Cilindro finito 3 Generalizziamo il procedimento dell'esercizio precedente al caso di un foglio di carta rettangolare su cui sono stati incollati il bordo b_1 con il segmento verticale s_1 e poi con il segmento verticale s_2 ed infine con il bordo verticale b_2 , con b_1, s_1, s_2 e b_2 ognuno distante dal precedente, diciamo h .



In questo caso abbiamo avvolto il foglio di carta su se stesso tre volte.

Esercizio 3.1.5 Quali punti sul cilindro hanno quattro rappresentanti sul foglio?

Esercizio 3.1.6 (a) Se sul foglio di carta è disegnata una retta verticale quale figura apparirà sul cilindro?

(b) E se vi è disegnata una retta orizzontale?

(c) E se vi è disegnata la retta obliqua diagonale del rettangolo iniziale?

(d) E se vi è disegnata la retta obliqua diagonale del rettangolo di lati verticali b_1 e s_1 ?

(e) Disegnare sul foglio due quadrati in modo che sul cilindro ottenuto avvolgendo tre volte il foglio di carta appaia uno ed un solo quadrato.

(f) Disegnare sul foglio tre quadrati in modo che sul cilindro ottenuto avvolgendo tre volte il foglio di carta appaia uno ed un solo quadrato.

Esempio 3.1.4 Cilindro finito 4 L'ultimo esempio può essere generalizzato ad un numero arbitrario di segmenti verticali intermedi.

Esercizio 3.1.7 (a) *Dato un foglio di carta A4 costruite un cilindro con 10 segmenti verticali intermedi.*

(b) *Descrivete cosa appare sul cilindro così ottenuto se sul foglio è disegnata una retta obliqua.*

Metodo inverso: l'operazione inversa a quella di avvolgere un foglio di carta su se stesso un numero n di volte è quella di muovere un timbro a rullo su un foglio lo stesso numero di volte.

Esercizio 3.1.8 *Quale figura deve essere incisa sul rullo per disegnare una retta orizzontale sul foglio? E per disegnare una retta obliqua? E' possibile disegnare un'unica retta verticale?*

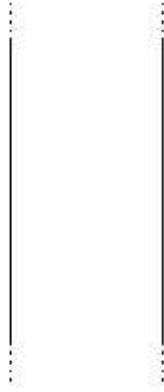
Ci chiediamo ora quale oggetto piano dobbiamo sostituire al foglio di carta rettangolare per ottenere un cilindro infinito (di altezza illimitata).

A questo punto il passo che dobbiamo compiere per ottenere il modello astratto di cilindro infinito è quello di sostituire al rettangolo una striscia di larghezza finita e altezza illimitata. L'operazione (concettuale) che dobbiamo ora compiere per "costruire" un cilindro infinito è quella di incollare i due lati paralleli della striscia (cioè di pensarli identificati).

Evidentemente, non è un salto concettualmente più impegnativo di quello che facciamo abitualmente con il piano euclideo pensato illimitato.

Esempio 3.1.5 *Cilindro infinito 1*

Un cilindro infinito si può "costruire" incollando il lati verticali di una striscia di altezza infinita.



Esempio 3.1.6 *Cilindro infinito 2* L'esempio precedente può essere generalizzato come segue. Consideriamo ancora una volta un foglio di carta sul quale disegniamo dieci strisce verticali. Incolliamo i bordi verticali e le nove rette che delimitano le strisce verticali.

Ora affrontiamo domande necessariamente astratte sul cilindro infinito.

Esercizio 3.1.9 Prendete un foglio di carta trasparente S e costruite un cilindro come descritto nell'esempio precedente.

- (a) Qual è la circonferenza di tale cilindro?
- (b) Determinare l'equazione della retta (sul foglio di carta) che, sul cilindro infinito, è rappresentata da una circonferenza perpendicolare all'asse del cilindro.
- (c) Come appare sul cilindro la retta di S di equazione $y = x$?
- (d) E la retta di equazione $y = mx$?
- (e) E la retta di equazione $y = mx + q$?
- (e) Discutete le possibili intersezioni tra le rette.

Modelli matematici**Esempio 3.1.7 Relazione di equivalenza per il cilindro finito**

Consideriamo il rettangolo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 20\}$. L'operazione di incollare i lati verticali opposti equivale all'operazione di identificare i punti che sono alla stessa altezza su i due lati. In altre parole diremo che due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ in R sono equivalenti se e solo se oppure $|x_1 - x_2| = 10k, y_1 = y_2$ con $k = 0, 1$.

Esercizio 3.1.10 Verificate che abbiamo definito una relazione di equivalenza su R .

Il cilindro finito è lo spazio quoziente R/\sim .

Esempio 3.1.8 Relazione di equivalenza per il cilindro infinito 1

In questo caso al posto del rettangolo, consideriamo la striscia

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 10\}.$$

Anche in questo caso diremo che due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ in S sono equivalenti se e solo se $|x_1 - x_2| = 10k, y_1 = y_2$ con $k = 0, 1$.

Il cilindro infinito è lo spazio quoziente S/\sim .

Esempio 3.1.9 Relazione di equivalenza per il cilindro infinito 2

Come abbiamo osservato nell'esempio del modello di carta dobbiamo fare attenzione a ciò che succede ai punti che non sono sulle rette verticali. Diremo che due punti $P_1 = (x, y_1)$ e $P_2 = (x, y_2)$ in S sono equivalenti se e solo se $|y_1 - y_2| = 5k, x = x_2$ con $k = 0, 1, 2$.

Il cilindro infinito è lo spazio quoziente S/\sim .

Esercizio 3.1.11 Verificate che abbiamo definito una relazione di equivalenza su S .

Esempio 3.1.10 Relazione di equivalenza per il cilindro infinito

3 In questo caso non pensiamo più a una singola striscia, ma a infinite strisce in \mathbb{R}^2 di ampiezza, diciamo, m . Due punti $P_1 = (x, y_1)$ e $P_2 = (x, y_2)$ in \mathbb{R}^2 sono equivalenti se e solo se $|y_1 - y_2| = mk, x = x_2$ con $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \mathbb{Z}$.

Il cilindro infinito è lo spazio quoziente \mathbb{R}^2/\sim .

Esempio 3.1.11 *Cilindro come superficie di rotazione* Il cilindro è la superficie che si ottiene facendo ruotare una retta r attorno ad una retta s parallela a r .

