Cupole geodetiche e Fullerene

14 dicembre 2011

Una cupola geodetica è una struttura semisferica composta da aste che si intersecano in triangoli. Dal punto di vista matematico possiamo definire cupola geodetica un tipo di triangolazione della sfera: in particolare tra tutte le divisioni in triangoli di una superificie sferica, si chiamano "geodetiche" quelle in cui i lati dei triangoli giacciono sui cerchi massimi della sfera. Come abbiamo visto i cerchi massimi sono cammini "geodetici" sulla sfera, e svolgono dunque un ruolo fondamentale per la misura delle distanze(cap. La Sfera). Da un punto di vista matematico le cupole con vertici di grado 5 e 6 [1] hanno una simmetria icosaedrica; questa simmetria è presente anche in natura (ad esempio, alcune molecole di virus hanno la forma di piccole cupole geodetiche).

1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 1.1 *Un fullerene è un poliedro topologicamente semplice, che ha facce pentagonali ed esagonali, e tutti i vertici di grado* 3

Definizione 1.2 *Una cupola geodetica è il duale topologico di un fullerene. In particolare, ha vertici di grado* 5 *e* 6*, e tutte facce triangolari.*

N.B. Non è stata imposta alcuna condizione di simmetria. Il fatto che le cupole geodetiche costruite siano in genere somiglianti ad una sfera anche dal punto di vista delle simmetrie, è una richiesta ulteriore che indagheremo più in là. Del resto per costruire cupole geodetiche, la scelta della simmetria su cui basarsi non è banale. Si parte da un poliedro simmetrico, e se ne ottengono triangolazioni (non regolari) che mantengano le sue simmetrie.

Teorema 1.1 *Un fullerene ha esattamente 12 facce pentagonali.*

(Commento: ne segue che una cupola geodetica ha esattamente 12 vertici di grado 5.)
Dimostrazione

Essendo il poliedro semplice, è valida la formula di Eulero:

$$V - S + F = 2$$

dove, come sempre, V è il numero dei vertici del poliedro, F il numero delle sue facce, S il numero degli spigoli.

[1] in altre parole le cupole che abbiano solo vertici da cui partono 5 o 6 spigoli

Il fullerene ha solo facce pentagonali ed esagonali, e siamo interessati al numero di facce pentagonali. Dunque annotiamo F_6 per il numero di facce esagonali ed F_5 per il numero di facce pentagonali.

Osservazioni:

- ogni vertice ha grado 3, cioè vi concorrono 3 spigoli ; del resto ogni spigolo è limitato da due vertici, quindi contando tutti gli S spigoli abbiamo contato 3 volte i vertici, ma poi dobbiamo dividere per 2:

$$3V = 2S.$$

- ogni spigolo è comune a 2 facce, dunque se contiamo gli spigoli faccia per faccia, e poi sommiamo sulle facce, li contiamo tutti 2 volte:

$$6F_6 + 5F_5 = 2S.$$

Da queste osservazioni eliminiamo senz'altro il numero degli spigoli, ottenendo

$$3V = 6F_6 + 5F_5.$$

Moltiplichiamo per 6 la formula di Eulero:

$$6V - 6S + 6F = 12$$

in cui $F = F_6 + F_5$ e dunque

$$6V - 6S + 6(F_6 + F_5) = 12$$

che possiamo anche scrivere

$$6V - 6S + (6F_6 + 5F_5) + F_5 = 12.$$

Inserendo in questa uguaglianza quella ottenuta subito prima ed eliminando anche qui il numero degli spigoli, che conosciamo in funzione delle altre due quantitá, abbiamo:

$$6V = 2(6F_6 + 5F_5)$$
$$6S = 3(6F_6 + 5F_5)$$

dunque

$$6V - 6S = -(6F_6 + 5F_5)$$

e sostituendo

$$-(6F_6 + 5F_5) + (6F_6 + 5F_5) + F_5 = 12$$

cioè appunto

$$F_5 = 12$$

come volevamo dimostrare.

