Problema

A Manhattan una persona è uccisa mentre si trova affacciata alla finestra del proprio palazzo (facciata Nord) da un colpo di pistola proveniente dal (la facciata Sud del) parallelo palazzo di fronte situato ad una distanza $d = 50$ m. Le due facciate in questione danno sulla W 23 Street. I due palazzi si trovano all'incrocio tra la W 23th Street e la 6th Avenue, dove è situata la fermata della metropolitana St 23. Si può visualizzare il luogo su google maps a questo link.

La finestra della vittima si trova ad una distanza di 20 m dal bordo destro del palazzo (6th Avenue) e ad un'altezza di 10 m.

La polizia scientifica rileva che il colpo ha provocato un buco in un telo trasparente posto a metà tra i due palazzi. Il foro si trova a 25 metri dalla 6th Avenue e ad un'altezza di 12 m.

Si risponda alle seguenti domande impostando un modello per il problema usando le nozioni di rette e piani nello spazio e di operazioni tra vettori.

1. A quale distanza dalla 6th Avenue e da quale altezza è partito il colpo?

2. Se il sospettato aveva avuto una disputa con una persona che abita 3 m sotto la vittima (e quindi probabilmente voleva uccidere la prima) di quale angolo probabilmente ha sbagliato mira?

Soluzione

1. Il colpo è partito da a una distanza di 30 m dalla 6th Avenue e da un'altezza di 14 m.

2. L'angolo di errore è $\arccos(\frac{1314}{\sqrt{654}\sqrt{2649}})$, che risolve l'esercizio. Con una calcolatrice si potrebbe (ma non serve ai fini dell'esame) verificare di che l'angolo è di 0.0583 Rad ovvero di circa 3.3°.

Un possibile svolgimento

Una delle infinite possibili (ma ovviamente non la più scomoda...) parametrizzazioni[1] del problema è la seguente.

Si pone l'origine degli assi di riferimento nello spigolo tra la facciata da cui parte il colpo e la 6th Av, l'asse x nella direzione Sud, l'asse y nella direzione Est e l'asse z verso l'alto. La facciata del palazzo da cui parte il colpo giace nel il piano di equazione $x = 0$, mentre quella del palazzo della vittima è compresa nel piano di equazione $x = 50$.

A questo punto le coordinate del punto A in cui si trovava la vittima sono

$$A \doteq (50, 20, 12) \ , \tag{1}$$

mentre quelle del punto B in cui si è riscontrato un foro nel telo sono

$$B \doteq (25, 25, 12) \ . \tag{2}$$

Possiamo quindi scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per i punti A e B. Infatti questa passa per esempio per il punto B ed ha come direzione quella del vettore che congiunge A e B.

$$\vec{BA} = \vec{B} - \vec{A} \doteq (25, -5, -2) \ ; \tag{3}$$

$$r(t) = \vec{B} + (\vec{A} - \vec{B})t \doteq \begin{pmatrix} 25(1+t) \\ 5(5-t) \\ 2(6-t) \end{pmatrix} \ . \tag{4}$$

Il punto C da cui è partito il colpo si trova imponendo che questo appartenga alla retta e al piano $x = 0$. Si scrive quindi l'equazione della retta e la si trova il valore t^* del parametro per cui la la coordinata x di questa è $=0$. Si inserisce poi il valore trovato per t^* nell'equazione della retta per trovare le coordinate di C lungo gli assi y e z.

$$r(t^*) \doteq (0, C_y, C_z) \ \Rightarrow \ t^* = -1 \ \Rightarrow \ C \doteq (0, 30, 14) \ . \tag{5}$$

Per trovare l'angolo di errore bisogna trovare l'equazioni della retta che descrive la traiettoria voluta dall'assassino per cui si ripercorre il procedimento appena descritto sostituendo però al punto A in cui si trova la vittima quello $\tilde{A}$ in cui si trova la vittima ideale e avente coordinate

$$\vec{\tilde{A}} \doteq (50, 20, 7) \ . \tag{6}$$

[1]Si noti che, quando un vettore è espresso in coordinate, è stato espressamente usato il simbolo $\doteq$, al posto di $=$, proprio per enfatizzare che questa è una delle possibili rappresentazioni dovuta ad una delle possibili scelte del sistema di riferimento.

e si scrive l'equzione della retta passante per $vecC$ e $vec\tilde{A}$ Quindi

$$\vec{C\tilde{A}} = \vec{\tilde{A}} - \tilde{C} \doteq (50, -10, -7)\ ; \tag{7}$$

$$\tilde{r}(t) = \vec{C} + (\vec{\tilde{A}} - \vec{C})t \doteq \begin{pmatrix} 50t \\ 10(3-t) \\ 7(2-t) \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Ora il prodotto scalare tra i vettori direzione delle due rette ci dà il coseno dell'angolo θ compreso tra queste moltiplicato per la norma dei due vettori direzione:

$$\vec{BA} \cdot \vec{C\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 25 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ -10 \\ -7 \end{pmatrix} = 1250 + 50 + 14 = 1314\ . \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \left|\vec{BA}\right| &= \sqrt{625 + 25 + 4} = \sqrt{654}\ , \\ \left|\vec{C\tilde{A}}\right| &= \sqrt{2500 + 100 + 49} = \sqrt{2649}\ . \end{aligned} \tag{10}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{C\tilde{A}}}{\left|\vec{BA}\right| \left|\vec{B\tilde{A}}\right|} = \frac{1314}{\sqrt{654}\sqrt{2649}} \tag{11}$$

e

$$\theta = \arccos(\cos\theta)\ . \tag{12}$$