Schema sullo Studio di Funzione

Manuela Grella & Simona Giovannetti

15 marzo 2005

Per disegnare in un piano cartesiano il grafico di una funzione $y = f(x)$ è opportuno seguire il seguente schema:

(1) Inizialmente si determini il *dominio* I della $f(x)$.

(2) Si esamini se la funzione $f(x)$ gode di qualche proprietà di simmetria; ad esempio si esamini se f(x) è: **pari** (cioè $f(-x) = f(x)\ \forall x \in I$), **dispari** (cioè $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in I$), **periodica** di periodo T (ossia $f(x+T) = f(x)\ \forall x \in I$).
Se la funzione è pari o dispari, basta studiarla per $x \geq 0$; poi è possibile disegnare per simmetria il grafico della funzione anche per $x < 0$. Analogamente, se la funzione è periodica di periodo T, è sufficiente studiarla in un intervallo di lunghezza T.

(3) Se è semplice si può determinare il *segno* della funzione , cioè determinare per quali x risulta $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ e $f(x) = 0$.
È bello osservare che, in alcuni casi, può essere molto complicato risolvere l'equazione del tipo $f(x) = 0$, o la disequazione $f(x) > 0$, e la risoluzione è spesso facilitata dallo studio preliminare del segno della derivata prima e del calcolo degli asintoti.

(4) Si determinano gli eventuali *asintoti* verticali, orizzontali e obliqui (calcolando i limiti agli estremi degli intervalli di definizione, se l'insieme di definizione è costituito da una unione di intervalli).

(5) Si determinano gli eventuali punti dell'insieme di definizione dove la funzione non è continua, o dove non è derivabile.

(6) Si calcola, quando esiste, la derivata prima e si stabilisce per quali valori x risulta $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$: in base a ciò si determinano gli intervalli in cui la funzione risulta crescente ($f'(x) > 0$) o decrescente ($f'(x) < 0$) ed i punti di massimo o di minimo relativo o flessi orizzontali ($f'(x) = 0$).

(7) Si calcola, se esiste, la derivata seconda e si determinano i valori di x per cui risulta $f''(x) = 0$, $f''(x) > 0$ e $f''(x) < 0$: in base a ciò si determinano gli intervalli in cui la funzione è concava ($f''(x) \leq 0 \ \forall x \in (a, b)$) o convessa ($f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$) e gli eventuali punti di flesso($f''(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$).

È utile ricordare che per il calcolo del massimo, del minimo e dei flessi si usa sopratutto il metodo delle derivate successive.

Ecco alcune definizioni importanti:

Definizione 1. Una funzione $f(x)$ definita in $[a, b]$ è convessa in tale intervallo se $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, risulta

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \ \forall \lambda \in [0.1].$$

Definizione 2. Una funzione $f(x)$ definita in $[a, b]$ è concava in tale intervallo se $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, risulta

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \ \forall \lambda \in [0.1].$$

Asintoti

Una fnzione $f(x)$ ammette per $x \to +\infty$ (oppure $x \to -\infty$) **asintoto orizzontale** di equazione $y = l$ se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

(oppure $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$)).

Una funzione $f(x)$ ammette **asintoto verticale**, per $x \to x_0^+$ (oppure $x \to x_0^-$), di equazione $x = x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0^+} = +\infty \ o \ -\infty$$

(oppure $\lim_{x \to x_0^-} = +\infty \ o \ -\infty$).

Un **asintoto obliquo** per $x \to +\infty$ (analogamente per $x \to -\infty$) per una funzione $f(x)$ è una retta di equazioni $y = mx + q$ tale che

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

Le costanti m, q si determinano calcolando i limiti:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

Notiamo che se una funzione ammette asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, è inutile esaminare successivamente se esiste anche un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.