Soluzioni tutorato1

Manuela Grella e Simona Giovannetti

7 marzo 2005

Esercizio 1. Deve essere

$$lim_{x\to 0^-} f(x) = lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

Poiché $0 < sen^2(x) < 1$ sará $0 < x^a sen^2(x) < x^a$, quindi se $a > 0$ allora $lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Inoltre $0 < cos^2(1/x) < 1$, quindi se $b > 0$, $lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.
Se a=0 $lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Se b=0 $lim_{x\to 0^-} f(x)$ non esiste.

Possiamo concludere che f(x) é continua se $a \geq 0$ e $b > 0$.

Esercizio 2. Bisogna innanzitutto verificare che $lim_{x\to \pi/2} tg(x)$ esiste ed é finito; scriviamo $tg(x) = \frac{senx}{cosx}$, allora $lim_{x\to \pi/2} \frac{senx}{cosx} = \infty$; quindi la funzione non é continua.

Esercizio 3. Bisogna stabilire se

$$lim_{x\to 0^+} f(x) = lim_{x\to 0^-} f(x)$$

ma $lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$ mentre $lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$; quindi la funzione non é continua e ha una discontinuitá di prima specie.

Esercizio 4. Si ha che $lim_{x\to 0} sen(x)/x = 1$, ma la funzione non é definita in $x = 0$, quindi ho una discontinuitá eliminabile e la funzione si puó prolungare per continuitá in questo modo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & \text{se} \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. (i)$f(x) = e^x$ su $(-\infty, 1)$; applichiamo la definizione e vediamo se é verificata.
Se $|x - y| < \delta$ allora si ha:

$$|e^x - e^y| = e^y|e^{x-y} - 1| < e|e^{x-y} - 1|$$

considerando il fatto che $y \in (-\infty, 1)$, e quindi che $e^y < e^1$.
Usando ora $\lim_{\alpha \to 0} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1$, allora si ha che

$$e|e^{x-y} - 1| < e|x - y|\epsilon < e\delta\epsilon$$

Quindi la funzione é uniformemente continua.

(ii)$f(x) = x^2 ln(\frac{1+x^2}{x^2})$; se $x \in [1, \infty)$, $f(x)$ é continua; verifichiamo inoltre che ha un asintoto orizzontale: infatti

$$\lim_{x \to \infty} x^2 ln(\frac{1}{x^2} + 1) = \lim_{x \to \infty} \frac{ln(\frac{1}{x^2} + 1)}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

Allora $f(x)$ é uniformemente continua.(Ricordiamo che $\lim_{x \to 0 \frac{ln(1+x)}{x}} = 1$).

Se $x \in [1, 2]$ $f(x)$ é una funzione continua definita su un compatto (un intervallo chiuso e limitato), allora f(x) é uniformemente continua.

Se $x \in (0, 1)$ cerchiamo di estendere $f(x)$ ad una funzione continua su $[0, 1]$: il $\lim_{x \to 0^+} x^2 ln(\frac{1+x^2}{x^2}) = 0$, e $\lim_{x \to 1^-} x^2 ln(\frac{1}{x^2} + 1) = ln2$, e quindi possiamo estendere il caso all'intervallo $[0, 1]$.

(iii)La funzione $f(x) = arctg\frac{1}{x}$ non é definita in 0; vediamo se esistono e coincidono i limiti destro e sinistro, ossia se $f(x)$ é almeno continua: considerando il cambio di variabili $y = \frac{1}{x}$, se $x \to 0^-$ allora $y \to -\infty$ e quindi abbiamo

$$\lim_{x \to 0^-} arctg\frac{1}{x} = \lim_{y \to -\infty} arctg\ y = -\frac{\pi}{2}$$

considerando il cambio di variabili $y = \frac{1}{x}$, se $x \to 0^+$ allora $y \to +\infty$ e quindi abbiamo

$$\lim_{x \to 0^+} arctg\frac{1}{x} = \lim_{y \to \infty} arctg\ y = \frac{\pi}{2}$$

Poiché i due limiti non coincidono, la funzione non é continua e quindi non é neanche uniformemente continua.