Osservazione 1.1 Il numero delle facce esagonali in un fullerene può variare, ma non in modo del tutto arbitrario. Nella formula di Eulero sostituiamo 12 al posto di F_5, e, usando le relazioni tra spigoli, facce e vertici, si ha:

$$V - \frac{1}{2}(60 + 6F_6) + F_6 + 10 = 0 \ \Leftrightarrow 2V - 4F_6 - 60 + 20 = 0,$$

da cui $2F_6 = V - 20$.

Osservazione 1.2 Un pallone da calcio è un fullerene, composto da pentagoni ed esagoni *regolari* e tutti uguali tra loro. Il pallone da calcio è chiamato C_{60} in chimica, dal numero di atomi di carbonio, disposti sui vertici, che compongono la molecola. E' il più piccolo fullerene.

Volendone costruire uno più grande:
- se vogliamo mantenere le facce regolari, possiamo solo aumentare la misura del lato, che è comune a tutti i poligoni che lo compongono;
- possiamo inserire più esagoni, di diverso lato, e in ogni caso il numero di pentagoni rimarrà necessariamente immutato.

Esercizio 1.1 *Tra tutti i fullereni con un numero di facce maggiore di quelle del pallone da calcio, quanti esagoni ha il più piccolo? In altre parole dopo il C_{60} che fullerene c'è?*

Per dualità possiamo trasferire queste proprietà sulle cupole geodetiche: una cupola geodetica ha esattamente 12 vertici di grado 5; può non avere alcun vertice di grado 6, in questo caso la cupola è un icosaedro regolare o meno. Se visono vertici di grado 6 evidentemente il loro numero soddisfa:

$$2V_6 = F - 20.$$

1.1 Classificazione delle cupole

I biologi molecolari Caspar e Klug all'inizio degli anni 60 si resero conto, attraverso osservazioni al microscopio, che molte molecole virali presentavano una simmetria icosaedrica. In particolare capirono che i virus di forma "sferica" avevano simmetria tetraedrale, ottaedrale, e nella maggior parte icosaedrale e procedettero ad una classificazione di queste ultime. Vedremo che sorprendentemente ne esistono solo tre tipi.

In quello stesso periodo B. Fuller lavorava a comporre e progettare alle cupole geodetiche icosaedriche. Ne sguirono numerosi studi. Procediamo a classificare matematicamente le cupole geodetiche a simmetria icosaedrica.

1.1.1 Diverse triangolazioni e diverse cupole

Il procedimento di triangolazione e poi di classificazione può essere pensato nel seguente modo. Si consideri, sul piano, un reticolo di triangoli equilateri. Vogliamo *avvolgere* questo reticolo su un icosaedro regolare, tagliando via degli interi triangoli per consentire le piegature nello spazio tridimensionale.

E' necessario che sui 12 vertici dell'icosaedro finale vadano a coincidere 12 dei molti vertici della tassellazione. O meglio: il vettore che unisce due vertici adiacenti dell'icosaedro (pensato sviluppato sul piano) deve essere un vettore di traslazione del reticolo, o una combinazione lineare di due dei vettori minimi di traslazione. I 12 vertici dell'icosaedro saranno alla fine proprio i vertici di grado 5 della cupola geodetica.

Prendiamo in considerazione, come in figura 1,una triangolazione piana: nel punto A mettiamo l'origine del nostro sistema di riferimento, il triangolo ABC appartiene all'icosaedro finale. Le coordinate $(b, c) = (3, 2)$ del vettore che unisce i due vertici (adiacenti) A e B dell'icosaedro, definiscono completamente la triangolazione icosaedrica. Infatti i vertici sono tutti equivalenti per simmetria, quindi questa costruzione può essere ripetuta su ognuno dei 12 vertici. Queste due "coordinate" definiscono la *frequenza* della cupola geodetica.

I numeri (b, c) possono essere scelti ad arbitrio, ma una volta scelti la cupola geodetica che si viene a formare rientra in una delle tre elencate dalla classificazione.

