

NOME: _____ COGNOME: _____ MATRICOLA: _____

Attenzione: Svolgere i seguenti esercizi, utilizzando il retro dei fogli per i conti.
Non usare altri fogli. Riportare le risposte negli spazi.

Esercizio 1. Date le seguenti tre rette di equazioni

$$r : \begin{cases} x = \frac{1}{4}(t-1) \\ y = t+1 \\ z = -t-1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2(t+1) \\ y = t \\ z = 3t+1 \end{cases} \quad q : \begin{cases} x = t+2 \\ y = 4t \\ z = -4t+1 \end{cases}$$

(i) Stabilirne la mutua posizione, ovvero quali coppie sono parallele, quali incidenti, quali sghembe.

(ii) Scrivere l'equazione del piano Π che contiene le rette s e q .

(iii) Calcolare la distanza del punto $r(0)$ dal piano Π .

1

2

3

4

5

6

Esercizio 2. Data la superficie quadrica di equazione

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - z^2 = \frac{1}{4},$$

(i) tracciarne uno schizzo in \mathbf{R}^3 .

(ii) Una superficie quadrica ha le seguenti intersezioni con i piani coordinati:
con il piano $z = 0$ la curva $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, con il piano $y = 0$ la curva $x^2 + 4z^2 - 1 = 0$.

- Scrivere l'equazione della quadrica,
- Dire di che tipo di quadrica si tratta.
- Tracciarne uno schizzo in \mathbf{R}^3 .

Esercizio 3. Sia T la regione del piano \mathbf{R}^2 delimitata dalle curve $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 1$,

(i) Tracciare uno schizzo di T .

(ii) Scrivere T come dominio verticalmente semplice (y -semplice).

(iii) Impostare l'integrale $\int \int_T \frac{y+1}{\sqrt{x}} dx dy$ come integrale iterato;

(iv) Calcolarlo.

Esercizio 4. Data la curva parametrica

$$\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = 2\cos(t) \\ z(t) = \sin(6t) \end{cases}$$

(i) Verificare che il punto $P = (0, 2, 0)$ appartiene alla curva;

(ii) Calcolare il versore tangente nel punto P di cui sopra;

(iii) Che relazione c'è tra questa curva e la quadrica $1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$

Esercizio 5. Data la funzione di due variabili:

$$f(x, y) = 2xye^{y-x}$$

(i) Calcolare $\nabla f(x, y)$;

(ii) Trovare i punti critici.

(iii) Studiare la natura dei punti critici attraverso la matrice Hessiana.

(iv) Calcolare la derivata direzionale $D_{\underline{v}}f(x_0, y_0)$ nella direzione $\underline{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, nel punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

Esercizio 6. Un edificio ha come base la parte di piano, A , limitata, compresa tra le curve di equazione

$$y = x^2 - 5, \quad y = \frac{3}{5}x^2 - 3.$$

(i) Disegnare il dominio A (base dell'edificio) ;

(ii) Scrivere A come y - semplice;

(iii) I confini curvi della base si intersecano in due punti P e Q . Scrivere le coordinate di P e Q .

(iv) La copertura dell'edificio é una porzione di piano. Questa copertura é alta 10 metri sopra entrambi i punti P e Q . Il tetto poi scende con pendenza a 45° .

- Fare uno schizzo della situazione;

- Scrivere l'equazione del piano di giacitura della copertura;

(v) Calcolare il volume dell'edificio:

- impostare il volume come integrale doppio

- calcolarlo.