Soluzioni I tutorato AM01a

docenti: prof. M. Girardi, prof. P. Magrone

30 settembre 2004

Esercizio 1. Siano A e B i seguenti insiemi. Si trovi $A \cup B \quad A \cap B \quad A \setminus B$ e si indichi se i risultanti sono insiemi aperti, chiusi o nessuno dei due:

a) $A = (0, 2) \quad B = (1, 3)$

- In questo primo caso ci troviamo di fronte a due intervalli aperti (gli estremi non sono contenuti nell'intervallo). La loro intersezione è composta da $\{x \in \mathbb{R} | x \in A \wedge x \in B\}$, l'intervallo aperto $(1, 2)$. La loro unione è data da $\{x \in \mathbb{R} | x \in A \vee x \in B\}$, l'intervallo aperto $(0, 3)$. Infine $A \setminus B$ è definito come $\{x \in \mathbb{R} | x \in A \wedge x \notin B\}$ l'intervallo semichiuso $(0, 1]$.

Esercizio 2. Dire, verificandone le propietà, quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza in $\mathbb{R}$:

a) $x \leq y$

-Dato un insieme di partenza A, una relazione ρ è d'equivalenza in A se verifica *TUTTE* le seguenti proprietà:

i) Riflessiva: $\forall a \in A \Rightarrow a \, \rho \, a$

In questo caso $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$ è verificata, quindi la relazione è riflessiva.

ii) Simmetrica: $se \, a \, \rho \, b \Rightarrow b \, \rho \, a$

In questo caso non è vero che se $x \leq y$ allora $y \leq x$, quindi la nostra relazione NON è d'equivalenza!!!

iii) Transitiva: $se \, a \, \rho \, b \wedge b \, \rho \, c \Rightarrow a \, \rho \, c$

Non è necessario verificare la proprietà poichè non essendo verificata la seconda, già sappiamo che la nostra non è una relazione d'equivalenza.

b) $x + y$ è intero NON è d'equivalenza perchè non è né riflessiva né transitiva.

c) $|x| = |y|$ È d'equivalenza!

d) $x(1 - y^2) = y(1 - x^2)$ È d'equivalenza!

Esercizio 3. Verificare se le seguenti sono relazioni di equivalenza e per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare la classe di a, $[a]$:

a) $x = y$

La classe di a è definita come $[a] = \{x \in A \, | a \, \rho \, x\}$

L'uguaglianza è una relazione d'equivalenza e [a]={a}!

b) $x^2 + y^2 \geq 6$ non è d'equivalenza.

c) $x^2 + y^2 \geq 0$ è d'equivalenza e [a]=$\mathbb{R}$.

d) $|x-y|\le 12$ non è d'equivalenza.
e) $\cos x = \cos y$ è d'equivalenza e [a]={$a + 2k\pi$, $-a + 2k\pi 2$}.
f) $|\sin y| = \frac{1}{|x|+1}$ non è d'equivalenza.

Esercizio 4. Dire quale tra le seguenti è una partizione giustificando la risposta:
a) il parallelismo tra rette in un piano
Dato un insieme A e $B_i \subseteq A$ sottoinsiemi, avró che B_i è una partizione di A se:
i) $B_i \cap B_j = \emptyset \ \forall i, j$
ii) $\bigcup_i B_i = A$
Il parallelismo tra rette è una partizione! Ogni B_i è una classe di parallelismo ben definita dal coefficiente angolare.
b) sia $a \in \mathbb{R}$, $|x| \ge a \quad x \in [-a, a]$ Non è una partizione perchè $\pm a$ appartengono all'intersezione.
c) in $\mathbb{N}$: $\{i\, numeri\, primi\} \quad \{i\, numeri\, pari\} \setminus \{2\}$ Non è una partizione perchè l'unione non è $\mathbb{N}$.
d) in $\mathbb{R}$ $\{2\}$, $\{x > 2\}$, $\{[-3, 2)\}$, $\{x < -3\}$ È una partizione.

Esercizio 5. Dimostrare le seguenti uguaglianze:
a) $|ab| = |a||b|$ *b*) $\sqrt{a^2} = |a|$ *c*) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
Basta verificare per tutte le possibili combinazioni di segno.

Esercizio 6. Si consideri l'equazione $\sqrt{5-x} = 1 + \sqrt{x}$. Elevando al quadrato entrambi i membri si ottiene $5-x = 1+2\sqrt{x}+x$ cioé $2-x = \sqrt{x}$. Elevando nuovamente al quadrato si ottiene l'equazione $x^2-5x+4 = 0$ che ha soluzioni $x = 4$ e $x = 1$. Sostituendo quindi $x = 4$ nell'equazione di partenza si ha $1 = 3$. Cos'è che non va?
-Elevando una equazione a potenza si mantengono le soluzioni iniziali ma se ne generano automaticamente delle altre che soddisfano l'equazione di arrivo ma non quella di partenza!

Esercizio 7. Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni trigonometriche:
a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sol: $x = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$
b) $2\sin x = \sqrt{2}\cos x$ sol: $x = \{\arctan \frac{sqrt2}{2} + k\pi$
c) $\sin x \cos x = \frac{\tan x}{4}$ sol: $x = \{\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$
d) $\sin^2 x + 2\cos^2 x - \frac{3}{4} = 0$ non ha soluzioni reali
e) $\cos 2x - \cos^2 x = \tan^2 x$ non ha soluzioni reali

Esercizio 8. Stabilire per quali valori del parametro reale k ha significato ciascuna espressione dove α è un angolo del IV quadrante:
a) $\cos\beta = 1 - \frac{1}{k^2}$ sol: $|k| \ge 1$
b) $\tan\alpha = k^2 - k$ sol: $0 \le k \le 1$

Esercizio 9. Semplifica, motivando i passaggi, le seguenti espressioni:

a) $\left[\frac{1}{\cos(-\alpha)} + \frac{cos(\pi-\alpha)}{1-\sin(2\pi-\alpha)}\right] \tan(\pi+\alpha)$ sol: $\tan^2\alpha$

b) $\frac{\tan(\frac{7}{4}\pi)}{cos(\frac{5}{3}\pi)} - \frac{\cos\frac{3}{4}\pi}{\sin\frac{7}{6}\pi} + 2\sin(\frac{3}{4}\pi)\cos(-\frac{\pi}{4}) - \sin\frac{3}{2}\pi$ sol: $2-\sqrt{2}$

Per qualsiasi chiarimento o segnalazione di errori potete contattare il tutore del corso tramite una mail all'indirizzo urbinati_st@libero.it