Integrali Impropri e Taylor

Manuela Grella & Simona Giovannetti

24 maggio 2005

Enunciamo ora alcuni concetti fondamentali dell'algebra degli $o(x^m)$:

Proprietà 1. 1) $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n) \quad \forall n.$

2) $\lambda o(x^n) = o(\lambda x^n) = o(x^n)$.

3) $o(x^m) + o(x^n) = o(x^\gamma)$ dove $\gamma = \min\{m, n\}$.

4) $o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$.

5) Se $m > n$ si ha che $x^m = o(x^n)$.

6) $\frac{o(x^m)}{x^n} = o(x^{m-n})$. (**Attenzione:** non si possono semplificare espressioni del tipo $\frac{o(x^m)}{o(x^n)}$: se si giunge a questa conclusione non si ha alcuna informazione, per cui o bisogna utilizzare un altro metodo oppure estendere gli sviluppi a potenze maggiori).

7) Se $m > 0$ allora si ha $[o(x^n)]^m = o(x^n)$.

8) $o[x^n + o(x^n)] = o(x^n)$.

9) $o(x^n)x^m = o(x^{m+n})$.

10) $o(o(x^n)) = o(x^n)$.

Soluzione 1. (a) Sappiamo che $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$: di questa basta prendere gli elementi fino all'ordine 3 ed elevate il tutto alla terza considerando sempre il fatto che si deve arrivare all'ordine 5:

$$\sin^3 x = (x - \frac{x^3}{3!})^3 + \text{ordine superiore...} = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5)$$

(b) Poiché $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, segue che

$$(e^x - 1)^2 = (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$$

(c) Calcoliamo lo sviluppo di Taylor di $f(x) = \arctan x$ sfruttando le derivate, ossia con la definizione:

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow f'(0) = 1, \quad f''(x) = -2x(1+x^2)^{-2} \Longrightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 4x(1+x^2)^{-3} - 2(1+x^2)^{-2} \Longrightarrow f'''(0) = -2,$$

$$f^{iv} = -24x^2(1+x^2)^{-4} + 4(1+x^2)^{-3} + 8x(1+x^2)^{-3} \Longrightarrow f^{iv}(0) = 4,$$

$$f^v = 96x^2(1+x^2)^{-5} - 48x(1+x^2)^{-4} - 24x(1+x^2)^{-4} - 24x(1+x^2)^{-3} + 8(1+x^2)^{-3}$$

$$\Longrightarrow f(0) = -24.$$

Da ciò considerando la formula di Taylor si ha che:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

Soluzione 2. (i)$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + \ln\cos x}{x^4}$: Scriviamo gli sviluppi di Taylor col resto di Peano delle funzioni che ci servono:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \qquad \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(x^2)$$

Poiché abbiamo $\ln\cos x$ allora dobbiamo porre $1 + y = \cos x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. Andando a sostituire gli sviluppi nel limite abbiamo che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + \ln\cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{8}$$

(ii) Scriviamo gli sviluppi di Taylor col resto di Peano delle funzioni che ci servono:

$$\cos x^5 = 1 - \frac{x^{10}}{2} + o(x^{10}) \qquad \cos\frac{x}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{216} + o(x^5)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$$

Andando a sostituire il tutto nel denominatore otteniamo:

$$(\sin x - x\cos\frac{x}{\sqrt{3}})^2 = \frac{1}{270^2}x^{10} + o(x^{10})$$

Quindi il limite sarà:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^5}{(\sin x - x\cos\frac{x}{\sqrt{3}})^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{10}}{2}+o(x^{10})}{\frac{x^{10}}{270^2}+o(x^{10})} = \frac{270^2}{2} = 36450$$

(iii) Scriviamo gli sviluppi di Taylor col resto di Peano delle funzioni che ci servono:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6), \qquad \sin^2 x = x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{24} + o(x^6)$$

Ora lavoriamo sul limite:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \frac{\sin x^2 - \sin^2 x}{\sin x^2 - \tan x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 \cos x^2 \frac{\sin x^2 - \sin^2 x}{\sin x^2(\cos x^2 - 1)}$$

Sostituendo gli sviluppi di Taylor al denominatore che abbiamo nel limite troviamo che $\sin x^2(\cos x^2-1) = -\frac{x^6}{2}+o(x^6)$, quindi al numeratore basterà arrivare al grado 6:

$$x^2\cos x^2(\sin x^2 - \sin^2 x) = x^2(1-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{24}+o(x^6))(x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6)-x^2+\frac{x^4}{3}-$$

$$-\frac{2}{45}x^6+o(x^6)) = \frac{x^6}{3}+o(x^6)$$

Mettendo il tutto nel limite iniziale si ha:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \frac{\sin x^2 - \sin^2 x}{\sin x^2 - \tan x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 \cos x^2 \frac{\sin x^2 - \sin^2 x}{\sin x^2(\cos x^2 - 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^6}{3}+o(x^6)}{-\frac{x^6}{2}+o(x^6)} = -\frac{2}{3}$$

(iv) Scriviamo gli sviluppi di Taylor col resto di Peano delle funzioni che ci servono:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad 2^x = 1 + (\ln 2)x + \frac{(\ln 2)^2}{2}x^2 + \frac{(\ln 2)^3}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$4^x = 2^{2x} = 1 + (2\ln 2)x + \frac{(2\ln 2)^2}{2}x^2 + \frac{(2\ln 2)^3}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Consideriamo innanzi tutto il denominatore: $x - \arctan x = x - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, per cui quando calcoliamo lo sviluppo di Taylor del numeratore dobbiamo considerare il fatto che ci serve arrivare fino all'ordine 3:

$$x4^x - 2^x + 1 = x(1-\ln 2) + (2\ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2})x^2 + o(x^2)$$

da cui si calcola:

$$x(x4^x - 2^x + 1)^2 = (1 - \ln 2)^3 x^3 + o(x^3)$$

Calcoliamo ora il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x4^x - 2^x + 1)^2}{x - \arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\ln 2)^3 x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = 3(1-\ln 2)^2$$

Soluzione 3. (i) La funzione integranda è continua e positiva nell'intervallo $(2, \infty)$, bisogna quindi analizzare la convergenza dell'integrale in un intorno destro di 2 e in un intorno di ∞. Si ha quindi $\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-2}} = \int_c^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-2}} + \int_2^c \frac{1}{x\sqrt{x-2}}$; con $c \in (2, \infty)$.
Studiamo la convergenza del primo integrale: consideriamo la funzione di confronto $\frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{x-2}}}{(\frac{1}{x})^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^{2(\alpha-1)}}{x-2}}$$

Perché questo limite sia finito e diverso da zero si deve avere che $2\alpha - 2 = 1$. ossia $\alpha = \frac{3}{2}$, che è > 1, quindi il primo integrale è convergente in $[c, +\infty)$.
Analizziamo il secondo integrale: risulta $\frac{1}{x\sqrt{x-2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-2}}$: l'integrale di quest'ultima funzione converge, quindi converge anche il secondo integrale e così anche quello di partenza.

(ii)Si possono considerare gli sviluppi di Taylor delle funzioni tgx e $ln(1+\sqrt[3]{x^2})$,fino al primo ordine cioé $tgx = x + o(x^2)$ e $ln(1+\sqrt[3]{x^2}) = \sqrt[3]{x^2} + o(1)$: sostituendli nell'integrale otteniamo:

$$\int_0^{e/2} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Questo integrale risulta essere convergente, quindi è convergente anche quello di partenza.