Esempio 3.1.12 *Equazione parametrica del cilindro* Scegliamo s come l'asse z nel riferimento cartesiano, e quindi r ha direzione $(0, 0, 1)$. Ne segue che la coordinate z dei punti sulla superficie cilindrica ha equazione $z = t$. Cosa possiamo dire delle equazione per le coordinate x, y ? Fissiamo un punto $P = (x, y, z)$ sul cilindro con $z = t_0$. Il piano $z = t_0$ (parallelo al piano xy) interseca il cilindro in una circonferenza. Quindi $x = r \cos \phi$ e $y = r \sin \phi$.

L'equazione parametrica del cilindro è quindi

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \\y &= r \sin \phi \\z &= t;\end{aligned}$$

con $\phi \in [0, 2\pi]$, $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.1.12 Scrivere l'equazione parametrica del cilindro di raggio 4 e di asse la retta $y = 0, z = 0$.

Esempio 3.1.13 *Equazione cartesiana del cilindro* Per ottenere l'equazione cartesiana del cilindro occorre eliminare i parametri ϕ e t presenti nell'equazione parametrica. La scelta da fare è obbligata: infatti, poiché $x = r \cos \phi$ e $y = r \sin \phi$ è sufficiente calcolare i quadrati $x^2 = r^2 \cos^2 \phi$ e $y^2 = r^2 \sin^2 \phi$ e sommarli. In tal modo per il cilindro che si ottiene ruotando la retta r di equazione parametrica $x = r, y = r, z = t$ attorno all'asse z ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$.

Esercizio 3.1.13 Scrivere l'equazione cartesiana del cilindro di raggio 2 e di asse la retta $x = 0, z = 0$.

Osservazione 3.1.1 Osserviamo che esiste una relazione tra la costruzione del cilindro attraverso la relazione di equivalenza definita in \mathbb{R}^2 e l'equazione parametrica. Più precisamente se vogliamo costruire un cilindro la cui circonferenza di base sia pari a l sappiamo che il raggio sarà pari a $\frac{l}{2\pi}$. D'altra parte l'ampiezza della striscia a che permette di costruire lo stesso cilindro è proprio uguale a l . Quindi si ha che la relazione tra il raggio del cilindro e

l'ampiezza della striscia è data da $r = \frac{a}{2\pi}$. Ancora, la relazione di equivalenza che identifica i punti che si trovano alla stessa altezza e a distanza a equivale al fatto che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π .

Osservazione 3.1.2 Esiste comunque una differenza fondamentale tra i due modelli di cilindro: il modello parametrico è una superficie in \mathbb{R}^3 mentre questo non è vero per il cilindro che costruito per identificazioni.

3.1.2 Curve sul cilindro

Le curve sulla superficie del cilindro, diversamente da quanto fatto sulla sfera, possono essere lette molto chiaramente in una rappresentazione piana.

Esercizio 3.1.14 (a) *Considerate una retta nel piano passante per l'origine. Qual è l'immagine di tale retta sul cilindro costruito attraverso la relazione di equivalenza definita su \mathbb{R}^2 nel caso in cui:*

1. la retta è verticale?
2. la retta è orizzontale?
3. la retta è obliqua?

(b) *Supponete ora di costruire un cilindro identificando i bordi di una striscia verticale di ampiezza 10. Alla luce dell'esercizio precedente conosciamo l'immagine delle rette in \mathbb{R}^2 . Quali curve nella striscia danno origine alla stessa immagine?*

Su di un cilindro infinito (considerate un modello di carta a vostra scelta) è disegnata una curva C di lunghezza infinita che gode della seguente proprietà: la distanza tra una qualunque coppia di punti consecutivi che appartengono sia ad una generica retta verticale sulla superficie del cilindro sia alla curva C è costante. Tale curva è detta *elica* e la distanza costante tra due punti consecutivi sulla stessa verticale è detta *passo* dell'elica (cfr. Equazioni parametriche delle curve in \mathbb{R}^3).

Esercizio 3.1.15 (a) *Disegnare un'elica su un cilindro finito.*

(b) *Quale oggetto disegnato su un foglio rettangolare dà luogo ad un'elica dopo aver incollato i bordi verticali del foglio?*

- (c) *Disegnare un'elica di passo 3 centimetri su un cilindro finito la cui circonferenza di base misuri 3 centimetri e la cui altezza misuri 30 centimetri.*
- (d) *Quale oggetto disegnato su un foglio rettangolare di base 3 centimetri e di altezza 30 centimetri da luogo ad un'elica di passo 3 centimetri dopo aver incollato i bordi verticali?*

3.1.3 Coordinate intrinseche

Dalla equazione parametrica del cilindro possiamo facilmente dedurre che un punto su questa superficie è completamente identificato dai valori dell'angolo che si forma tra la proiezione del punto sul piano xy e dal proiezione del punto sull'asse z .

Le coordinate intrinseche del cilindro sono quindi date dalla coppia (ϕ, t) con $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $t \in \mathbb{R}$.

Quindi i punti sul cilindro (superficie dello spazio tridimensionale xyz) vivono in una striscia del piano ϕ, t .

Esercizio 3.1.16 *Calcolate le coordinate in \mathbb{R}^3 dei punti:*

- (a) $P = (\frac{\pi}{2}, -10)$
- (b) $P = (\frac{\pi}{2}, 0)$
- (c) $P = (2, 10)$

Esercizio 3.1.17 *Considerate il cilindro costruito attraverso la relazione di equivalenza su \mathbb{R}^2 di dimensione $m = 10$.*

- (a) *Trovate il raggio del cilindro*
- (b) *Considerate i punto P, Q in \mathbb{R}^2 di coordinate, rispettivamente $P = (-10, 2)$, $Q = (2, -1)$. Quali sono le coordinate intrinseche di P e Q ? Soluzione: Osserviamo dapprima che la striscia su cui sono definite le coordinate intrinseche non è un sottoinsieme del piano xy . Dal momento che la differenza dei valori della coordinante X dei due punti è maggiore (in valore assoluto) della dimensione del cilindro, non possiamo rappresentarli entrambi nella stessa striscia. Ma a noi interessano i rappresentanti sul cilindro dei nostri punti, quindi cerchiamo due rappresentati per cui la differenza tra le coordinate x non sia maggiore*

della dimensione del cilindro. Possiamo, ad esempio, fissare il punto P e traslare il punto Q in $Q' = Q - (10, 0) = -2 = (-8, -1)$ e associare il valore 0 della coordinate ϕ al valore -10 della coordinate x . In tal caso $P = (0, 2)$. Per trovare le coordinate intrinseche di Q' osserviamo che il valore di ϕ del punto Q' si trova considerando la differenza tra le coordinate x del punto P (scelta come origine della coordinata ϕ) e del punto Q' . Occorre pertanto risolvere la proporzione

$$\frac{-8 - (-10)}{10} = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{1}{5} = \frac{\phi}{2\pi} \Rightarrow \phi = \frac{2}{5}\pi.$$

Quindi si ha $Q' = (\frac{2}{5}\pi, -1)$.

