2. ESERCIZI SUI PUNTI DI ACCUMULAZIONE E TOPOLOGIA DELLA RETTA REALE

Esercizio 1
Trovare i punti di accumulazione e i punti isolati dei seguenti insiemi:
$(A){:}=\{x=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}\}$
$(B){:}=\{x=\frac{1}{2},3-\frac{1}{2},\frac{1}{3},3-\frac{1}{3},\frac{1}{4},3-\frac{1}{4},....,\frac{1}{n},3-\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\}$
$(C){:}=\{x=\frac{n-1}{n};\ n\in\mathbb{N}\}$

Esercizio 2
Dare un esempio di:
(i) un insieme con infiniti elementi e senza punti di accumulazione;
(ii) un insieme con infiniti elementi e un solo punto di accumulazione;
(iii) un insieme che abbia un solo punto di accumulazione, tutti gli altri punti siano isolati e sia illimitato.

Esercizio 3
Dire se i seguenti insiemi sono aperti o chiusi, oppure né aperti né chiusi:
(i) $\{x\in\mathbb{R}{:}\, 1<|x-2|<3\}$;
(ii) $\{x\in\mathbb{R}{:}\, x=\frac{1}{n}\ ,\ n=1,2,3...\}$;
(iii) $\{x\in\mathbb{R}{:}\, x^2+3x+1=0\}$;
(iv) $\{x\in\mathbb{R}{:}\, (x-2)^2\neq 0\}$.

Esercizio 4
Dimostare che ogni insieme $A\subset\mathbb{R}$ chiuso e limitato ha massimo e minimo.

Esercizio 5
Dimostare che se un insieme $A\subset\mathbb{R}$ é limitato superiormente e $\sup A\notin A$, allora $\sup A$ é un punto di accumulazione per A.