ESERCITAZIONE DI ESONERO DI AM1A

29 ottobre 2004

Esercizio 1.

Trovare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$A = \left\{ x = \frac{(-1)^n}{n} + 2(-1)^{n+1}, \quad n \in \mathbf{N} \right\}$$

Esercizio 2.

Dato l'insieme:

$$B = \left\{ x = 2 + \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{x} \in B, \ \overline{x} \neq 2 \ : \overline{x} \in I(2, \varepsilon).$$

Inoltre dimostrare che esiste un intorno del punto $x_2 = 2 + \frac{1}{4}$ in cui non cadono punti di B diversi da x_2.

Suggerimenti:

Si deve provare che in un intorno di 2, piccolo a piacere, c'é sempre un punto dell'insieme, oltre a 2 stesso. Per la seconda domanda,si deve trovare un raggio e costruire un intorno del punto dato, in modo che in tale intorno non ci siano altri punti dell'insieme (non altri punti di $\mathbb{R}$!). Basta trovare sulla retta gli elementi dell'insieme per i primi n, dopodiché l'intorno da trovare si "vede"!!

Esercizio 3.

Dimostrare per induzione che

$$\sum_{h=0}^{n-1} (h+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Esercizio 4.

Trovare estremo superiore ed inferiore del seguente insieme:

$$C = \left\{ x = \frac{7 - 2n}{n} + 5, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Esercizio 5.

Dare la definizione di insieme aperto e chiuso.

Enunciare la caratterizzazione degli estremi superiore ed inferiore di insiemi.

Dare la definizione di: sezione di $\mathbb{R}$, di elemento separatore ed enunciare l'assioma di Dedekind.