- (c) Trovate le coordinate intrinseche dei punti $P = (-2, -100)$, $Q = (2\pi, 12)$, $R = (10, 0)$.

Esercizio 3.1.18 Disegnare sul cilindro di equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 100$ le curve di equazione

- (a) $\phi = \text{costante}$.
 (b) $t = \text{costante}$.
 (c) $\phi = t$.
 (d) $\phi = 3t$.

Osservazione 3.1.3 E' importante notare che le curve dell'esercizio precedente sono tutte rette nel piano ϕ, t dove la variabile ϕ non è soggetta alla limitazione $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Per rappresentarle sul cilindro (cioè nella striscia $0 \leq \phi \leq 2\pi$ dobbiamo ricordare che le funzioni seno e coseno sono periodiche.

Esercizio 3.1.19 Calcolate la lunghezza delle seguenti curve

- (a) $\phi = \frac{\pi}{2}$, $-10 \leq t \leq 10$ sul cilindro di raggio 100. Soluzione: la curva $\phi = \phi_o$ è una retta di equazione parametrica

$$\begin{aligned} x &= 10 \cos \phi_o \\ y &= 10 \sin \phi_o \\ z &= t. \end{aligned}$$

In particolare se $\phi_o = \frac{\pi}{2}$ si ha

$$\begin{aligned}x &= 0 \\y &= 10 \\z &= t.\end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate delle coordinate

$$\begin{aligned}x' &= 0 \\y' &= 0 \\z' &= 1.\end{aligned}$$

Utilizzando (e non è necessario) la formula per la lunghezza d'arco si ha $l = \int_{-10}^{10} \sqrt{1} dt = [t]_{-10}^{10} = 20$.

(b) $\phi = \text{costante}$, $-10 \leq t \leq 10$ sul cilindro di raggio 10 .

(c) $t = 20$ costante $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$ sul cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 20$.
Soluzione: la curva ha equazione parametrica

$$\begin{aligned}x &= 10 \cos \phi \\y &= 10 \sin \phi \\z &= 20.\end{aligned}$$

(d) $t = \text{costante}$ $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$ sul cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 2$.

(e) $\phi = t$ con $-10 \leq t \leq 10$ sul cilindro di raggio 2 . Soluzione: la curva ha equazione parametrica

$$\begin{aligned}x &= 2 \cos t \\y &= 2 \sin t \\z &= t.\end{aligned}$$

Ancora una volta osserviamo che i parametri della curva non sono soggetti alle stesse limitazioni dei parametri della superficie.

(f) $\phi = 3t$ con $0 \leq t \leq 10$ sul cilindro di raggio 2

Esercizio 3.1.20 Sia C il cilindro di raggio $r = 4$. Calcolate la lunghezza delle curve tra i punti assegnati.

- (a) I punti sono in coordinate intrinseche $P = (0, -1)$, $Q = (0, -10)$ lungo la curva definita da $\phi = 0$, $-10 \leq t \leq -1$. Soluzione: la curva sul cilindro ha equazione parametrica $x = 1$; $y = 0$; $z = t$ con $-10 \leq t \leq -1$
- (b) I punti sono in coordinate intrinseche $P = (0, -1)$, $Q = (\pi, -4)$ lungo la curva $\pi t + 3\phi + 1$. Soluzione: la curva sul cilindro ha equazione parametrica $x = \cos \phi$; $y = \sin \phi$; $z = -\frac{3}{\pi}\phi - 1$.

3.1.4 Distanza sul cilindro

Vogliamo ora definire una distanza sul cilindro.

Osserviamo che, diversamente da quanto fatto per la sfera, non è necessario utilizzare il modello di cilindro come superficie immersa in \mathbb{R}^3 per definire la distanza tra due punti.

In realtà, utilizzando gli strumenti della geometria differenziale è possibile definire le geodesiche (cioè le curve di minore lunghezza tra due punti) attraverso le soluzioni di equazioni differenziali.

Ma per il cilindro abbiamo a disposizione un modello di cilindro costruito per mezzo di una relazione di equivalenza su \mathbb{R}^2 , cioè uno strumento matematico che formalizza l'operazione di incollare i bordi di un rettangolo (o di una striscia). Proviamo quindi a utilizzare questo modello per ottenere alcune indicazioni relative alle curve di minor lunghezza tra due punti sulla sfera.

Esercizio 3.1.21 *Sia S una striscia infinita in \mathbb{R}^2 . Ogni curva γ su S corrisponde ad una curva γ' sul modello di cilindro C ottenuto incollando i due lati di S . Dimostrare che le due curve hanno la stessa lunghezza. Suggestione: iniziate curvando la striscia S attorno ad un poligono. In questo caso abbiamo un poliedro infinito la cui base è il poligono. Comunque venga scelta una curva su S , essa ha dei pezzi che giacciono interamente su strisce piane, quindi la lunghezza della curva sul poliedro è la somma delle lunghezze delle curve piane. Se pensiamo di far crescere il numero dei lati del poligono, questo tenderà a una circonferenza e il poliedro a un cilindro.*

Esercizio 3.1.22 (a) *E' sempre vero che sul cilindro la distanza tra due punti è la stessa della distanza tra gli stessi punti sulla striscia? Pensate alla situazione in cui il primo punto sia vicino a uno dei due bordi della striscia e il secondo vicino all'altro bordo.*

- (b) Qual è la distanza tra due punti P_1 e P_2 sulla striscia che sono alla stessa altezza e tali che P_1 è sul bordo sinistro e P_2 è sul bordo destro? Qual è la loro distanza sul cilindro ottenuto incollando i bordi della striscia?

