11. ESERCIZI SULLO STUDIO DEL GRAFICO DI FUNZIONI

Si puó seguire il seguente schema per studiare il grafico di una funzione:
♣ Insieme di esistenza (I_E);
♣ Zeri, segno;
♣ Limiti: nei punti *esclusi* dall' insieme di esistenza e all' infinito, ovviamente se l' I_E é illimitato. In questo modo si trovano gli eventuali asintoti:
se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ la funzione $f(x)$ ha un asintoto verticale per $x = x_0$, a destra della retta $x = x_0$;
se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ la funzione $f(x)$ ha un asintoto verticale per $x = x_0$, a sinistra della retta $x = x_0$;
se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x)$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = l$;
se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ la funzione $f(x)$ puó avere un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$. In tal caso si ha che la retta $y = ax + b$ é asintoto obliquo per la funzione $f(x)$ se e solo se: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, e $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = b$.
♣ Derivata prima: calcolarla e studiarne zeri e segno:
dove $f'(x) > 0$ la funzione é *crescente*,
dove $f'(x) < 0$ la funzione é *decrescente*,
se $f'(x_0) = 0$ nel punto x_0 puó esserci un massimo o un minimo (si capisce dal segno della derivata in un intorno del punto);
♣ Massimi e minimi;
♣ Eventuale calcolo della derivata seconda, per capire se i punti che annullano la derivata prima sono di massimo o di minimo e per studiare la concavitá della funzione.

1

Studiare le seguenti funzioni:

$f_1(x) = \frac{x|x|+1}{e^x}$

$f_2(x) = \arctan\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

$f_3(x) = \frac{1}{e^x - 3}$

$f_4(x) = \ln(1 + \sin x)$

$f_5(x) = \frac{x}{x-1} e^{-x}$

$f_6(x) = x e^{\frac{2}{\sqrt{x-2}}}$

$f_7(x) = \left| \frac{x-3}{1-x} \right| \frac{1}{x^2}$

$f_8(x) = \arctan \frac{x-2}{x^2+3}$

$f_9(x) = \sqrt{\log(x+1)}$

$f_{10}(x) = \sqrt{\log(\arcsin x) - \log(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})}$

$f_{11}(x) = \sqrt{\log x - \log \sqrt{x}}$