Simulazione del secondo esonero di CAM

(le soluzioni verranno fornite in rete)

Un consiglio: fatelo da soli e senza libri in tre ore, altrimenti che simulazione sarebbe??

Giustificare tutte le affermazioni

Esercizio 1.
Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{2x + \log x^3 + 3}{1 + x^2 + x\log x^3} dx; \qquad \int \sin(2x) \cdot \cos^2(2x) dx$$

Esercizio 2.
Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio converge

$$\int_0^1 \frac{(e^{\alpha x} - 1 - x) \cdot \sin x \cdot \log x}{x \log(1 + x^2)}$$

Esercizio 3.
Calcolare i seguenti limiti utilizzando la formula di Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{1 - \sqrt{1 - x^3}}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)}$$

Esercizio 4.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt \ = a.$$

Suggerimento: usare la definizione di limite di funzione, e sfruttare la monotonia dell'integrale.

Esercizio 5.
Enunciare uno dei due teoremi di de L'Hopital (con TUTTE le ipotesi!!!).
Enunciare il Teorema del confronto per integrali impropri.
Dare un esempio di :
(a) funzione integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$;
(b) funzione definita in $(2, 3)$, avente un asintoto verticale in $x = 2$, integrabile in senso improprio in $(2, 3)$;
(c) funzione definita in $(1, +\infty)$, avente un asintoto verticale in $x = 1$, integrabile in senso improprio in $(1, +\infty)$ (costruitela!!!).