Seguendo lo spirito che ci ha guidato nel caso della geometria sferica, quello cioè di cercare attraverso esempi, evidenze per definire opportunamente una distanza, nei prossimi esercizi vogliamo mostrare che la distanza sul cilindro è euclidea, ma solo localmente. L'idea che ci guida è la seguente: se due punti sono su i bordi della striscia alla stessa altezza essi hanno distanza su \mathbb{R}^2 pari all'ampiezza della striscia mentre hanno distanza zero sul cilindro che si ottiene incollando i bordi della striscia. Questo nel caso particolare descritto dovrebbe essere abbastanza evidente e già da solo ci permette di concludere che la distanza sul cilindro non può essere quella euclidea.

Proviamo ora attraverso alcuni esercizi a verificare altre situazioni particolari, da cui prenderemo spunto per la definizione corretta di distanza sul cilindro.

Per costruire (definire) una distanza sul cilindro infinito C osserviamo che comunque scelti due punti P e Q essi sono contenuti in un cilindro finito. Quindi limitiamo la nostra attenzione al caso di cilindri finiti.

Sia $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 20\}$ e siano $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (5, 0)$ e $P_3 = (10, 0)$. Costruiamo il cilindro C identificando i segmenti verticali di R di ordinata $x = 0$ e $x = 10$.

Esercizio 3.1.23 (a) Qual è la loro distanza nel rettangolo? Qual è la loro distanza sul cilindro?

- (b) Sia b il segmento che rappresenta la base di R . Parametizziamo b come l'insieme dei punti $B(t)$ di coordinate $(t, 0)$ per $0 \leq t \leq 10$. Calcolate la distanza (come funzione di t) tra $B(t)$ e P_1 e tra $B(t)$ e P_3 .

Soluzione: $\text{dist}(P_1, B(t)) = \sqrt{t^2} = t$, $\text{dist}(P_3, B(t)) = \sqrt{(10-t)^2} = 10-t$

- (c) Verificate che $\text{dist}(P_1, B(t)) \geq \text{dist}(P_3, B(t))$ se e solo se $t \geq 5$
- (d) Considerate il punto $B(8)$ e la sua rappresentazione sul cilindro C . Quanti percorsi esistono sul cilindro che collegano P_1 a $B(8)$? Quali di questi possono essere rappresentati da segmenti sul rettangolo di partenza? Qual è il più breve tra questi percorsi?

Suggerimento: su C $P_1 = P_2$

- (e) Considerate il punto $B(5)$ e la sua rappresentazione sul cilindro ottenuto incollando i bordi del rettangolo. Quanti percorsi esistono sul cilindro che collegano P_1 a $B(5)$? Quali di questi possono essere rappresentati da segmenti sul rettangolo di partenza? Qual è il più breve tra questi percorsi?

Esercizio 3.1.24 Sia R il rettangolo definito in precedenza. Sia d il segmento che rappresenta la diagonale del rettangolo che unisce il vertice in basso a sinistra e il vertice in alto a destra. Parametizziamo d come l'insieme dei punti $D(t)$ di coordinate $(t, 2t)$ per $0 \leq t \leq 10$.

Calcolate come funzione di t la distanza tra P_1 e $D(t)$ e tra P_2 e $D(t)$

- (b) Calcolare la distanza tra i rispettivi punti sul cilindro costruito incollando i bordi del rettangolo.
- (c) Considerate il punto $D(8)$ e la sua rappresentazione sul cilindro ottenuto incollando i bordi del rettangolo. Quanti percorsi esistono sul cilindro che collegano O a $D(8)$? Quali di questi possono essere rappresentati da segmenti sul rettangolo di partenza? Qual è il più breve tra questi percorsi?
- (d) Considerate il punto $D(5)$ e la sua rappresentazione sul cilindro ottenuto incollando i bordi del rettangolo. Quanti percorsi esistono sul cilindro che collegano P_1 a $D(5)$? Quali di questi possono essere rappresentati da segmenti sul rettangolo di partenza? Qual è il più breve tra questi percorsi?

Esercizio 3.1.25 Sia R il rettangolo definito precedentemente. Sia $P_o = (x_o, y_o)$ un punto interno al rettangolo (i bordi verticali fanno parte del rettangolo). Verificate che

1. $d_1 = \text{dist}(P_o, P_1) = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$
2. $d_2 = \text{dist}(P_o, P_2) = \sqrt{(x_o - 10)^2 + y_o^2}$
3. $d_1 \leq d_2$ se e solo se $x \leq 5$

Proviamo ora a percorrere la strada inversa: partiamo cioè da punti sul cilindro e cerchiamo di studiare le distanze dei loro rappresentanti sul piano.

Esercizio 3.1.26 Considerate ora un cilindro la cui base misuri 10 centimetri e la cui altezza misuri 20 centimetri. Disegnate due punti sul cilindro. Pensate ora di utilizzare il cilindro come uno stampo e di passarlo su di un foglio di carta. Qual è l'immagine dei due punti se rotolate il cilindro una sola volta? Qual è l'immagine dei due punti se rotolate il cilindro due volte? E se lo rotolate 10 volte?

E' chiaro che l'operazione di utilizzare un cilindro come un rullo è l'inversa di quella di incollare i bordi di un rettangolo (se fatta una volta sola) oppure di incollare i bordi e un certo numero di segmenti verticali intermedi (se fatta più volte). Quindi attraverso l'operazione di *srotolamento* del cilindro si ottengono diverse rappresentazioni piane dello stesso spazio.

Esercizio 3.1.27 Utilizzando lo stesso cilindro degli esercizi precedenti considerate due punti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$. Costruite tre rappresentazioni piane del cilindro (cioè tre rettangoli $R_1, R_2, e R_3$) attraverso l'operazione descritta precedentemente ripetuta rispettivamente una, due e tre volte. Determinate le curve sul cilindro che

1. uniscono P_0 e P_1 ;
2. nella varie rappresentazioni piane del cilindro corrispondono a segmenti di retta (i segmenti possono essere spezzati).

Scrivete l'equazione delle rette corrispondenti.

Esercizio 3.1.28 Calcolate la distanza sui rettangoli R_1, R_2 e R_3 tra P_0 e P_1 .

Esercizio 3.1.29 Determinate la distanza sul cilindro tra P_0 e P_1 .

Esercizio 3.1.30 Come è possibile definire la distanza tra due punti sul cilindro?

Esercizio 3.1.31 Qual è la relazione tra il concetto di distanza e l'operazione di incollamento dei bordi della striscia?

Esercizio 3.1.32 C'è forse una contraddizione tra il fatto che la lunghezza di una curva non cambia se vista sulla striscia oppure sul cilindro ottenuto incollando i bordi della striscia?