Esercizio 6. Sia $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n_1} + ... + a_0$ con $n = 2h$ il polinomio da noi considerato, allora $lim_{x \to \infty} P(x) = \infty$ perché $a_n > 0$; inoltre $lim_{x \to -\infty} P(x) = \infty$ perché $a_n > 0$ e n é pari; infine $lim_{x \to 0} P(x) = a_0$ che é < 0, quindi la funzione $P(x)$ su $\mathbf{R}$ cambia segno due volte: una tra $-\infty$ e 0 e l'altra tra 0 e ∞. Poiché la funzione é continua (essendo $P(x)$ un polinomio) per il teorema degli zeri $P(x)$ ha due radici: una negativa e una positiva.

Soluzioni sercizi per casa

Esercizio 7. (i)$f(x) = \frac{xe^x}{|x|}$ su $[-1, 0)$ é uniformemente continua perché si puó estendere ad una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[-1, 0]$, perché $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

(ii)$f(x) = x \log x$ su $(0, 3]$ é uniformemente continua perché si puó estendere ad una funzione continua sull'intervallo chiuso e limitato $[0, 3]$, perché $\lim_{x\to 0} = 0$.

(iii)$f(x) = \sqrt{x}$ su $[1, \infty)$ é u.c. perché ha derivata limitata nell'intervallo.($f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$)

(iv)$f(x) = \sqrt[3]{x}$ su $[1, \infty)$ é u.c. perché ha derivara limitata.($f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$)

(v)$f(x) = x + \frac{\sin x^2}{x}$ é u.c. perché ha derivata limitata.($f'(x) = 1 + 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$)

Esercizio 8. (i)Per $x = 0$ si ha che $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ non esiste, infatti ponendo $y = \frac{1}{x}$ si ha che il precedente limite corrisponde a $\lim_{y\to\infty} \sin y$ che non esiste; quindi si ha una discontinuità di seconda specie.

(ii)$f(x) = \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$ non è definita nei punti che annullano il denominatore ossia in $x = -\frac{3}{2}$ e $x = 1$: in $x = 1$ si ha che $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+\frac{3}{2})} = \frac{3}{\frac{5}{2}} = \frac{6}{5}$, ossia si ha una discontinuità eliminabile.
Per $x = -\frac{3}{2}$ si ha che $\lim_{x\to -\frac{3}{2}^+} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} = +\infty$, mentre $\lim_{x\to -\frac{3}{2}^-} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} = -\infty$ e quindi abbiamo una discontinuità di seconda specie.

(iii)$f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ non è definita in $x = 0$, ma $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, quindi si ha una discontinuità eliminabile.

(iv)$f(x) = \frac{2x}{\sin 3x}$ non è definita se $\sin 3x = 0$, ossia per $x = 0$ e $3x = k\pi \Rightarrow x = k\frac{\pi}{3}$ con $k \in \mathbf{Z}$: per $x = 0$ si ha che $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$, quindi in 0 ho una discontinuità eliminabile.
Negli altri punti si ha che $\lim_{x\to k\frac{\pi}{3}} \frac{2x}{\sin 3x} = \infty$, ossia abbiamo una discontinuità di seconda specie.

(v) Poiché $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} x + 1 = 1$ allora la funzione è continua su tutto $\mathbf{R}$.

Esercizio 9. (i)Poiché $\lim_{\to 0^+} 2x + 1 = 1$ e $\lim_{\to 0^-} ax - 3 = -3 \ \ \forall a \in \mathbf{R}$, la funzione in 0 non è continua per alcun valore di a.

(ii)In $x = 0$ $\lim_{\to 0^+} x^2 + 2ax + a = a$ e $\lim_{\to 0^-} \sqrt{x+2} = \sqrt{2}$, quindi per $a = \sqrt{2}$ la funzione è continua in 0.