

# III tutorato di analisi matematica 1a

docenti: prof. M. Girardi, prof. P. Magrone

14 ottobre 2004

**Esercizio 1.** Verificare quale tra le seguenti è una distanza in  $\mathbb{R}$ :

a)  $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$

b)  $d(x, y) = |x^2 - y^2|$

c)  $d(x, y) = |x - y|^2$

d)  $d(x, y) = |\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|$

e)  $d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$

**Esercizio 2.** Si provi per induzione che, per ogni intero positivo  $n$ , risulta:

$$n^n \geq n!$$

**Esercizio 3.** Si provi per induzione che, per ogni intero positivo  $n$ , risulta:

$$\sum_{k=0}^n (4k + 1) = (2n + 1)(n + 1)$$

**Esercizio 4.** Si provi per induzione che, per ogni intero positivo  $n$ , risulta

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

**Esercizio 5.** Dimostrare la seguente proprietà, applicando il principio d'induzione:

per tutti i naturali  $n \in \mathbb{N}$ , la potenza  $n$ -esima di 4 diminuita di 1 è divisibile per 3.

**Esercizio 6.** Dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=0}^n k(k + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

**Esercizio 7.** Dimostrare, per induzione, le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left( \frac{n(n + 1)}{2} \right)^2 = \left( \sum_{k=0}^n k \right)^2$$