A questo punto dovrebbe essere chiaro che dati due punti sul cilindro possiamo unire i loro diversi rappresentanti sul piano con differenti segmenti. Il nostro scopo è ora quello di calcolare il più corto tra questi segmenti. Questo equivale a trovare la distanza tra i due punti.

Veniamo ora al caso del cilindro infinito: fissiamo una striscia fondamentale di ampiezza m , ad esempio $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq m\}$.

Iniziamo fissando $m = 2$.

Esercizio 3.1.33 (a) *Quali sono le dimensioni del cilindro costruito attraverso la relazione di equivalenza definita per $m = 2$?*

- (b) *Considerate il segmento s che unisce i punti $P = (0, 1)$ e $Q = (1, 1)$. Qual è l'immagine di s sul cilindro?*
- (c) *Considerate il segmento s che unisce i punti $P = (0, 2)$ e $Q = (2, 2)$. Qual è l'immagine di s sul cilindro?*
- (d) *Considerate il segmento s che unisce i punti $P = (0, 3)$ e $Q = (3, 3)$. Qual è l'immagine di s sul cilindro?*
- (e) *Considerate il quadrato Q di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$. Qual è l'immagine di Q sul cilindro?*
- (f) *Considerate il quadrato Q di vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 0)$. Qual è l'immagine di Q sul cilindro?*
- (g) *Considerate il quadrato Q di vertici $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$, $(3, 0)$. Qual è l'immagine di Q sul cilindro?*
- (h) *Siano $P = (0, 2)$ e $Q = (2, 2)$ due punti in \mathbb{R}^2 . Qual è la loro distanza in \mathbb{R}^2 ? E sul cilindro ottenuto attraverso la relazione di equivalenza per $m = 2$?*
- (i) *Siano $P = (0, 3)$ e $Q = (3, 3)$ due punti in \mathbb{R}^2 . Qual è la loro distanza in \mathbb{R}^2 ? E sul cilindro ottenuto attraverso la relazione di equivalenza per $m = 2$?*

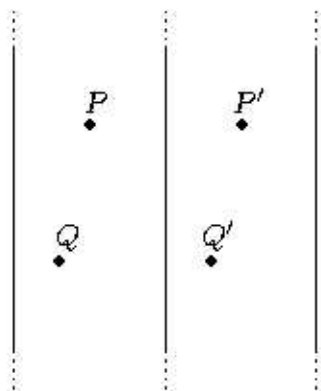
Sia C cilindro infinito ottenuto attraverso la relazione di equivalenza

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}x' &= x + km \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \\y' &= y.\end{aligned}$$

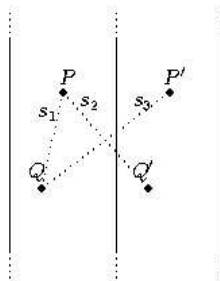
Quindi il nostro cilindro ha una circonferenza di base che misura m (diciamo centimetri).

Per calcolare la distanza tra due punti P e Q sul cilindro, dobbiamo rappresentare tali punti su almeno due strisce di larghezza m , ad esempio, $S_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{m}\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{m} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{2m}\}$.



Esercizio 3.1.34 Siano $P = (x_o, y_o)$ e $Q = (x_1, y_1)$. Verificate che i rappresentanti di P e Q in S_1 sono i punti di coordinate (x_o, y_o) e (x_1, y_1) rispettivamente e che i rappresentanti di P e Q in S_2 (cioè P' e Q') sono i punti di coordinate $(x_o + m, y_o)$ e $(x_1 + m, y_1)$.

Sia s_1 il segmento di retta che unisce due rappresentanti di P e Q che giacciono nella striscia S_1 e siano s_2 e s_3 i segmenti di retta che uniscono i rappresentanti di P e Q che giacciono in strisce adiacenti. In particolare s_2 unisce P con Q' mentre s_3 unisce P' e Q .



Non abbiamo considerato il segmento che unisce P' e Q' dal momento che evidentemente la sua lunghezza è uguale alla lunghezza del segmento che unisce P e Q .

Esercizio 3.1.35 *Scrivete le equazioni di s_1 , s_2 e s_3 .*

Possiamo quindi calcolare sul piano \mathbb{R}^2 la lunghezza dei tre segmenti s_1 , s_2 e s_3 . I punti P' e Q' sono solo diversi rappresentanti sul piano di P e Q , in altre parole sul cilindro C coincidono, la nostra distanza sul cilindro dovrà essere definita dunque in modo tale che $\text{dist}_C(P, Q) = \text{dist}_C(P, Q') = \text{dist}_C(P, Q')$.

Definizione 3.1.1 *Dati due punti P, Q sul cilindro definiamo la distanza $\text{dist}_C(P, Q)$ tra P e Q come il minimo valore di $\text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P, Q)$, $\text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P, Q')$, $\text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P, Q')$.*

Esercizio 3.1.36 *Calcolare la lunghezza di s_1 , s_2 e s_3 .*

Soluzione: Le lunghezze dei segmenti sono date dalla distanza euclidea. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P, Q) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P', Q) &= \sqrt{(x_1 + m - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P, Q') &= \sqrt{(x_1 - x_2 - m)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

La distanza tra P e Q sarà, a questo punto, il valore minimo di $l(s_1)$, $l(s_2)$ e $l(s_3)$.

Esercizio 3.1.37 *Determinate il valore minimo delle lunghezze di s_1 , s_2 e s_3 .*

Soluzione: Iniziamo confrontando $\text{dist}_{\mathbb{R}^2}^2(P, Q)$ e $\text{dist}_{\mathbb{R}^2}^2(P', Q)$

$$\begin{aligned} \frac{\text{dist}_{\mathbb{R}^2}^2(P, Q)}{\text{dist}_{\mathbb{R}^2}^2(P', Q)} &= \frac{(x_1 + m - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \frac{m^2 + 2m(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= 1 + \frac{m(m + 2(x_1 - x_2))}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &\geq 1 \quad \Leftrightarrow m \geq -2(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Veniamo ora al caso $\text{dist}_{\mathbb{R}^2}^2(P, Q)$ e $\text{dist}_{\mathbb{R}^2}^2(P, Q')$

$$\begin{aligned} \frac{\text{dist}_{\mathbb{R}^2}^2(P, Q)}{\text{dist}_{\mathbb{R}^2}^2(P, Q')} &= \frac{(x_1 - x_2 - m)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \frac{m^2 - 2m(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= 1 + \frac{m(m - 2(x_1 - x_2))}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &\geq 1 \quad \Leftrightarrow m \geq 2(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Per ultimo consideriamo il confronto tra $\text{dist}_{\mathbb{R}^2}^2(P, Q')$ e $\text{dist}_{\mathbb{R}^2}^2(P', Q)$

