Secondo esonero di Am1a
11 gennaio 2005

Esercizio 1.
Calcolare il limite delle seguenti successioni:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3+2^n}{e^n}\right)^{\frac{e^n}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3+2^n}{e^n}\right)^{\frac{e^n}{3+2^n}\cdot\frac{3+2^n}{e^n}\cdot\frac{e^n}{2^n}} =$$

$$= e^1.$$

Si usa il limite notevole $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$, con $a_n = \frac{3+2^n}{e^n} \to$ 0

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log\sqrt[n]{n}}\sin(\log\sqrt[n]{n})\cdot\frac{7n^{\frac{2}{3}}-4n^{\frac{1}{3}}}{4\sqrt[3]{n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log\sqrt[n]{n}}\sin(\log\sqrt[n]{n})\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{7n^{\frac{2}{3}}-4n^{\frac{1}{3}}}{4\sqrt[3]{n^2}} =$$

$$= 1\cdot\frac{7}{4}$$

Si usa il limite notevole $a_n \sin\frac{1}{a_n} \to 1$, con $a_n = \log\sqrt[n]{n} \to$ 0.

Esercizio 2.
Determinare per quali valori del parametro reale x la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n}\frac{1}{(2+n)^2}$$

Usiamo il criterio della radice ennesima:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{2n}\frac{1}{(2+n)^2}} = |x|^2$$

quindi la serie converge assolutamente per $|x| < 1$. Per $x = \pm 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2+n)^2}$$

che converge per ché ha lo stesso andamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Esercizio 3.

Calcolare massimo e minimo limite della seguente successione:

$$a_n = \frac{\arctan(-e)^n}{n} + 4(-1)^n$$

Osserviamo che il termine $\frac{\arctan(-e)^n}{n} \to 0$, dato che la funzione arcotangente é limitata. Studiamo le sottosuccessioni dei pari e dei dispari:

$$a_{2n} = \frac{\arctan(e)^{2n}}{2n} + 4 \to 4, \quad a_{2n+1} = \frac{\arctan(-e)^{2n+1}}{2n+1} - 4 \to -4.$$

Dimostriamo che -4 é minimo limite: essendo limite di una sottosuccessione quello che resta da provare é che qualsiasi numero piú piccolo di -4 é un minorante definitivo, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall n \geq \nu \ -4 - \varepsilon \leq \frac{\arctan(-e)^n}{n} + 4(-1)^n,$$

quindi

$$\frac{\arctan(-e)^n}{n} + 4(-1)^n \geq \frac{-\frac{\pi}{2}}{n} - 4 \geq -4 - \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

Dimostriamo ora che 4 é massimo limite: essendo limite di una sottosuccessione quello che resta da provare é che qualsiasi numero piú grande di 4 é un maggiorante definitivo, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu : \forall n \geq \nu \ 4 + \varepsilon \geq \frac{\arctan(-e)^n}{n} + 4(-1)^n,$$

quindi

$$\frac{\arctan(-e)^n}{n} + 4(-1)^n \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n} + 4 \leq 4 + \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

Esercizio 4.

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\log_{10} n}}{n^2 + 3}.$$

Osserviamo che $\log_{10} n = \log_e n \log_{10} e$, pertanto $e^{\log_{10} n} = e^{\log_e n \log_{10} e} = n^{\log_{10} e}$ e considerando che $\log_{10} e < 1$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\log_{10} n}}{n^2 + 3} = 0.$$

Esercizio 5.

Dire se la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 - 10n + 9}$$

Escludiamo $n = 1, 9$ perché annullano il denominatore. Per usare il criterio di Leibniz si deve verificare che il la successione $a_n = \frac{1}{n^2 - 10n + 9}$ tende a zero, é positiva e decrescente, le ultime proprietá possono essere verificate anche solo definitivamente. Infatti:

$$\frac{1}{n^2 - 10n + 9} \to 0,$$

$$\frac{1}{n^2-10n+9} > 0 \iff n^2-10n+9>0,$$

ovvero $n < 1, n > 9$, quindi per $n \geq 10$ la successione é positiva. Verifichiamo la decrescenza, ovvero che $a_n \geq a_{n+1}$:

$$\frac{1}{n^2-10n+9} \geq \frac{1}{(n+1)^2-10(n+1)+9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2-10n+9 \leq (n+1)^2-10(n+1)+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq 2n \ \Leftrightarrow n > \frac{9}{2}.$$

Essendo verificate le ipotesi del criterio di Leibniz, alcune solo definitivamente, ma é sufficiente, la serie converge.