

DUE FORMULAZIONI EQUIVALENTI PER IL PRODOTTO SCALARE

LAURA TEDESCHINI LALLI

Come sappiamo un vettore resta definito in modo equivalente o dalle sue coordinate, (nel caso sia in R^3 , da una terna ordinata di numeri reali), oppure da modulo, direzione e verso. La seconda formulazione in genere facilita l'immaginazione corretta e la sua interpretazione geometrica; la prima certamente facilita il trattamento da parte di un computer, per esempio. Dunque rimane fondamentale conoscerle entrambe e saper praticare le loro equivalenze. Qua parliamo della sola equivalenza delle formulazioni per il prodotto scalare di due vettori.

0.1. La legge dei coseni. La legge dei coseni serve a discutere qualunque triangolo. Sembra una generalizzazione del Teorema di Pitagora, ma attenzione: non lo contiene come caso particolare, almeno finché, come faremo noi, ne dipende perché lo usiamo per dimostrarla. A noi serve, in particolare, per dimostrare l'equivalenza tra le due formulazioni del prodotto scalare tra vettori.

Legge dei coseni:

dato un triangolo ABC , chiamiamo a, b, c , rispettivamente, la misura dei lati opposti al vertice con la stessa lettera maiuscola. Allora si ha:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cos \hat{A}$$

dove con $\cos \hat{A}$ abbiamo indicato il coseno dell'angolo nel vertice A.

Dimostrazione:

Tracciamo il triangolo come in figura. Se tiriamo l'altezza h relativa ad uno dei lati adiacenti ad A, ad esempio AB , di lunghezza c , essa lo divide in due porzioni $c - x$ ed x . Osserviamo anche che, per definizione di coseno, abbiamo

$$x = b \cos \hat{A}$$

Per ciascuno dei due triangoli rettangoli che rimangono definiti, abbiamo, per il Teorema di Pitagora :

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + x^2 \\ a^2 &= h^2 + (c - x)^2 \end{aligned}$$

dalla prima abbiamo $h^2 = b^2 - x^2$ che possiamo sostituire nella seconda ottenendo:

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$

e ricordando il valore di x abbiamo quello che cercavamo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

0.2. **Prodotto scalare.** Dati due vettori $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vogliamo dimostrare che

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \cos \theta$$

con θ l'angolo compreso tra i due vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 .

Applichiamo i due vettori in uno stesso punto; otteniamo così un triangolo con lati che misurano $\|\mathbf{v}_1\|$, $\|\mathbf{v}_2\|$, $\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|$. Evidentemente il lato di misura $\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|$ si trova opposto all'angolo θ . Per la legge dei coseni applicata a questo triangolo

$$\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 - 2\cos\theta$$

Sviluppando questi moduli in coordinate, avremo rispettivamente:

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$\|\mathbf{v}_2\|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

$$\|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2y_1 y_2 - 2z_1 z_2$$

che, sostituiti nell'equazione precedente, ottengono il risultato richiesto.