$$\begin{aligned} \frac{\text{dist}_{\mathbb{R}^2}^2(P', Q)}{\text{dist}_{\mathbb{R}^2}^2(P, Q')} &= \frac{(x_1 + m - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2 - m)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2 - m + 2m)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2 - m)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2 - m)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2 - m)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \frac{4m^2 + 4m(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2 - m)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= 1 + \frac{4m(m - (x_1 - x_2 - m))}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= 1 + \frac{4m(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &\geq 1 \quad \Leftrightarrow x_1 - x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Possiamo riassumere dicendo che se $|x_1 - x_2| \leq \frac{m}{2}$ allora

$$\text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P, Q) \leq \min\{\text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P', Q), \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P, Q')\}$$

e se $|x_1 - x_2| \geq \frac{m}{2}$ allora

$$\text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P', Q) \leq \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P, Q'), \} \Leftrightarrow x_1 \geq x_2,$$

in altre parole

$$\text{dist}_C(P, Q) = \begin{cases} \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P, Q) & \text{se } |x_1 - x_2| \leq \frac{m}{2} \\ \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P', Q) & \text{se } |x_1 - x_2| \geq \frac{m}{2}; x_1 \leq x_2 \\ \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P, Q') & \text{se } |x_1 - x_2| \geq \frac{m}{2}; x_1 \geq x_2 \end{cases}$$

Esercizio 3.1.38 *Cambia qualcosa prendendo altre due strisce consecutive?*

Possiamo spostare il problema cercando due rappresentanti che siano per cui la differenza tra i valori delle coordinate x sia minore della metà della circonferenza di base.

Esercizio 3.1.39 *Sia C il cilindro di raggio $r = 2$. Siano $P = (-2, 1)$ e $Q = (5, 2)$ punti sul piano xy . Calcolate la distanza tra P e Q sul C . Soluzione: la circonferenza del cilindro misura $4\pi \approx 12.56$. D'altra parte $|x_P - x_Q| = |-2 - 5| = |-7| = 7 > \frac{4\pi}{2} = 2\pi$. Quindi occorre trovare un altro rappresentante di uno tra P e Q . Trasliamo P in $P' = P + (4\pi, 1) = (4\pi - 2, 1)$. In questo caso si ha*

$$\text{dist}_C(P, Q) = \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P', Q) = \sqrt{(4\pi - 2 - 5)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{(4\pi - 7)^2 + 1}.$$

Analogamente, se avessimo traslato Q in $Q' = Q - (4\pi, 0) = (5 - 4\pi, 2)$, avremmo:

$$\text{dist}_C(P, Q) = \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(P, Q') = \sqrt{(-2 - (5 - 4\pi))^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{(4\pi - 7)^2 + 1}.$$

Distanza e coordinate intrinseche

Vogliamo ora calcolare la distanza tra due punti sul cilindro utilizzando le coordinate intrinseche dei punti.

Esercizio 3.1.40 (a) *Considerate un cilindro la cui base misuri 10 centimetri. Sia P un punto su C di coordinate $(\pi, 2)$. Determinate un punto P_1 su \mathbb{R}^2 la cui immagine nella relazione di equivalenza che definisce C corrisponde a P .*

(b) *Determinate tutti i punti P_n le cui immagini nella relazione di equivalenza che definisce il cilindro C corrispondono a P .*

Esercizio 3.1.41 (a) *Siano $P = (\pi, 2)$ e $Q = (\frac{\pi}{2}, -2)$. Calcolate la distanza su C tra P e Q .*

Soluzione: rappresentiamo i punti P e Q su una striscia di ampiezza 10. Le coordinate piane dei punti saranno $\tilde{P} = (5, 2)$ e $\tilde{Q} = (2.5, -2)$. Dal momento che $|5 - 2.5| = 2.5 < 5 = \frac{10}{2}$ sappiamo che $\text{dist}_C(P, Q) = \text{dist}_{\mathbb{R}^2}(\tilde{P}, \tilde{Q})$

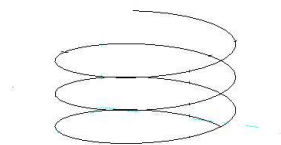
(b) *Siano $P = (\frac{\pi}{10}, 2)$ e $Q = (\frac{11\pi}{6}, -2)$. Calcolate la distanza su C tra P e Q .*

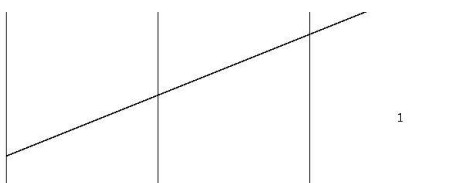
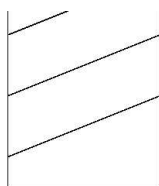
3.1.5 Intersezione di rette sul cilindro

Ora vogliamo discutere delle posizioni relative tra le rette sul cilindro. Il nostro riferimento è ciò che succede nel piano.

Cosa sono le “rette” sul cilindro? Dal momento che la distanza localmente è la distanza euclidea, allora (almeno localmente) le rette sul cilindro sono descritte dalle rette nel piano ϕ, t . In altre parole in un intorno (cioè su una porzione abbastanza piccola della superficie del cilindro) la curva più breve tra due punti è proprio l’immagine di un segmento in \mathbb{R}^2 . Quindi abbiamo che le rette sul cilindro possono essere descritte (localmente) da relazioni lineari nelle coordinate ϕ, t del tipo $A\phi + Bt + C = 0$.

Come ogni curva, le rette sul cilindro sono tracce delle curve in \mathbb{R}^2 lasciate dalla relazione di equivalenza. Per una retta generica di equazione $y = mx + q$ con $m \neq 0$ si ha tre possibili rappresentazioni:





Esercizio 3.1.42 Verificate le seguenti affermazioni (tutte vere):

le rette verticali sul cilindro hanno equazione $\phi = \text{costante}$.

(b) le rette orizzontali sul cilindro hanno equazione $t = \text{costante}$.

(c) le rette orizzontali sul cilindro hanno lunghezza finita.

(d) le rette orizzontali sul cilindro sono circonferenze.

