SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SULL'UNIFORME CONTINUITA'

ESERCIZIO 1

(a) La funzione $\log x$ é continua in $[1,2]$, quindi uniformemente continua. In $(0,2]$ dobbiamo controllare il limite in zero.
$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$. Quindi la funzione non é u.c. in $(0,2]$. Infine nel terzo intervallo: in 4 la funzione é ben definita. All'infinito basta osservare che la derivata di $\log x$ é $\frac{1}{x}$, che é minore di 1 per $x > 4$, quindi per il teorema di Lagrange, otteniamo l'uniforme continuitá.
(b) In -1 e 1 la funzione é ben definita e non c'é bisogno di fare il limite. Invece in zero:
$\lim_{x\to 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0^+} \arctan \frac{1}{x} = +\frac{\pi}{2}$.
C'é una discontinuitá di tipo salto, non eliminabile, quindi non possiamo estendere $\arctan \frac{1}{x}$ ad una funzione continua nel compatto $[-1,1]$.
Nell'insieme $(1,+\infty)$ la funzione é u.c. perché in 1 é definita e continua, all'infinito ammette asintoto orizzontale:
$\lim_{x\to +\infty} \arctan \frac{1}{x} = 0$.
(c) Basta osservare che la funzione $\sin x$ ha derivata limitata su tutto l'asse reale, quindi é u.c.
(d) In $(1,2)$ la funzione é continua, anche negli estremi é ben definita e limitata, quindi possiamo subito concludere che é u.c.. In $[2,+\infty)$ si deve solo controllare il limite a $+\infty$:
$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x^2+1} = 0$, quindi c'é asintoto orizzonatale e la funzione é u.c..
(e) x^3 non é u.c.. in insiemi illimitati per il Teorema della farfalla: se lo fosse dovrebbe verificare la stima $|x^3| \leq Ax + B$, per qualche $A, B \in \mathbb{R}$. Se cosí fosse si avrebbe $\frac{|x^3|}{Ax+B} \leq 1$ $(*)$, ma $\lim_{x\to +\infty} \frac{|x^3|}{Ax+B} = +\infty$, quindi non si puó avere la $(*)$.
(f) La funzione $x^{\frac{1}{3}}$ é u.c.. in $[a,+\infty)$ con $a > 0$ perché ha derivata limitata, in particolare definitivamente minore di 1.

ESERCIZIO 2

Se f é u.c.. in $(a,b]$ e $[b,c)$, allora esiste un $\overline{f}$ u.c. in $[a,b]$ e $[b,c]$ che estende f. Quindi $\overline{f}$ in b é ben definita e vale esattamente $f(b)$. Ma allora possiamo estendere f ad una $\tilde{f}$ u.c. in $[a,b]$, quindi f é u.c. in tutto l'intervallo.

ESERCIZIO 3
(i) La funzione x^2 é continua e su tutti i compatti é anche u.c, ma in insiemi illimitati, quali ad esempio $[a,+\infty)$ non é u.c..
(ii) La funzione $\frac{1}{x}$ é continua in $(0,1)$ ma non é u.c. perché é illimitata in zero.