Integrali Impropri

Manuela Grella & Simona Giovannetti

10 maggio 2005

Soluzione 1. (i) La funzione integranda è positiva e illimitata in $x = 0$. Si calcola l'ordine di infinito della funzione integranda per $x \to 0^+$ rispetto alla funzione di base $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{e^x}{x}}{(\frac{1}{x})^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} e^x x^{\alpha - 1}$$

a) Per $\alpha > 1$ si ha $\lim_{x \to 0^+} e^x x^{\alpha-1} = 0$;
b) Per $\alpha < 1$ si ha $\lim_{x \to 0^+} e^x x^{\alpha-1} = +\infty$ essendo $1 - \alpha > 0$;
c) Per $\alpha = 1$ si ha $\lim_{x \to 0^+} e^x x^{\alpha-1} = \lim_{x \to 0^+} e^x = 1$.

Poiché l'ordine d'infinito della funzione integranda, per $x \to 0^+$, è uguale a 1, la funzione non è integrabile in senso generalizzato in $(0, 1]$

(ii) La funzione integranda è positiva e illimitata in $x = 1$. Si calcola ora l'ordine di infinito della funzione integranda per $x \to 1^-$ rispetto alla funzione di base $\frac{1}{1-x}$:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}}{(\frac{1}{1-x})^\alpha} = \lim_{x \to 1^-} \sin x (1 - x)^{\alpha - \frac{1}{2}}$$

Affinché l'ultimo limite sia finito e diverso da zero è necessario che sia $\alpha - \frac{1}{2} = 0$, ossia $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, qindi la funzione $\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}$ è integrabile in senso improprio in $[0, 1)$.

(iii) La funzione integranda è positiva e illimitata in $x = 1$. L'integrale è convergente in senso improprio se sono convergenti entrambi gli integrali impropri $I_1 = \int_0^2 f(x)dx$ e $I_1 = \int_2^4 f(x)dx$. Presi due punti $0 < c_1 < 2$ e $2 < c_2 4$ si calcolano i due integrali:

$$I_{c_1} = \int_0^{c_1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx = 3\sqrt[3]{c_1 - 2} - 3\sqrt[3]{-2}$$

$$I_{c_2} = \int_{c_2}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx = 3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{c_2 - 2}$$

Infine si calcolano i limiti:

$$I_1 = \lim_{c_1 \to 2^-} I_{c_1} = 3\sqrt[3]{2} \qquad I_2 = \lim_{c_2 \to 2^-} I_{c_2} = 3\sqrt[3]{2}$$

Poiché i due integrali sono convergenti allora anche I è convergente in $[0, 4]$ ed assume valore $I = I_1 + I_2 = 6\sqrt[3]{2}$

(iv) La funzione integranda è continua e positiva in $(0, 1/2]$ e illimitata in $x = 0$. Preso un punto c, con $0 < c < 1/2$ si calcola l'integrale definito:

$$I_c = \int_c^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx = \int_c^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} dx = \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \sqrt{c}$$

Facendo il limite per $c \to 0^+$ otteniamo che $I_c = \frac{\pi}{2}$.

(v) La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ è continua in $[2, +\infty)$ ed è infinitesima per $x \to +\infty$. Si calcola ora l'ordine di infinitesimo della funzione rispetto alla funzione di riferimento $\frac{1}{x}$.

a) Per $0 < \alpha < 1$ si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln x}}{(\frac{1}{x})^\alpha} = 0$$

per cui $f(x)$ è infinitesima di ordine maggiore di ogni numero $\alpha < 1$ rispetto a $\frac{1}{x}$

b) Per $\alpha = 1$ si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln x}}{(\frac{1}{x})^\alpha} = 0$$

per cui $f(x)$ è infinitesima di ordine maggiore di 1.

c)