(f) le rette di equazione $t = k\phi$ sono eliche di passo k

(g) Verificate che date due rette sul cilindro si hanno le seguenti possibilità:

1. non si intersecano
2. si intersecano una e una sola volta
3. si intersecano infinite volte.

(h) Disegnare (e dare la equazione in \mathbb{R}^2) coppie di rette che illustrano i tre casi.

(h) Sia C il cilindro infinito di raggio 2. Disegnate su \mathbb{R}^2 :

1. la retta di equazione $\phi = \pi$
2. la retta di equazione $t = 3$
3. la retta di equazione $t = 2\phi$

- (i) *Trovare le intersezioni (se esistono) su C delle curve $\phi = \pi$ e $t = 5$. E su \mathbb{R}^2 .*
- (l) *Trovare le intersezioni (se esistono) su C delle curve $\phi = 2t$ e $t = 5$. E su \mathbb{R}^2 .*
- (m) *Trovare le intersezioni (se esistono) su C delle curve $\phi = 2t$ e $\phi = 5$. E su \mathbb{R}^2 . Soluzione: una prima soluzione è certamente data da $(5, \frac{5}{2})$. Ovviamente ne esistono altre. Se consideriamo la curva $\phi = 5 + 2\pi$ nel piano ϕ, t questa ha immagine sul cilindro che coincide con l'immagine della curva $\phi = 5$. Quindi anche il punto $(5 + 2\pi, \frac{5+2\pi}{2}) = (5, \frac{5}{2} + \pi)$ è punto di intersezione.*
- (n) *Trovare le intersezioni (se esistono) su C delle curve $\phi = 2t$ e $\phi = 3t$. E su \mathbb{R}^2 . Soluzione: una prima soluzione è certamente data da $(0, 0)$. Per trovare altre eventuali soluzioni dobbiamo considerare i traslati di passo $2h\pi$ sulla prima curva e i traslati di passo $2k\pi$ sulla seconda e determinare i valori di h, k tali che i rispettivi valori di t coincidono. Cioè ci chiediamo per quali valori di h, k si ha $\frac{2h\pi}{2} = \frac{2k\pi}{3}$. In altri termini vogliamo trovare per quali valori di h, k si ha $\frac{h}{2} = \frac{k}{3}$. La soluzione è data da $h = \frac{2}{3}k$, quindi i punti del tipo $(0, 6k\pi)$ sono punti di intersezione tra le curve.*

3.1.6 Modelli fisico-matematici

Abbiamo dunque costruito “una” geometria, definendo le proprietà geometriche della superficie di un oggetto (il cilindro), e verificando che i punti sulla sua superficie e le loro distanze possono costituire gli assiomi di una geometria coerente. In particolare, la geometria così costruita coincide con la consueta geometria euclidea su aree limitate. Questa geometria del cilindro risulta ora utile a rappresentare relazioni spaziali, al di là di quelle che già di per sé si possono osservare direttamente sulla superficie di un cilindro. Useremo questa nuova geometria, cioè questo insieme di relazioni spaziali e di deduzioni che se ne possono rigorosamente trarre, per descrivere altre relazioni, a prescindere dalla natura iniziale degli elementi che le compongono.

Questo è certamente il nucleo fondante del passaggio agli “spazi astratti”: uno spazio astratto è uno spazio, nel senso moderno che in esso, prescindendo dalla natura degli elementi che lo costituiscono, siamo capaci di descrivere

relazioni stabilite dalla funzione di distanza tra essi. Aver abbandonato l'illusione di poter dire qualcosa sulla natura degli elementi ci permette, da una parte, di fare a meno di definizioni del tipo euclideo *un punto è ciò che non ha estensione*, (che non hanno mancato di lasciare generazioni di studenti con l'amaro in bocca), e dall'altra di ritenere invece come caratteristica fondante di una geometria (e di uno spazio) il concetto di *distanza* così come lo abbiamo formalizzato in precedenza, e le sue necessarie conseguenze.

Vediamo subito un esempio, in cui l'utilità di una tale rappresentazione sarà chiara.

La perla (pesante)

Immaginiamo una perla infilata in una circonferenza di filo metallico, che si mantiene verticale. Supponiamo che tra la perla e il filo metallico circolare non si sviluppi attrito, e che i movimenti della perla non trovino resistenza, neanche nell'aria. Lo scopo del problema è di descrivere i possibili movimenti della perla sotto la sola azione della forza di gravità.

Primo obiettivo è stabilire quali siano le quantità in gioco, quali di esse sono costanti e quali variabili all'interno del problema, e che campo di variabilità sia loro possibile. L'idea-chiave è di rappresentare geometricamente le possibili relazioni tra le sole quantità variabili nel tempo; l'insieme di queste variabili forma dunque il nostro spazio, in cui studiare da un punto di vista "qualitativo", cioè geometrico, quali siano le possibili traiettorie. Sfruttando la particolare configurazione dei vincoli a cui il sistema perla-circonferenza è sottoposto, riusciamo a trovare un numero *minimo* di tali variabili, da cui eventualmente ricostruire poi le posizioni del sistema nell'abituale spazio fisico tridimensionale.

È chiaro ad esempio, nel nostro caso, che la posizione della perla è completamente determinata da un angolo, ϕ come in figura, e che questa è una quantità $\phi(t)$ variabile nel tempo: è il movimento della perla. Stabiliamo di misurare quest'angolo a partire dalla verticale, ponendo $\phi = 0$ nella posizione più bassa, $\phi = \pi$ in quella più alta, e ϕ crescente in senso antiorario. Inoltre, per descrivere il suo moto ci serve sapere con quale velocità y la perla passa per una data posizione. Le due quantità sono indipendenti, nel senso che vogliamo studiare tutti i possibili moti della perla, e quindi tutte le possibili velocità con cui può passare per ogni posizione ϕ . La posizione ϕ è data da un angolo che evidentemente può assumere tutti i valori dell'intervallo $(0, 2\pi]$; di limitazione sull'angolo è la condizione di periodicità che identifica $\phi + 2k\pi = \phi, \forall k \in \mathbb{N}$. La variabile y essendo la velocità con cui la perla può passare per una data posizione, la sua variabilità non ha invece limitazioni, e

$y \in (-\infty, +\infty)$. Le variabili ϕ ed y variano dunque nello spazio che abbiamo chiamato “cilindro”: esso è caratterizzato, in ogni sua rappresentazione, da due variabili, una periodica, e l'altra illimitata.