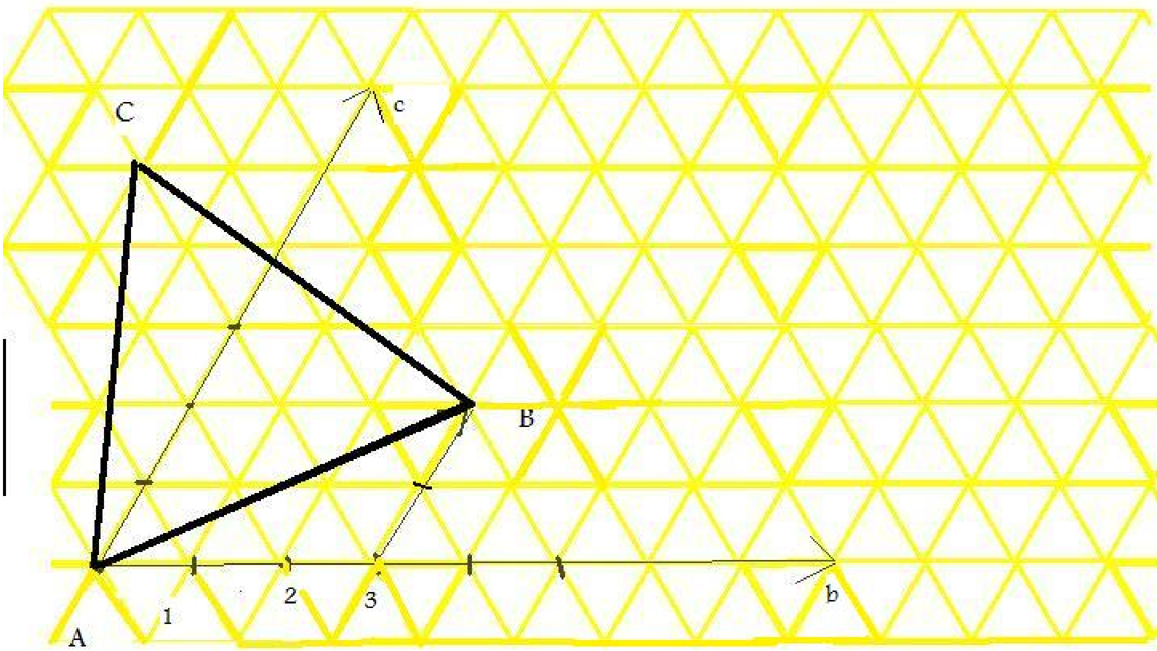

Figura 1: I punti A e B sono vertici dell'icosaedro, il vettore che li unisce ha coordinate $(3, 2)$ nel sistema di riferimento del reticolo

I casi possibili sono tre e sono illustrati in figura 2:

