MASSIMO E MINIMO LIMITE DI SUCCESSIONI

Ricordiamo la definizione:
data una successione a_n, L é massimo limite di a_n se é l'estremo inferiore dei maggioranti definitivi. Un maggiorante definitivo per a_n é un numero M per cui esiste $\nu \in \mathbb{R}$ tale che $a_n < M \forall n > \nu$. Analogamente il minimo limite é l'estremo superiore dei minoranti definitivi, dove un minorante definitivo é un numero m per cui esiste $\nu \in \mathbb{R}$ tale che $a_n > m \forall n > \nu$. Dalla definizione si deduce la seguente caratterizzazione: un numero L é massimo limite di una successione a_n se verifica entrambe le seguenti proprietá:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} : a_n < L + \varepsilon \ \forall n > \nu$$

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ per infiniti indici } a_n > L - \varepsilon.$$

Analogamente un numero l é minimo limite di una successione a_n se verifica entrambe le seguenti proprietá:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} : a_n > l - \varepsilon \ \forall n > \nu$$

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ per infiniti indici } a_n < l + \varepsilon.$$

Un metodo per trovare massimo e minimo limite di una successione é il seguente: trovare due sottosuccessioni $\{a_{n_k}\}$, $\{a_{n_h}\}$, che tendono a due limiti diversi, l, L, dopodiché, se l é tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} : a_n > l - \varepsilon \ \forall n > \nu$$

allora l é minimo limite di a_n. Se L é tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} : a_n < L + \varepsilon \ \forall n > \nu$$

allora L é massimo limite di a_n.

Esercizio 1
Determinare massimo e minimo limite delle seguente successione: $a_n = [\sin n + 1]$ dove $[\cdot] =$ parte intera.

Suggerimento: Sfruttare il fatto, noto, che $\max\lim \sin n = +1$, $\min\lim \sin n = -1$, e che esistono sempre due sottosuccessioni che tendono al massimo limite e al minimo limite.

Esercizio 2

Determinare massimo e minimo limite delle seguenti successioni:

(i) $a_n = \frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{10}$

(ii) $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$

(iii) $a_n = \arctan(-2)^n$

(iv) $a_n = (-1)^n + \sin \frac{1}{n}$