Le altre quantità in gioco nel problema sono invece costanti, infatti: la perla è sottoposta ad accelerazione dovuta alla forza di gravità, che è dunque una costante del problema. Il raggio della circonferenza è necessario per determinare l'effettiva posizione della perla nello spazio fisico tridimensionale, ma la sua lunghezza è anch'essa una costante del problema.

Vogliamo rappresentare geometricamente le possibili relazioni tra le sole quantità variabili nel tempo, nel nostro caso ϕ e y ; questo stabilisce il nostro spazio, che in questo caso è dunque un cilindro, in cui studiare da un punto di vista “qualitativo”, cioè geometrico, quali siano le possibili traiettorie $(\phi(t), y(t))$. Ogni punto (ϕ, y) del cilindro rappresenta uno “stato” della perla, caratterizzato dalla sua posizione sulla circonferenza, e dalla velocità in cui la sta percorrendo; inoltre, da ogni punto passa una ed una sola traiettoria. Tralasciamo, in questo contesto, la dimostrazione di questo fatto, che segue dal Teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali; esso ha come conseguenza che, essendoci una sola traiettoria in ogni punto, in particolare due traiettorie non possono intersecarsi nello spazio (ϕ, y) , né può una traiettoria intersecare se stessa.

Tra le rappresentazioni del cilindro, scegliamo quella del cilindro “srotolato” su tutto il piano. Questa rappresentazione permette immediatamente di distinguere tra due tipi qualitativamente diversi di possibili traiettorie: alcune sono linee chiuse, altre no, e vi è una chiara organizzazione geometrica dei due tipi. La rappresentazione sul cilindro ci permette non solo questa chiarezza visiva, ma di dimostrare che necessariamente esistono speciali traiettorie che non sono né chiuse né aperte, la cui esistenza ed interpretazione sono decisamente controintuitive, mentre divengono chiare con questa rappresentazione.

Vi sono in realtà 4 tipi di traiettorie, ognuna corrispondente ad una effettiva possibile traiettoria della perla.

Se la perla si trova in una qualche posizione ϕ con velocità nulla, il punto corrispondente si trova sull'asse orizzontale, $y = 0$.

Le posizioni di equilibrio: $\phi = 0$ è la posizione più bassa sulla circonferenza, quindi se la perla vi si trova a velocità nulla, evidentemente rimane in equilibrio, cioè il punto di coordinate $(0, 0)$ e tutti i suoi equivalenti $(2k\pi, 0)$ sono punti di equilibrio. Analogamente $\phi = \pi$ è la posizione più alta sulla circonferenza, e se la perla vi si trova a velocità nulla, rimane in equilibrio.

Di nuovo, il punto $(\pi, 0)$ e tutti i suoi equivalenti $(\pi + 2k\pi, 0)$ sono punti di equilibrio. Infatti, in figura, nessuna curva esce da questi punti: sono essi stessi una possibile traiettoria.

Le traiettorie chiuse: Se la perla parte a velocità nulla da una certa altezza, sotto azione della forza di gravità, essa scenderà verso il basso, acquistando velocità man mano che scende, ed arrivando dunque nel punto più basso della circonferenza con una certa velocità. La perla supera il punto più basso, risalendo la circonferenza, e mentre risale perde velocità, sempre sotto l'azione della gravità, e dunque raggiunge a velocità nulla la posizione alla stessa altezza di quella in cui è partita, ma dal lato opposto sulla circonferenza. Da questa posizione, sotto azione della gravità scende di nuovo acquistando velocità, superando la posizione più bassa e risalendo sul lato opposto, perdendo velocità, finché non raggiunge con velocità nulla il punto da cui era partita. E riscende, poi...: questa traiettoria, chiusa, è una traiettoria periodica, che corrisponde al movimento della perla che oscilla su e giù lungo il filo metallico. Questi movimenti oscillanti corrispondono alle traiettorie chiuse in Fig 2.2: la perla percorre sempre una traiettoria venendosi a trovare, ad un qualche istante in una posizione a velocità nulla, e questa posizione determina l'ampiezza massima dell'oscillazione.

Le traiettorie aperte: Supponiamo che la perla parta dalla posizione più alta sulla circonferenza, con una velocità non nulla. In questo caso, essa scende, acquistando ulteriore velocità, e raggiunge dunque di nuovo la posizione più alta con la stessa velocità (non nulla) con cui era partita, e dunque la supera nella stessa direzione. La perla gira attorno alla circonferenza di filo metallico senza cambiare mai direzione. Le relative traiettorie sono rappresentate in Fig.2.2 dalle curve nella fascia superiore ed inferiore dello spazio: esse incontrano tutte l'asse verticale $\phi = \pi$, ad altezza non nulla.

Le curve separatrici, o traiettorie "omocliniche": Ora, con un argomento di continuità, dimostriamo l'esistenza dell'ultimo tipo di traiettorie. Tutte le traiettorie che intersecano l'asse orizzontale sono curve chiuse, che circuitano attorno ai punti di equilibrio $(0, 0)$ e ai loro equivalenti. Ogni famiglia è separata da un'altra, ad essa equivalente nella geometria del cilindro, dal punto di equilibrio $(\pi, 0)$ e dai suoi equivalenti. Ogni traiettoria che interseca l'asse verticale $\phi = \pi$ ad una certa altezza non nulla, non oltrepassa questa distanza verticale. Queste traiettorie riempiono lo spazio attorno al punto di equilibrio $(\pi, 0)$, e sono separate, all'intersezione degli assi, dal punto di equilibrio stesso, e in un suo intorno da una curva che per continuità non può che collegare il punto $(\pi, 0)$ ai suoi equivalenti immediatamente a

destra e a sinistra, $(\pi - 2\pi, 0)$ e $(\pi + 2\pi, 0)$. Questa curva è una traiettoria, perché viene percorsa a velocità non nulla, ma costantemente decrescente. Essa descrive il moto della perla che si muove verso la posizione di equilibrio alta, con velocità sufficiente a non fermarsi prima di raggiungerla, ma non sufficiente a superarla. La perla si muove verso la posizione di equilibrio alta, perdendo dunque velocità, e impiegando un tempo infinito a raggiungerla. Una curva di questo tipo, si chiama “separatrice” per ovvi motivi geometrici, perché separa zone dello spazio caratterizzate da traiettorie di diversa natura, o anche “omoclinica”, perché lungo essa si entra e si esce (asintoticamente, in un tempo infinito) dallo stesso punto di equilibrio, e dunque il moto ‘inclinato’ verso la stessa posizione da cui è uscito.