(1) $b = 0,\ c > 0$

(2) $b = c > 0$

(3) $b > c > 0$

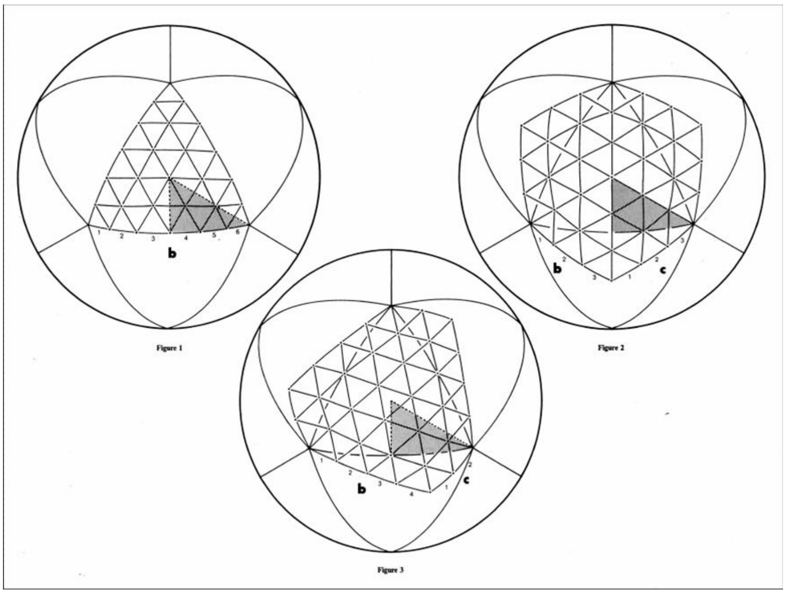

Figura 2: Le tre possibili cupole geodetiche

I numeri $T = (b^2 + bc + c^2)$ detti *triangulation numbers* ([1]), forniscono il numero di triangoli per ogni faccia dell'icosaedro. Il numero totale di triangoli presenti nella cupola così costruita sarà dunque $20T$.

........." *Quando Fuller crea una cupola geodetica suddivide uno dei* 20 *triangoli di un icosaedro in tanti triangoli equilateri, seguendo un pattern. Ripete poi il pattern su ogni faccia e lo trasferisce poi sulla sfera circoscritta con una proiezione centrale....* "(Coxeter, "Virus, macromolecules and geodesic domes").

In figura 3 vediamo lo sviluppo piano di un icosaedro, con una triangolazione di frequenza $(1, 2)$.

Ripetendo il pattern su tutto lo sviluppo dell'icosaedro, ricomponendo poi il solido e infine proiettando lo schema sulla sfera circoscritta, si ottiene una cupola geodetica, di frequenza $(1, 2)$.

La notazione di Schlafli di un poliedro regolare ha la forma $\{p, q\}$ e segnala che le sue facce sono p-agoni e in ogni suo vertice incidono q facce. L'icosaedro è $\{3, 5\}$, il dodecaedro è $\{5, 3\}$, infatti sono duali, vertici e facce si invertono nei loro rispettivi ruoli. Quindi al tetraedro è associata la coppia $\{3, 3\}$, a cubo e ottaedro associamo rispettivamente $\{4, 3\}$ e $\{3, 4\}$. Per classificare una cupola geodetica, servono gli altri due parametri, descritti sopra, che abbiamo chiamato (b, c) e che usualmente vengono posti come pedici nella notazione di Schlafli dell'icosaedro:

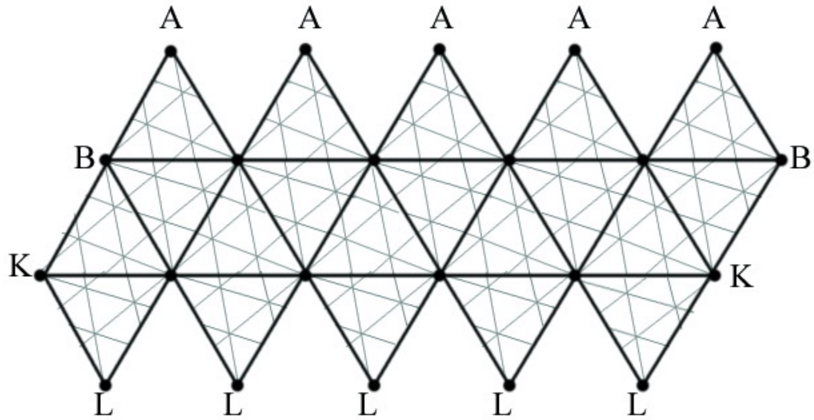

Figura 3: Creazione di un pattern sullo sviluppo piano di un icosaedro

$$\{3,5\}_{(b,c)}$$

questa è la notazione introdotta da Coxeter ([2]) per classificare le cupole geodetiche in base alla frequenza (figura 2).

Ricapitolando: la frequenza (b, c) indica che, volendo andare da un vertice dell'icosaedro ad un altro adiacente, procedendo sugli spigoli della tassellazione, dovremo percorrere b spigoli in una direzione, poi cambiare la direzione di 60 gradi e fare altri c passi.(figura 4)

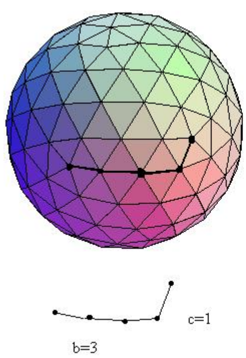

Figura 4: Esempio: b=3, c=1

1.1.2 Calcolo dei Triangulation numbers

Vogliamo mostrare come si arriva al calcolo dei "triangulation numbers". Si tratta di calcolare la distanza tra due vertici di grado 5 della cupola utilizzando come unità di misura il lato dei triangolini della tassellazione. I triangoli della tassellazione piana sono equilateri, nel momento in cui verranno proiettati sulla sfera circoscritta non saranno più nï¿$\frac{1}{2}$ equilateri né uguali tra loro. Questo non influenzerà il conto dei triangoli.

Riprendiamo uno schema simile a quello della figura 4, AB é il lato dell'icosaedro che vogliamo misurare. Nel caso che stiamo considerando avremo $b = 10$ e $c = 6$. (figura 5)

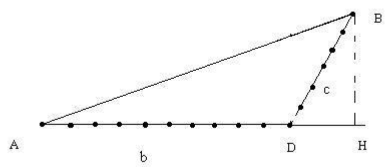

Figura 5: Calcolo di AB

Tracciamo la perpendicolare da B, pertanto il triangolo ABH è rettangolo, così come il triangolo BDH. In particolare l' angolo $\widehat{BDH}$ misura $\frac{\pi}{3}$ e $\widehat{DBH}$ misura $\frac{\pi}{6}$, quindi poiché $BD = c$, deduciamo che $DH = \frac{c}{2}$, $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A questo punto

$$AH = AD + DH = b + \frac{c}{2}, \quad BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

usando il teorema di Pitagora si ha

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 = \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = b^2 + bc + c^2 := T.$$

L'ultima formula è un'espressione di AB (al quadrato) in termini di b e c, che sono noti, dal momento che abbiamo il modo di calcolarli, osservando una cupola.

Rimane da calcolare ancora il numero di triangoli presenti su una faccia dell'icosaedro, noti i parametri b, c. Il numero dei triangoli presenti su una faccia dell'icosaedro ï¿$\frac{1}{2}$ pari all'area della faccia diviso l'area di un triangolo piccolo. L'area della faccia è

$$\frac{AB}{2} \cdot \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}(AB)^2}{4} = \frac{\sqrt{3}T^2}{4}$$

mentre l'area di uno dei triangoli da cui è tassellata la faccia dell'icosaedro di lato unitario è

$$\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Dividendo l'area della faccia per l'area del tiangolo otteniamo esattamente T. Un'icosaedro è composto esattamente da 20 facce, quindi $20T$ è il totale dei triangoli della sfera geodetica. Quindi noti b, c è possibile con un calcolo immediato conoscere il numero dei triangoli della cupola geodetica a cui si riferiscono i parametri.

Esercizio-esempio

Contare i triangoli della sfera geodetica in figura 6:

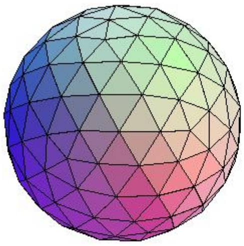

Figura 6: Sfera geodetica $(3, 1)$

Individuiamo due vertici di grado 5. Calcoliamo b e c. Si ha $(b, c) = (3, 1)$. Pertanto

$$T = b^2 + bc + c^2 = 9 + 3 + 1 = 13$$

Il totale dei triangoli é $20T = 260$.

Riferimenti bibliografici

[1] D.L.D. Caspar, Movement and self-control in protein assemlbies *Biophis. J.*, 1980, 103–136.

[2] M. Coxeter, Virus Macromolecules and Geodesic domes *A spectrum of Mathematics* Auckland University Press and Oxford University Press, 1972, 98–107.

[3] Luca Carlucci, Francesco D'Ippolito, Pierluigi Gallina R. Buckminster Fuller e le cupole reticolari geodetiche: metodi e modelli a confronto, tesina AA 2006\2007, Corso di Matematica, Laurea specialistica in PA, Facoltà di Architettura Roma Tre